

Lineáris algebra 2007/2008 ősz

10. gyakorlat

1. Számoljuk ki a J mátrix k -adik hatványát, ahol k pozitív egész és

$$(a) J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad (b) J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Van-e olyan 3×3 -as mátrix $\mathbb{Q}$ fölött, amelynek minimálpolinomja

(a) $x^2 + x$;

(b) $x^2 - 2$?

3. Tegyük föl, hogy egy A mátrixra teljesül $A^m = I$ valamilyen $m \geq 1$ esetén. Igazoljuk, hogy A diagonalizálható!
4. Mutassuk meg, hogy előfordulhat, hogy két mátrix nem hasonló, de karakterisztikus és minimálpolinomjaik megegyeznek. Bizonyítsuk be, hogy 3×3 -as mátrixra nincs ilyen ellenpélda.
5. Mi az alábbi A mátrixok J Jordan-féle normálalakja? Számoljuk ki A^{100} értékét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hf 25. Legyen $A^k = 0$ (azaz A nilpotens mátrix). Mi lehet A karakterisztikus és minimálpolinomja?

Hf 26. Adjuk meg a Jordan-féle normálalakját az alábbi mátrixnak.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Hf 27. Határozzuk meg az előbbi A esetén az A^k mátrixot.