

Számelmélet 2005/2006 ősz
6. gyakorlat: Euler–Fermat-tétel

1. Mennyi $\varphi(8800)$?
- 2. Hány különböző n csúcsú csillagot lehet rajzolni a ceruza felemelése nélkül?
- 3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi(n^2) = \varphi(k^2)$, akkor $n = k$, de a $\varphi(n) = \varphi(k)$ feltételből nem következik $n = k$.
4. Számítsuk ki $11^{23} \bmod 9$ -et és $39^{75} \bmod 7$ -et!
- 5. Mi az utolsó két számjegye a 303^{404} -nek? És az utolsó két bináris jegye?
6. Mutassuk meg, hogy amennyiben $11 \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ valamely $a, b, c \in \mathbb{Z}$ számokra, akkor fennáll $11^{30} \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ is.
7. Relatív prím-e a $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?
8. Adjunk a szita formula segítségével új bizonyítást a

$$\varphi(n) = n \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

összefüggésre, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ éppen n különböző prímosztói.

(Útmutatás: Legyen $A_j = \{a \in \mathbb{N}^+ : a \leq n, \text{ amelyre } p_j \mid a\}$. Vizsgáljuk

az $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^r A_j\right)$ halmazt.)