

Számelmélet 2005/2006 őszi 5. gyakorlat: Egészek kanonikus alakja

1. Hány 0-ra végződik $1516!$ a tízes számrendszerben?
- 2. Osztható-e 98-cal $\binom{98}{48}$?
3. Egy természetes szám *négyszetmentes*, ha nincs 1-től különböző négyzet-szám az osztói között. Legyen n négyzetmentes osztóinak száma $A(n)$, a négyzetszám osztók száma $B(n)$, az összes osztók száma pedig $d(n)$. Igazoljuk, hogy $A(n)B(n) \geq d(n)$. Mikor áll fenn egyenlőség?
- 4. Egy kegyetlen várúr börtönének 400 szűk cellájában egy-egy rab sínylődik. A cellák ajtaján levő zár úgy működik, hogy egy elfordítás esetén nyílik, még egy elfordítás esetén ismét bezárul, stb. Jelenleg minden ajtó zárva van. A várúr a születésnapján elhatározza, hogy nagylelkű lesz, és megpa-rancsolja az egyik őrneket, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát és utánaküld egy másik őrt, akit azzal bíz meg, hogy minden második záron fordítson egyet. Ezt követi a harmadik őrt, aki minden harmadik záron változtat stb. Végül a négyszázadik őrt a négyszázadik cella zárjának az állását módosítja. Azok a rabok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a várúr?
- 5. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan
 - (a) 31
 - (b) 33
 - (c) 32pozitív osztója van?
6. A 10^n osztói közül maximum hányat lehet kiválasztani úgy, hogy ezek közül semelyik se legyen osztója semelyik másik kiválasztottnak?
7. Mely pozitív egész n számok rendelkeznek a

$$\forall k \in \mathbb{N}^+ : n \mid k^2 \Rightarrow n \mid k$$

tulajdonsággal?