

1. a) Mutassuk meg, hogy az $a(bc) = (ab)c$ asszociativitási szabályból következik, hogy egy n tényezős szorzat tetszőleges zárójeljezéssel ugyanazt az értéket adja.
b) Mutassuk meg, hogy a kéttagú kommutativitásból és az asszociativitásból következik, hogy n elem tetszőleges sorrendben összeszorozva ugyanazt az értéket adja.
2. a) Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz test az $\mathbb{R}$ -beli összeadással és szorzással, és hogy K minden eleme egyértelműen írható $a + b\sqrt{2}$ alakban.
b)* Bizonyítsuk be, hogy $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ nem test. Határozzuk meg a legszűkebb résztestet $\mathbb{R}$ -ben, amely tartalmazza $\sqrt[3]{2}$ -t.
3. Adjuk meg az alábbi komplex számok kanonikus (algebrai) alakját:
a) $z = (3 - 4i)(7 + 8i)$; b) $z = \frac{3 - 4i}{2 - i}$; c) $z = i^{1994}$; d) $z = (1 + i)^9$.
4. a) Számítsuk ki a $16 - 30i$ komplex szám négyzetgyökeit.
b) Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok körében minden számból lehet négyzetgyököt vonni.
5. Legyen $z = 1 + 3i$ és $u = 2 - i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:
a) $z\bar{z}$ b) $u/\bar{u}$ c) $|z - u|$ d) $|2z - zu|$ e) $|u/z\bar{u}^3|$.
6. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:
a) $|z - 5 + i| = 2$ b) $|z - i| = |z + i|$ c) $|z| = 3iz$
d) $z + \bar{z} < 4$ e) $2z + 5 = 2\bar{z}$ f) $\left| \frac{z - 3 + 4i}{z - i} \right| \geq 1$
7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:
a) $z^2 = -12$;
b) $z^2 + 3z + 4 = 0$;
c) $z^2 = i$;
d) $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$.
8. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében, és ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon.
a) $x^3 - 1 = 0$ b) $x^4 - 1 = 0$ c) $x^4 + 1 = 0$ d) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$
Az d) egyenletnél osszunk le x^2 -tel, és vezessük be az $u = x + (1/x)$ helyettesítést.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{3}$ nem eleme a 2.a) feladatban megadott $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ testnek.

Hf2. Határozzuk meg azon z számok mértani helyét a komplex számsíkon, amelyekre $|z| = iz$.

Hf3. Adjuk meg az alábbi egyenlet összes megoldását:

$$\frac{2z}{1-i} + \frac{2}{z-1} = -1 + 2i.$$