

Számelmélet 2004/2005 őszi
10. gyakorlat: Dirichlet-tétel, aszimptotikus
egyenlőség

- 1. Igazoljuk (a Dirichlet-tétel felhasználása nélkül), hogy végtelen sok $6k+5$ alakú prím van.
- 2. Hány olyan prímszám van, amely kettes számrendszerbeli alakja 111-re végződik?
- 3. Legyen u_n és v_n pozitív számokból álló két sorozat. Azt mondjuk, hogy u_n *aszimptotikusan egyenlő* v_n -nel, azaz $u_n \sim v_n$, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
 - (a) Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció (reflexív, szimmetrikus, tranzitív).
 - (b) Legyen c pozitív szám. Mely u_n sorozatokra teljesül $u_n \sim c$? Bonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ esetén $u_n \sim u_n + c$.
 - (c) Ha p_n az n -edik prímet jelöli, igazoljuk, hogy $p_n \sim n \log(n \log n)$. (Használjuk fel az előadáson tanult $p_n \sim n \log n$ összefüggést!)