

Lineáris algebra

2. zárthelyi, 2004. 12. 08.

A csoport

1. Tekintsük a komplex számok halmazát valós számok feletti vektortérnek, és legyen $z = a + bi$ egy komplex szám. Mi lesz a z -vel való szorzás, mint lineáris leképezés mátrixa az $\{1, i\}$ bázisban? Milyen z esetén ortogonális ez a mátrix?

2. Írjuk fel a

$$3x^2 + 2xy + y^2$$

valós kvadratikus alakhoz tartozó bilineáris függvény szimmetrikus mátrixát. Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről? Keressünk egy ortonormált bázist az ezen bilineáris függvény által megadott skaláris szorzásra nézve, ha létezik.

3. Mutassuk meg, hogy a legfeljebb $n - 1$ -edfokú valós együtthatós polinomok terében bázist alkotnak az $1, 1 + x, 1 + x + x^2, \dots, 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ polinomok.

4. Hozzuk kanonikus alakra az

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 16y + 13 = 0$$

másodfokú görbe egyenletét, ábrázoljuk a görbét, és tüntessük fel az ábrán az új koordinátarendszer tengelyeit is.

5. Legyen φ bilineáris függvény az $\mathbb{R}^3$ vektortéren és $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ vektorok. Igaz-e, hogy $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ esetén biztosan teljesül $\mathbf{w} = \mathbf{u}$?

Lineáris algebra

2. zárthelyi, 2004. 12. 08.

B csoport

1. Tekintsük a komplex számok halmazát valós számok feletti vektortérnek, és legyen $z = a - bi$ egy komplex szám. Mi lesz a z -vel való szorzás, mint lineáris leképezés mátrixa az $\{1, i\}$ bázisban? Milyen z esetén szimmetrikus ez a mátrix?

2. Írjuk fel az

$$x^2 - 2xy + 2y^2$$

valós kvadratikus alakhoz tartozó bilineáris függvény szimmetrikus mátrixát. Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről? Keressünk egy ortonormált bázist az ezen bilineáris függvény által megadott skaláris szorzásra nézve, ha létezik.

3. Mutassuk meg, hogy a legfeljebb $n - 1$ -edfokú valós együtthatós polinomok terében bázist alkotnak az x^{n-1} , $x^{n-1} + x^{n-2}$, $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3}$, $\dots$, $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1$ polinomok.

4. Hozzuk kanonikus alakra a

$$-x^2 - 10xy - y^2 + 16x + 8y - 11 = 0$$

másodfokú görbe egyenletét, ábrázoljuk a görbét, és tüntessük fel az ábrán az új koordinátarendszer tengelyeit is.

5. Legyenek $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ vektorok az $\mathbb{R}^3$ vektortérben. Igaz-e, hogy $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ esetén biztosan teljesül $\mathbf{w} = \mathbf{u}$?