Számelmélet 2006/2007 ősz
12. gyakorlat: Négyzetösszeg probléma, számelméleti függvények

1. Tudjuk, hogy minden $4k+1$ alakú pozitív prím felírható két négyzetszám összegeként. Adjunk erre a tényre új bizonyítást a végtelen leszállás módszerével.

• 2. Igazoljuk, hogy n pozitív egész számra az alábbi két állítás ekvivalens.
   (a) $2n$ előáll három négyzetszám összegeként.
   (b) n előáll négy négyzetszám összegeként, úgy, hogy az összeadandók között van (legalább) két azonos.

Jelölje $\sigma(n)$ az n egész osztóinak összegét, δ az osztók száma, $\mu(n)$ pedig a Möbius-függvényt.

3. Legyen f multiplikatív számelméleti függvény. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész a, b-re

$$f(a) \cdot f(b) = f((a,b)) \cdot f([a,b]),$$

ahol (a,b) a legnagyobb közös osztója, $[a,b]$ a legkisebb közös többszöröse a és b számoknak.

• 4. Igazoljuk, hogy ha $2^p - 1$ (Mersenne-)prím, akkor $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ tökéletes szám, azaz

$$\sigma(n) = 2n.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy a $\sigma(n)$ függvény értékkészletéből végtelen sok természetes szám kimarad.

6. Milyen értéket vesz fel

$$g(n) = \sum_{k|100!} \mu(kn)?$$

7. Számoljuk ki a
   (a) $\sum\limits_{d|n} \mu(d)\sigma\left(\frac{n}{d}\right)$,
   (b) $\sum\limits_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\delta(d)$

   összegeket.

8. Adjuk meg $g(n)$ megfordítási függvényét, ha
   (a) $g(n) = c$ valamely $c \in \mathbb{C}$ számra;
   (b) $g(n) = \frac{(-1)^n+1}{2}$;

9. (a) Igazoljuk, hogy a modulo p primitív gyökök összege éppen $\mu(p-1)$-gyel kongruens modulo p. (Útmutatás: Legyen $S(n)$ a pontosan n-edrendű elemek összege, $T(n)$ pedig azon a elemek összege, amelyekre $a^n \equiv 1 \ (p)$. Mutassuk meg, hogy $T(n) = 0$, ha $n \neq 1$ és használjuk a Möbius-inverziós formulát.)

• (b) Bizonyítsuk be, hogy az n-edik komplex primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.