

Számelmélet 2009/2010 őszi

2. gyakorlat: Euklideszi algoritmus, szorzattá alakítás

1. Határozzuk meg az $(1521, 372)$ és a $(233, 377)$ legnagyobb közös osztókat és adjuk meg az $1521x + 372y = (1521, 372)$, illetve a $233x + 377y = 1$ egyenletek egy-egy x, y egész megoldását.
- 2. Számoljuk ki a 132 239 és a 11 819 számok legnagyobb közös osztóját és adjuk meg a $132\,239x + 11\,819y = (132\,239, 11\,819)$ diofantikus egyenlet egy megoldását!
3. Igazoljuk, hogy adott a, b és c egészek mellett az $ax + by = c$ diofantikus egyenlet pontosan akkor megoldható x, y -ra, ha $(a, b) \mid c$. Speciálisan tehát a és b pontosan akkor relatív prím, ha van olyan x és y , amire $ax + by = 1$.
4. Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$ esetén $6k + 5$ és $7k + 6$ relatív prímek!
- (*) 5. Bizonyítsuk, hogy az euklideszi algoritmus Fibonacci-számokra a leglassabb, azaz ha $a \geq b$ legnagyobb közös osztóját keresve az algoritmus n maradékos osztást végez, akkor $a \geq F_{n+1}$. (Útmutatás: igazoljuk j -re vonatkozó indukcióval, hogy $0 \leq j \leq n$ esetén $a_{n-j} \geq F_{j+1}$, ahol az algoritmusban az
$$\begin{aligned} a_0 &:= a \\ a_1 &:= b \\ a_0 &= a_1q_1 + a_2 \\ a_1 &= a_2q_2 + a_3 \\ a_2 &= a_3q_3 + a_4 \\ &\dots \\ a_{n-1} &= a_nq_n \end{aligned}$$
jelöléseket használjuk.)
6. Legyen $(a, b) = 5$. Milyen értékeket vehet fel $(a + b, a - b)$ és milyeneket $(a + 2b, 4a - b)$?
7. Mely pozitív egész n számokra prímszám
 - (a) $n^3 - n + 3$,
 - (b) $n^3 - 27$,
 - (c) $n^8 + n^7 + n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$?
8. Legyenek a és k egynél nagyobb egészek. Igazoljuk, hogy
 - (a) ha $a^k - 1$ prím, akkor $a = 2$ és k prím;
 - (b) ha $a^k + 1$ prím, akkor k kettőhatvány.A $2^p - 1$ alakú prímek a Mersenne-prímek, a $2^{2^n} + 1$ alakúak pedig a Fermat-prímek.
- 9. Igazoljuk, hogy ha s és t különböző természetes számok, a páros, akkor $(a^{2^s} + 1, a^{2^t} + 1) = 1$.
10. Mutassuk meg, hogy $a > 1$, $n > 0$ és $k > 0$ egészekre
$$(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1.$$
- (*)11. Bizonyítsuk be, hogy ha veszünk 501 darab 1 és 1000 közötti egész számot, akkor van közöttük olyan szám, ami osztható a választottak közül egy másikkal. Igaz-e ugyanez 500-ra is?