

Számelmélet 2005/2006 ősz

4. gyakorlat: Kongruenciák

1. Keressük meg az alábbi kongruenciák megoldásait!

- (a) $5x \equiv 2 \pmod{17}$;
- (b) $-6x \equiv 10 \pmod{27}$;
- (c) $32x \equiv 8 \pmod{34}$;
- (d) $18x \equiv 99 \pmod{323}$;
- (e) $555x \equiv 5555 \pmod{55555}$.

2. Legyen $b \in \mathbb{N}^+$ tizes számrendszerbeli felírása $a_n a_{n-1} \dots a_0$. Igazoljuk, hogy

- (a) $b \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{3}$;
- (b) $b \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{9}$;
- (c) $b \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

Adjunk hasonló szabályt a 4-gyel és a 7-tel való osztási maradék kiszámítására.

- 3. Bizonyítsuk be, hogy ha $m \mid a - b$, akkor $m^2 \mid a^m - b^m$.
- 4. Legyen $m > 1$ egész és tekintsük a következő állítást.
Ha $a, b \in \mathbb{Z}$ -re $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, akkor $a \equiv \pm b \pmod{m}$.
 - (a) Mutassuk meg, hogy amennyiben m prím, vagy egy prímszám kétszerese, de $m \neq 4$, akkor igaz az állítás!
- (b) Adjunk ellenpéldát az állításra minden egyéb m esetén!
- 5. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egész együtthatós nem konstans polinom. Bizonyítsuk be, hogy $p(n)$ nem lehet minden n természetes szám esetén prím.
- 6. Mi a 4^{4^4} szám számjegyei összegének a számjegyeinek az összegének a számjegyeinek az összegének a számjegyeinek az összege?