

Lineáris algebra 2007/2008 őszi 7. gyakorlat

1. Legyen az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy megoldása $\mathbf{x}'$. Bizonyítsuk be, hogy az összes megoldást az $\mathbf{x}' + \mathbf{x}^*$ képlettel kapjuk, ahol $\mathbf{x}^*$ végigfut az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer összes megoldásán.
2. Igaz-e a következő állítás: Ha $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{100}$ lineárisan összefüggő, akkor $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{100}$ is lineárisan összefüggő. (Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!)
3. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lineárisan független, de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}$ is, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}$ is, és $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}$ is lineárisan összefüggőek. Határozzuk meg az $\mathbf{u}$ vektort.
4. Igazoljuk, hogy ha az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ vektorok között *pontosan* egy van, amely lineárisan függ a többi $m - 1$ -től, akkor ez szükségképpen a nullvektor.
5. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárisan független vektorok! Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - c\mathbf{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek!
6. Az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek egy bázisát alkotják a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok. Legyen

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n \\ &\dots \\ \mathbf{b}_n &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha \mathbf{v}_n\end{aligned}$$

Az α paraméter mely valós értékeire lesz $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ szintén bázisa az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek?