

Számelmélet PZH

2004 december 17.

1. Oldjuk meg a

$$21x \equiv 1 \pmod{34}$$

$$7x \equiv 2 \pmod{19}$$

szimultán kongruenciarendszert.

2. Keressük meg az

$$x^5 - 23 \equiv 0 \pmod{27}$$

összes megoldását a Hensel-felemelés módszerével.

3. Igazoljuk, hogy 2 primitív gyök modulo 27, és számoljuk ki $\text{ind}_2 23$ értékét! Oldjuk meg ezek segítségével az $x^5 \equiv 23 \pmod{27}$ kongruenciát!

4. Megoldható-e az

$$x^2 \equiv 4806 \pmod{1601}$$

kongruencia?

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $m \geq 2$ összetett számra $\varphi(m) \mid m$, akkor m páros és m prímosztói csak 2 és 3 lehetnek.

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c egészekre $9 \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ esetén teljesül $9^{15} \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ is.

7. Legyen $m \geq 3$, és tegyük fel, hogy valamely k pozitív egész számra $a^k \equiv -1 \pmod{m}$. Bizonyítsuk be, hogy $o_m(a)$ páros.

Munkaidő 100 perc.

Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér. A válaszokat indokolni kell!

Osztályozás: 0-29: 1, 30-37: 2, 38-45: 3, 46-52: 4, 53-70: 5.