

1. Osszuk el maradékosan az $x^5 - 3x^4 + 2x + 1$ polinomot
 - a) $(x^2 + 2x - 3)$ -mal;
 - b) $(x - 2)$ -vel;
 - c) $(x^2 - 4)$ -gyel.
 2. Milyen maradékot ad a $100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \dots + 2x^2 + x$ polinom az $x + 1$, $x^2 - 1$, illetve az $x^2 + 1$ polinommal osztva?
 3. Tegyük fel, hogy $f(x)g(x) = h(x)$, ahol $f(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, továbbá, hogy $f(x)$ főegyütthatója 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
 4. Lássuk be, hogy ha az $f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak egy $\frac{p}{q}$ racionális szám gyöke (ahol $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$), akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.
 5. Keressük meg a következő polinomok összes gyökét $\mathbb{C}$ -ben, és adjuk meg a polinomok gyöktényezős alakját!
 - a) $x^3 - 1$
 - b) $x^n + 1$
 - c) $x^2 + x + 1$
 - d) $x^6 - x^4 + 2$
 - e) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
 6.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy K test fölötti legfőljebb 3-adfokú polinomnak nincs gyöke K -ban, akkor az irreducibilis.
 - b) Adjunk meg olyan $\mathbb{Z}[x]$ -beli 3-adfokú polinomot, amelynek nincs gyöke $\mathbb{Z}$ -ben, de nem irreducibilis.
 - c) Adjunk meg olyan $\mathbb{R}[x]$ -beli 4-adfokú polinomot, amelynek nincs gyöke $\mathbb{R}$ -ben, de nem irreducibilis.
- Hf7.** Melyek irreducibilisek $\mathbb{Q}[x]$ -ben az alábbi polinomok közül?
- a) $x^2 + x + 1$ b) $3x^5 - 6x^3 + 2x - 2$ c) $x^4 + 4$ d) $x^5 + 4$
- Hf8.** Egy $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom primitív polinom, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1. Igazoljuk, hogy primitív polinomok szorzata primitív polinom.
- Hf9.** Igazoljuk az előző feladat felhasználásával, hogy amennyiben $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom $\mathbb{Z}[x]$ -ben irreducibilis, akkor $\mathbb{Q}[x]$ -ben is irreducibilis,