

3. gyakorlat

1. Bizonyítsuk be, hogy a , b és c egészekre pontosan akkor teljesül, hogy $c \mid ab$, ha léteznek a_1 és b_1 egészek, amelyekre $a_1 \mid a$, $b_1 \mid b$ és $c = a_1 b_1$. Mutassuk meg, hogy ha $(a, b) = 1$ és $c \mid ab$, akkor egyértelmű a_1 és b_1 .
2. Egy természetes szám *négyszetmentes*, ha nincs 1-től különböző négyzetszám az osztói között. Legyen n négyzetmentes osztóinak száma $A(n)$, a négyzetszám osztók száma $B(n)$, az összes osztók száma pedig $d(n)$. Igazoljuk, hogy $A(n)B(n) \geq d(n)$. Mikor áll fenn egyenlőség?
- 3. Egy kegyetlen várúr börtönének 400 szűk cellájában egy-egy rab sínylődik. A cellák ajtaján levő zár úgy működik, hogy egy elfordítás esetén nyílik, még egy elfordítás esetén ismét bezárul, stb. Jelenleg minden ajtó zárva van. A várúr a születésnapján elhatározza, hogy nagylelkű lesz, és megparancsolja az egyik őrnek, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát és utánaküld egy másik őrt, akit azzal bíz meg, hogy minden második záron fordítson egyet. Ezt követi a harmadik őr, aki minden harmadik záron változtat stb. Végül a négyszázadik őr a négyszázadik cella zárjának az állását módosítja. Azok a rabok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a várúr?
- 4. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan
 - (a) 31
 - (b) 33
 - (c) 32
 pozitív osztója van?
5. A 10^n osztói közül maximum hányat lehet kiválasztani úgy, hogy ezek közül semelyik se legyen osztója semelyik másik kiválasztottnak?
6. Mely pozitív egész n számok rendelkeznek a

$$\forall k \in \mathbb{N}^+ : n \mid k^2 \Rightarrow n \mid k$$

tulajdonsággal?

7. (*) Tekintsünk 5000 különböző pozitív egész számot, amelyek közül bármely tíznek ugyanaz a legkisebb közös többszöröse. Maximálisan hány szám lehet közöttük, amelyek páronként relatív prímek?
- 8. Igazoljuk, hogy ha s és t különböző természetes számok, a páros, akkor $(a^{2^s} + 1, a^{2^t} + 1) = 1$.
9. (*) Mutassuk meg, hogy $a > 1$, $n > 0$ és $k > 0$ egészekre

$$(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1.$$

10. (*) Igazoljuk, hogy minden pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely a tízes számrendszerben csupa 1 és 0 jegyből áll.