

Számelmélet 2005/2006 őszi

2. gyakorlat: Oszthatóság, legnagyobb közös osztó tulajdonságai

1. Mely pozitív egész n számokra prímszám

(a) $n^3 - n + 3$,

(b) $n^3 - 27$,

(c) $n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$?

2. Legyenek a és k egynél nagyobb egészek. Igazoljuk, hogy

(a) ha $a^k - 1$ prím, akkor $a = 2$ és k prím;

(b) ha $a^k + 1$ prím, akkor k kettőhatvány.

A $2^p - 1$ alakú prímek a Mersenne-prímek, a $2^{2^n} + 1$ alakúak pedig a Fermat-prímek.

3. Legyen $(a, b) = 5$. Milyen értékeket vehet fel $(a + b, a - b)$ és milyeneket $(a + 2b, 4a - b)$?

• 4. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) $(a, b) = (a + b, ab)$

(b) $(a, b) = 1 \iff (a + b, ab) = 1$

(c) $(a, bc) = (a, b)(a, c)$

(d) $(a^3, b^3) = (a, b)^3$

5. Bizonyítsuk, hogy az alábbi törtek semmilyen pozitív n egész esetén sem egyszerűsíthetők:

$$\frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 3}, \quad \frac{n! - 1}{(n+1)! - 1}.$$

• 6. Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$ esetén $6k + 5$ és $7k + 6$ relatív prímek!

• 7. Igazoljuk, hogy ha s és t különböző természetes számok, a páros, akkor $(a^{2^s} + 1, a^{2^t} + 1) = 1$.

8. (*) Mutassuk meg, hogy $a > 1$, $n > 0$ és $k > 0$ egészekre

$$(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1.$$

9. (*) Tekintsünk 5000 különböző pozitív egész számot, amelyek közül bármely tíznek ugyanaz a legkisebb közös többszöröse. Maximálisan hány szám lehet közöttük, amelyek páronként relatív prímek?