

Számelmélet ZH

2004 november 25.

1. Számoljuk ki a 132 239 és a 11 819 számok legnagyobb közös osztóját és adjuk meg a $132\,239x + 11\,819y = (132\,239, 11\,819)$ diofantikus egyenlet egy megoldását!

2. Melyik az a legkisebb pozitív a , amelyre

$$a \equiv 11^{11^{11}} \pmod{63} \quad (24)$$

teljesül?

3. Keressük meg az

$$x^{11} + x + 1 \equiv 0 \pmod{63} \quad (121)$$

kongruencia összes megoldását!

4. Mennyi 11 rendje modulo 63?

5. Legyen m páros, $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ és $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ teljes maradékrendszerek modulo m . Igazoljuk, hogy $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m\}$ nem lehet teljes maradékrendszer.

6. Legyen $n \geq 0$ és $F_n = 2^{2^n} + 1$ az n -edik Fermat-szám. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben F_n prím, akkor 15 nem lehet primitív gyök modulo F_n .

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $p \geq 3$ prím, $\{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(2p)}\}$ redukált maradékrendszer modulo $2p$, akkor

$$\prod_{i=1}^{\varphi(2p)} a_i \equiv -1 \pmod{2p}.$$

Munkaidő 100 perc.

Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér. A válaszokat indokolni kell!

Osztályozás: 0-29: 1, 30-37: 2, 38-45: 3, 46-52: 4, 53-70: 5.