

Számelmélet 2005/2006 ősz

1. gyakorlat: Fibonacci-számok, egészrész
függvény

1. Jelölje az n -edik Fibonacci-számot F_n , tehát $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $n \geq 2$ -re $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket:
 - (a) $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
 - (b) $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$
 - (c) $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$
2. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}$ páros szám, míg $(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}$ egy természetes szám $\sqrt{2}$ -szerese.
3. Van-e, olyan hárommal osztható Fibonacci-szám, amelyre a kettővel rákövetkező is osztható 3-mal?
4. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

- 5. Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-sorozat egy mértani sorozat sebességével nő, pontosabban van olyan pozitív τ szám, hogy minden $n \geq 2$ esetén $\tau^{n-2} \leq F_n < \tau^{n-1}$.
- 6. Mutassuk meg, hogy az 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, ... sorozat n -edik eleme $\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$.
- 7. Legyen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ az a függvény, melyre igaz, hogy a zongora n -edik fehér billentyűje az $f(n)$ -edik billentyű (adjuk a 0 sorszámot az egyik C billentyűnek, azaz $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 5, \dots, f(7) = 12, f(8) = 14, \dots$). Adjunk meg egy ilyen f függvényt az egészsrész függvény segítségével.

The diagram illustrates a 24-bit bus architecture. It consists of four identical 6-bit blocks connected in series. Each block has a 6-bit input bus at the bottom and a 6-bit output bus at the top. The input buses are labeled with even numbers from 0 to 22, and the output buses are labeled with odd numbers from 1 to 23. The blocks are connected such that the output of one block is the input of the next.