

1. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldásokat ezekben az esetekben!

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3\end{aligned}$$

2. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.
- a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrendszernek létezik megoldása.
 - b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.
 - c) Ha $k < n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.
 - d) Ha $k > n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
 - e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.
 - f) Ha bármely $k - 1$ egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor az eredetinek is létezik megoldása.

3. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A + A, \quad A + B, \quad AB, \quad AC, \quad AC + 2C, \quad AD - 3D, \quad D^2, \quad BC, \quad CB.$$

4. Tetszőleges $n > 1$ -re adjunk meg olyan $n \times n$ -es A és B valós mátrixokat, melyekre $AB = 0$, és $BA \neq 0$.
5. Keressünk olyan A, B, C, D valós négyzetes mátrixokat, melyekre:
- a) $A^2 = I$ és $A \neq \pm I$;
 - b) $B^2 = 0$ és $B \neq 0$;
 - c) $D^2 = D$ és $D \neq 0, I$.
6. Keressünk olyan $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixot, hogy minden $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixra
- a) XA harmadik oszlopa az X első oszlopának 2-szerese, és XA többi eleme 0;
 - b) XA oszlopai megegyeznek az X oszlopaival, de 2., 3., 1. sorrendben;
 - c) AX első sora az X első és második sorának összege, a többi sora pedig megegyezik X megfelelő soraival.

Hf13. Oldjuk meg a valós számok körében az $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 + x_3 = 1$, $\dots$, $x_n + x_1 = 1$ egyenletrendszert.

Hf14. Keressünk olyan $a \in \mathbb{R}$ számot, hogy az $(3, 1, 0, 3)$ vektor lineáris kombinációja legyen az $(1, -2, 1, 0)$, $(0, a, 2, -1)$ és $(1, 2, -4, 4)$ és vektoroknak.

Hf15. Keressünk olyan C valós négyzetes mátrixot, amelyre $C^3 = 0$ és $C^2 \neq 0$.