

Számelmélet 2004/2005 ősz
4. gyakorlat: Kongruenciák, Euler–Fermat-tétel

1. Hány 0-ra végződik $1516!$ a tizes számrendszerben?
2. Legyen $m > 1$ egész és tekintsük a következő állítást.
Ha $a, b \in \mathbb{Z}$ -re $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, akkor $a \equiv \pm b \pmod{m}$.
 - (a) Mutassuk meg, hogy amennyiben m prím, vagy egy prímszám kétszerese, de $m \neq 4$, akkor igaz az állítás!
 - (b) Adjunk ellenpéldát az állításra minden egyéb m esetén!
3. Mennyi $\varphi(8800)$?
4. Hány különböző n csúcsú csillagot lehet rajzolni a ceruza felemelése nélkül?
5. Számítsuk ki $11^{23} \pmod{9}$ -et és $39^{75} \pmod{7}$ -et!
6. Mi az utolsó két számjegye a 303^{404} -nek? És az utolsó két bináris jegye?
7. Mutassuk meg, hogy amennyiben $11 \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ valamely $a, b, c \in \mathbb{Z}$ számokra, akkor fennáll $11^{30} \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ is.
8. Relatív prím-e a $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?
9. (*) Adjunk a szita formula segítségével új bizonyítást a

$$\varphi(n) = n \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

összefüggésre, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ éppen n különböző prímosztói.

(Útmutatás: Legyen $A_j = \{a \in \mathbb{N}^+ : a \leq n, \text{ amelyre } p_j \mid a\}$. Mennyi $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^r A_j\right)$ elemszáma? Mit jelent, hogy $a \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^r A_j\right)$?)