

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, amelyeknek létezik.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i+1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

a) 1, 2, 3, 4; b) 2, 4, 3, 1; c) $n, n-1, \dots, 1$.

3. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2i+2 & 2i-3 & i \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat! A mátrixok $n \times n$ -esek; a nem jelzett elemek értéke 0; a, b, c paraméterek.

a) $A[i, i] = 1$

b) $A[i, i] = c$

c) $A[i, i] = A[i, i+1] = A[n, 1] = 1, n = 2k$

d) $A[i, j] = i + j - 1$

e) $A[i, j] = (i + j - 1)^2$

f) $A[i, j] = \min\{i, j\}$

g) $A[i, j] = \binom{i+j-1}{i-1}$

h) $A[i, i] = 2, A[i, j] = 1$

i) $A[i, i] = a, A[i, j] = b$

k) $A[i, j : i + j \leq n + 1] = A[n, n] = 1$

j) $A[i, j] = |i - j|$

m) $A[i, i-1] = A[i, i+1] = -1, A[i, i] = 1$ l) $A[i, i-1] = A[i, i+1] = 1, A[i, i] = 2$

Hf16. Oldjuk meg az $AX = B$ mátrixegyenletet, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hf17. Mi egy $n \times n$ -es mátrix ($n \geq 3$) determinánsának az értéke, ha a mátrix minden sora számtani sorozat?

Hf18. Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$