Számelmélet 2. ZH

2006 december 15.

1. Mennyi a

   $$\left(\frac{8182}{8191}\right)$$

   Legendre-jel étéke?

2. Tegyük fel, hogy $p \geq 3$. Igazoljuk, hogy amennyiben $M_p = 2^p - 1$ prím, akkor

   $$3^{2^{p-1}-1} \equiv -1 \quad (2^p - 1).$$

3. Legyenek a, b és c pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy ha $(a, b) = 1$, akkor van olyan k egész, amelyre $(a + bk, c) = 1$.
   (Segítség: Használjuk a Dirichlet-tételt!)
   (+5 pontért: Lássuk be, hogy az állítás akkor is igaz, ha $(a, b) = 1$ helyett csak $(a, b, c) = 1$-et tesszük fel.)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n összetett szám négyzetmentes és minden p prímosztójára teljesül $p - 1 \mid n - 1$, akkor n álprím.
   (+5 pontért: Igazoljuk a megfordítást is: Ha n álprím akkor négyzetmentes (ez volt gyakorlaton, nem kell újra bebizonyítani) és teljesül rá, hogy $p \mid n \Rightarrow p - 1 \mid n - 1$.)

5. Adjuk meg a $-5 + 21i$ felbontását Gauss-prímek szorzatára.

6. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben n felírható két négyzetszám összegeként és $n \not\equiv 2$ (4), akkor megoldható az

   $$n = x^2 + 4y^2$$

   diofantikus egyenlet.
   (+5 pontért: A megfordítás is igaz.)

7. Jelölje $\omega(n)$ az n különböző prímosztóinak számát. Igazoljuk, hogy

   $$\sum_{d \mid n} \omega(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ prím} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Munkaidő 100 perc.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.
Minden feladat hibátlan megoldása 10 pontot ér. A válaszokat indokolni kell!
Osztályozás: 0-29: 1, 30-37: 2, 38-45: 3, 46-52: 4, 53-: 5.