

Számelmélet ZH

2005 december 1.

1. Számoljuk ki a 11 413 és a 10 403 számok legnagyobb közös osztóját és adjuk meg a $11\,413x + 10\,403y = (11\,413, 10\,403)$ diofantikus egyenlet egy megoldását!

2. Keressük meg az

$$x^5 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \quad (27)$$

kongruencia összes megoldását!

3. Mennyi 13 rendje modulo 49?

4. Keressünk primitív gyököt modulo 50. Határozzuk meg az

$$x^{26} \equiv 31 \quad (50)$$

összes megoldását.

5. Adjuk meg azt a legkisebb z pozitív egész számot, amelyre

$$\sum_{a=1}^{17} (a^2 - 13)^{16} \equiv z \quad (17).$$

6. Határozzuk meg az összes olyan $m \geq 2$ egész számot, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\text{ha } a \in \mathbb{Z}, a \not\equiv 0 \pmod{m} \text{ akkor minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén } a^n \not\equiv 0 \pmod{m}.$$

7. Mutassuk meg, hogy $(m_1, m_2) = d$ esetén az $x \equiv c_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv c_2 \pmod{m_2}$ kongruenciarendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$. (Segítség: ha $c_1 \equiv c_2 \pmod{d}$, akkor mutassuk meg, hogy a $dy \equiv d \pmod{m_1}$, $dy \equiv 0 \pmod{m_2}$ rendszer megoldható és $x = y(c_1 - c_2) + c_2$ megoldása az eredeti kongruenciáknak.)

Munkaidő 100 perc.

Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér. A válaszokat indokolni kell!

Osztályozás: 0-29: 1, 30-37: 2, 38-45: 3, 46-52: 4, 53-70: 5.