

## Lineáris algebra 2007/2008 ősz

### 8. gyakorlat

1. Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

- (a) az  $\mathbb{R}^2$  sík tükrözése az  $x = 2$  egyenesre;
- (b)  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ahol  $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$ ;
- (c) az a leképezés, amely minden  $\mathbb{R}^2$ -beli vektorhoz a hosszát rendeli;
- (d) a  $2 \times 2$ -es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;
- (e) egy adott  $a + bi$  komplex számmal való szorzás a  $\mathbb{C}$ -n mint  $\mathbb{R}$  fölötti vektortéren;
- (f) a sík  $\alpha$  szögű elforgatása az origó körül.

2. Határozzuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:

- (a) az  $x \mapsto Ax$ , ahol  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$ ;
- (b)  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , amelyre  $\varphi(1, 2, 1) = (0, 2, 1)$ ,  $\varphi(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ , a standard bázisban;
- (c)  $p(x) \mapsto p'(x)$  a legfőbb másodfokú valós polinomok terén, a standard  $\{1, x, x^2\}$  bázisban;
- (d)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(x, y) = (x + y, y, x)$ ,  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (2, 0)\}$ ,  $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  bázispárban;
- (e) az  $x - 2y + z = 0$  síkra való merőleges vetítés standard bázisban.

3. Keressünk olyan  $f$  lineáris transzformációt az  $\mathbb{R}^3$  vektortéren, amelyre

- (a)  $0 \neq \text{Ker } f \subseteq \text{Im } f$ ;
- (b)  $\text{Ker } f$  1 dimenziós, és  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ ;
- (c)  $\text{Im } f$  2 dimenziós, és  $f$  az  $\text{Im } f$  minden vektorát önmagába viszi;
- (d)  $f^3 = 0$ , de  $f^2 \neq 0$  (ahol a szorzás a kompozíciót jelenti).

4. Igazoljuk, hogy amennyiben egy mátrix sorai és oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor a mátrix négyzetes.

5. Számítsuk ki a következő mátrixok rangját. Adjunk meg annyi független sort, és annyi független oszlopot, mint amennyi a mátrix rangja!

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{pmatrix}$  (d)  $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

6. Válasszunk ki  $\mathbb{R}^4$   $\{(1, 1, -1, 0), (2, 1, 3, 2), (0, -1, 5, 2), (-2, -2, 2, 0), (1, 1, 2, 2), (0, 1, 0, 1)\}$  generátorrendszeréből egy bázist.

Hf 19. Számítsuk ki az  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$  leképezés mátrixának a rangját! Hány dimenziós  $f$  képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!

Hf 20. Írjuk fel az  $\mathbb{R}^3$  vektortéren a  $3x - 2y + z = 0$  síkra való tükrözés mátrixát a standard bázisban.

Hf 21. Adjuk meg a fenti mátrixot az  $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (2, 0, 3)$  bázisban.