

1. Keressük meg az összes másodfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$ -ben és $\mathbb{Z}_3$ -ban.
2. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}[x]$ -ben a $\mathbb{Z}_2$ és/vagy $\mathbb{Z}_3$ fölötti felbonthatóságának vizsgálatával.
 - a) $x^4 - 5x^3 + 2x + 1$; b) $x^4 - 2x^3 + 2x + 1$; c) $3x^5 + x^2 - 2x + 3$; d) $x^4 + x^3 + x + 2$.
3. Legyen $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.
 - a) Bontsuk fel $f(x)$ -et irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ fölött!
 - b) Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött!
 - c) Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ reducibilis $GF(2)$, $GF(3)$ és $GF(5)$ fölött!
 - d)* Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ reducibilis $GF(p)$ fölött minden p prímre.
4. Van-e olyan polinom $\mathbb{Q}[x]$ -ben, amelynek nem minden együtthatója egész, mégis egész értéket vesz föl minden egész helyen?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor $a - b \mid f(a) - f(b)$.
6. Van-e olyan egész együtthatós f polinom, amely az 1, 2, -1 helyeken az alábbi értékeket veszi föl?
 - a) $f(1) = 3$, $f(2) = 10$, és $f(-1) = 7$;
 - b) $f(1) = 3$, $f(2) = 10$, és $f(-1) = 2$.
7. Tegyük föl, hogy az $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom 4-edfokú, 1 főegyütthatós, és $f(1) = 10$, $f(2) = 20$, $f(3) = 30$. Mennyi lehet $f(0) + f(4)$?
8. Legyenek a , b és c az $2x^3 - x^2 + 3x + 6$ polinom három gyöke $\mathbb{C}$ -ben. Határozzuk meg az abc , $a^3 + b^3 + c^3$ és $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ kifejezések értékét.
9. Az $x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ polinom gyökei α , β és γ . Adjuk meg azt a harmadfokú, 1 főegyütthatós polinomot, amelynek gyökei $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ és $\beta + \gamma$.
10. Hány megoldása van azoknak az egyenletrendszereknek a valós számok körében, amelyeknek a bővített mátrixa a következő redukált lépcsős alakra hozható? Amelyiknek több megoldása is van, annak adjuk meg legalább három különböző megoldását!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$
11. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

a) $x + 2y - z = 2$ $3x - y + 2z = 7$ $x - z = -2$ $2x + y + z = 7$	b) $x + y + z = 4$ $-x + y - z = 2$ $2x + y + 2z = 1$ $4x + 4y + 4z = 1$	c) $x + y + z = 1$ $y + z + u = 2$ $z + u + x = -1$ $u + x + y = 4$
--	---	--
- Hf10. Bontsuk föl az $x^5 + 6x^3 + 2x^2 - 4x - 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_3[x]$ -ben.
- Hf11. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ harmadfokú polinom, és $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ olyan másodfokú, amely az $a, b, c \in \mathbb{Z}$ különböző helyeken az $f(x)$ -szel megegyező értéket vesz föl. Bizonyítsuk be, hogy $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
- Hf12. Legyenek a , b és c az $x^3 + 2x^2 - 5$ polinom gyökei. Számítsuk ki $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ értékét!