

Lineáris algebra 2. ZH

2007 december 13.

1. Legyen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges nemnulla vektor. Adjuk meg az $\mathbf{u}$ irányvektorú egyenesre való merőleges vetítés mátrixát.
2. Legyen $k \geq 2$ egész szám és A a V (véges dimenziós) vektortér egy lineáris transzformációja. Igazoljuk, hogy $\text{Ker}(A^k) = V$ akkor és csak akkor, ha $\text{Im}(A^{k-1}) \subseteq \text{Ker} A$.
3. Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} -7 & 6 & -21 \\ -9 & 8 & -21 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

4. Tegyük fel, hogy $a, b, c, d \in \{0, 1\}$. Határozzuk meg ezen paraméterek függvényében az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus és minimálpolinomját.

5. Keressünk ortonormált bázist az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix által $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$ módon meghatározott skaláris szorzásra nézve.

Munkaidő 100 perc.

A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér. A válaszokat indokolni kell!

Osztályozás: 0-15: 1, 16-22: 2, 23-28: 3, 29-34: 4, 35-50: 5.