

Számelmélet 2009/2010 őszi

1. gyakorlat: Fibonacci-számok, teljes indukció

1. Jelölje az n -edik Fibonacci-számot F_n , tehát $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $n \geq 2$ -re $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket:

(a) $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$

(b) $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$

(c) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \leq F_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ (ha $n \geq 2$)

(d) $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$

(e) $F_n \mid F_{kn}$

2. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}$ páros szám, míg $(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}$ egy természetes szám $\sqrt{2}$ -szerese.

3. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

- 4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív természetes szám előáll különböző Fibonacci-számok összegeként. Plusz pontért: legrosszabb esetben n hány Fibonacci-szám összegeként áll elő?

5. Mutassuk meg, hogy az $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ sorozat n -edik eleme $\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$.

6. Igazoljuk, hogy minden n pozitív egészre

(a) $7 \mid 2^{3n+1} + 5$

(b) $196 \mid 147^n + 7^{3n-1}$

- (c) $11 \mid 5^{n+3} + 7^{2n+1}$

7. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre $2^n + 1$ osztható 3-mal.

- (*) 8. Bizonyítsuk be, hogy

$$F_n = \sum \left\{ \binom{\ell}{k} \mid 0 \leq k \leq \ell \text{ és } \ell + k = n \right\}.$$