

1. gyakorlat: Euklideszi algoritmus, Fibonacci-számok

1. Jelölje az n -edik Fibonacci-számot F_n , tehát $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $n \geq 2$ -re $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket:

- (a) $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
- (b) $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$
- (c) $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$

2. Van-e, olyan hárommal osztható Fibonacci-szám, amelyre a kettővel rákövetkező is osztható 3-mal?

- 3. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

4. Bizonyítsuk, hogy az euklideszi algoritmus Fibonacci-számokra a leglassabb, azaz ha $a \geq b$ legnagyobb közös osztóját keresve az algoritmus n maradékos osztást végez, akkor $a \geq F_{n+1}$. (Útmutatás: igazoljuk j -re vonatkozó indukcióval, hogy $0 \leq j \leq n$ esetén $a_{n-j} \geq F_{j+1}$, ahol az algoritmusban az

$$a_0 := a$$

$$a_1 := b$$

$$a_0 = a_1 q_1 + a_2$$

$$a_1 = a_2 q_2 + a_3$$

$$a_2 = a_3 q_3 + a_4$$

...

$$a_{n-1} = a_n q_n$$

jelöléseket használjuk.)

5. Határozzuk meg a $(693, 147)$ és a $(233, 377)$ legnagyobb közös osztókat és adjuk meg a $693x + 147y = (693, 147)$ egyenlet egy x, y egész megoldását.

6. Igazoljuk, hogy adott a, b és c egészek mellett az $ax + by = c$ diofantikus egyenlet pontosan akkor megoldható x, y -ra, ha $(a, b) \mid c$. Speciálisan tehát a és b pontosan akkor relatív prím, ha van olyan x és y , amire $ax + by = 1$.

- 7. Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$ esetén $6k + 5$ és $7k + 6$ relatív prímek!