

Számelmélet 2004/2005 ősz

9. gyakorlat: Vegyes

- 1. Keressük meg az

$$x^8 + x^4 + x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{250}$$

kongruencia összes megoldását! (Indokoljuk pontosan, hogy miért nincs több.)

- 2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p},$$

ha p páratlan prím.

- 3. Legyen $p \geq 3$ prím, $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ és $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ teljes maradékrendszerek modulo p . Igazoljuk, hogy $\{a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_p b_p\}$ nem lehet teljes maradékrendszer. (Útmutatás: Használjuk a Wilson-tételt.)
- 4. Legyen $F_n = 2^{2^n} + 1$ az n -edik Fermat-szám. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 2$ esetén F_n pontosan akkor prím, ha

$$5^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

(Útmutatás: Alkalmazzuk a Pepin-teszt gondolatmenetét.)