Számelmélet 2006/2007 ősz
7. gyakorlat: Hensel-felemelés

1. Keressük meg az $5x^{22} \equiv 6 \ (7^2)$ kongruencia összes megoldását!
   (a) Oldjuk meg először $f(x) = 5x^{22} - 6 \equiv 0 \ (7)$-et.
   (b) Ha $f(x_1) \equiv 0 \ (7)$, számojuk ki $f(x_1) \mod 7^2$ értékét.
   (c) Az $f(x) \equiv 0 \ (7^2)$ megoldását $x_2 = x_1 + 7y$ alakban keressük, így
   $$0 \equiv f(x_2) = f(x_1 + 7y) \equiv f(x_1) + 7yf'(x_1) \quad (7^2).$$
2. Keressük meg az
   (a) $x^5 - 23 \equiv 0 \ (27)$;
   (b) $x^5 - 23 \equiv 0 \ (25)$;
   • (c) $x^{18} + 3x - 4 \equiv 0 \ (49)$;
   (d) $x^9 - x^8 + x + 3 \equiv 0 \ (100)$;
   • (e) $x^{11} + x + 1 \equiv 0 \ (363)$

   kongruenciák összes megoldását a Hensel-felemelés segítségével.
3. Tegyük fel, hogy p prím, $\alpha \geq 2$ egész és $f(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $f(x_1) \equiv 0 \ (p)$. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) amennyiben $f'(x_1) \not\equiv 0 \ (p)$, akkor modulo p^α egyetlen olyan x_α van, amelyre $f(x_\alpha) \equiv 0 \ (p^\alpha)$ és $x_\alpha \equiv x_1 \ (p)$;
   (b) amennyiben $f'(x_1) \equiv 0 \ (p)$, akkor az előbbi egyenlet megoldásainak száma osztható p-vel, azaz
   $$|\{x_\alpha \in \mathbb{Z} \ : \ f(x_\alpha) \equiv 0 \quad (p^\alpha), \ \ x_\alpha \equiv x_1 \quad (p) \quad \text{és } 0 \leq x_\alpha < p^\alpha\}|$$
   osztható p-vel.
4. • Mutassuk meg, hogy bármely n egész számhoz található három olyan egész, amelynek s négyzetösszegére $n \mid s$. (Használjuk a Chevalley-tételt.)
5. Mutassuk meg, hogy p prímre $2p-1$ egész számból mindig kiválasztható p olyan, amely összege osztható p-vel. (Az állítás p helyett tetszőleges n egészre is igaz, ez az Erdős–Ginzburg–Ziv-tétel.)