Számelmélet 2. pótZH
2006 december 18.

1. Mennyi a
$$\left(\frac{169}{65537}\right)$$
Legendre-jel étéke? (65537 prím, ezt nem kell ellenőrizni.)

2. Igazoljuk, hogy amennyiben $K_n = 5 \cdot 2^n + 1$ prím és $n \geq 2$, akkor
$$3^{5 \cdot 2^{n-1}} \equiv -1 \quad (K_n).$$
(+10 pontért: Bizonyítsuk be, hogy igaz a megfordítás is.)

3. Hány olyan prímszám van, amelynek tizes számrendszerben felírt alakja 432-re végződik?

4. Mutassuk meg, hogy 437 összetettségének a 2 Rabin–Miller-tanúja.

5. Keressük meg a $62\,465 = x^2 + y^2$ összes (lényegesen különböző) megoldását. (Segítség: $62\,465 = 5 \cdot 13 \cdot 31^2$)

6. Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2 + y^2 = n$ diofantikus egyenlet megoldható, ahol $(x, y) = 1$, akkor n nem osztható 4-gyel és n-nek nincs $4k+3$ alakú prímosztója.

7. Legyen $\Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$, ha n kanonikus alakja $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Igazoljuk, hogy
$$\sum_{d|n} \Omega(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ prímhatvány} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Munkaidő 100 perc.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.
Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér. A válaszokat indokolni kell!
Osztályozás: 0-29: 1, 30-37: 2, 38-45: 3, 46-52: 4, 53-: 5.