

Lineáris algebra 2007/2008 ősz

11. gyakorlat

- Legyen $V = \mathbb{R}^5$ a szokásos skalárszorzzattal és U azon vektorok halmaza, amelyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével.
 - Adjunk meg U -ban egy ortonormált bázist.
 - Határozzuk meg $U^\perp$ elemeit.
 - Írjuk fel az $(1, 0, 0, 0, 0)$ vektort egy U és $U^\perp$ -beli vektor összegeként.
- Legyen a $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ szimmetrikus bilineáris függvény mátrixa $\mathbb{R}^3$ standard bázisában

$$(a) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Keressünk a φ által megadott skaláris szorzásra nézve ortonormált bázist. Írjuk fel az új bázisban φ mátrixát.

- Bizonyítsuk be, hogy ha egy V valós vektortérben valamely $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ bilineáris függvény által definiált skaláris szorzásra $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormált vektorrendszer, akkor $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ lineárisan független. Mutassuk meg, hogy ha $\dim V = n$ is teljesül, akkor $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ kvadratikus alak pozitív definit.
- Adjuk meg az alábbi valós kvadratikus alakokhoz tartozó szimmetrikus bilineáris függvényeket. Határozzuk meg a jellegüket (pozitív definit, pozitív szemidefinit, stb).
 - $x_1^2 + x_1x_2$
 - $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$