

Számelmélet 2004/2005 ősz
2. gyakorlat: Oszthatóság, prímek

1. Mely pozitív egész n számokra prímszám

(a) $n^3 - n + 3$,

(b) $n^3 - 27$,

(c) $n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$?

2. Legyenek a és k egymánál nagyobb egészek. Igazoljuk, hogy

(a) ha $a^k - 1$ prím, akkor $a = 2$ és k prím;

(b) ha $a^k + 1$ prím, akkor k kettőhatvány.

A $2^p - 1$ alakú prímek a Mersenne-prímek, a $2^{2^n} + 1$ alakúak pedig a Fermat-prímek.

3. Tekintsük a páros számok körét! Mik a felbonthatatlanok és mik a prímek ebben a számkörben? Mely elemek írhatóak fel lényegében egyértelműen felbonthatatlan számok szorzataként?

4. Milyen n -ekre páratlan n osztóinak száma (azaz $d(n)$)?

- 5. Igazoljuk, hogy minden szám egyértelműen felírható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzataként, azaz minden n -hez létezik egyetlen m és k egész, amelyekre $n = m^2 k$ és k semmilyen 1-nél nagyobb négyzetszámmal nem osztható.

6. Legyen $(a, b) = 5$. Milyen értékeket vehet fel $(a + b, a - b)$ és milyeneket $(a + 2b, 4a - b)$?

- 7. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) $(a, b) = (a + b, ab)$

(b) $(a, b) = 1 \iff (a + b, ab) = 1$

(c) $(a, bc) = (a, b)(a, c)$

(d) $(a^3, b^3) = (a, b)^3$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha veszünk 501 darab 1 és 1000 közötti egész számot, akkor van közöttük olyan szám, ami osztható a választottak közül egy másikkal. Igaz-e ugyanez 500-ra is?