

Számelmélet 2005/2006 ősz
7. gyakorlat: Kongruenciarendszerek és
polinomkongruenciák

1. Oldjuk meg a következő kongruenciarendszereket:

(a) $3x \equiv 4 \pmod{11}$, $11x \equiv 3 \pmod{15}$;

(b) $3x \equiv 4 \pmod{16}$, $11x \equiv 3 \pmod{14}$.

- 2. Egy 40 fős osztály tornaórán jelen levő tagjai akár kettesével, akár hármasával, akár ötösével állnak sorba, mindig egyvalaki lesz, aki egyedül marad. Hányan vannak ott az órán?

3. Mi a következő polinomkongruenciák megoldása?

(a) $2x^{20} + 3x + 4 \equiv 0 \pmod{176}$;

- (b) $2x^{91} + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{297}$.

4. Keressük meg az összes megoldását az $x^{20} + 3x + 4 \equiv 0 \pmod{176}$ kongruenciának.

5. Legyen p prím és jelölje az $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia (modulo p páronként különböző) megoldásainak számát r . Lássuk be, hogy

$$r \equiv - \sum_{a=1}^p f(a)^{p-1} \pmod{p}.$$

- 6. (a) Mutassunk példát olyan 1 főegyütthatós, egész együtthatós f polinomra, aminek f fokszámánál több gyöke van modulo 15.
(b) Lássuk be (az előbbi f segítségével), hogy $\mathbb{Z}_{15}[x]$ polinomgyűrűben nem egyértelmű minden polinom irreducibilis polinomokra bontása.