

Lineáris algebra 2007/2008 ősz

9. gyakorlat

1. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = 0$ pontosan akkor, ha A -nak 0 sajátértéke. Mutassuk meg, hogy amennyiben A invertálható, akkor A^{-1} sajátértékei éppen A sajátértékeinek reciprokai.
2. Egy F test feletti négyzetes A mátrixra $A = A^3$. Bizonyítsuk be, hogy A -nak van sajátvektora, és sajátértékei csak a $-1, 0, 1$ lehetnek.
3. Adjuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Van-e az $\mathbb{R}^2$ vektortéren olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? És $\mathbb{R}^3$ -ben?
 5. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ az A lineáris transzformáció olyan sajátvektorai, amelyekhez csupa különböző sajátérték tartozik. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineárisan független!
 6. Tegyük fel, hogy $AB = BA$ komplex elemű mátrixok. Mutassuk meg, hogy ekkor A sajátalterei invariáns alterei B -nek.
- Hf 22. Legyen A olyan mátrix, amely rangja r és a „bal felső” $r \times r$ -es részmátrixának (tehát amelyet az első r sor és első r oszlop ad meg) determinánsa nem nulla. Igazoljuk, hogy A első r sora lineárisan független, és ugyanez igaz az első r oszlopra.
(+10 pontért: Igazoljuk a megfordítást is: ha A rangja r , A első r sora lineárisan független, és A első r oszlopa szintén, akkor a bal felső $r \times r$ -es részmátrix determinánsa nem nulla.)
- Hf 23. Keressük meg az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x - 4y - 2z, 4y + z, -4y)$ lineáris transzformáció sajátvektorait és sajátértékeit.
- Hf 24. Tegyük fel, hogy egy A 5×5 -ös valós elemű mátrixra létezik olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ nemnulla vektor, amelyre $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v}$, $A^2\mathbf{v}$ és $A^3\mathbf{v}$ lineárisan összefüggőek. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^5$ -nek van nemtriviális, A -ra invariáns altere.