

Számelmélet 2009/2010 őszi

3. gyakorlat: Egészek kanonikus alakja

1. Bizonyítsuk be, hogy a , b és c egészekre pontosan akkor teljesül, hogy $c \mid ab$, ha léteznek a_1 és b_1 egészek, amelyekre $a_1 \mid a$, $b_1 \mid b$ és $c = a_1 b_1$. Mutassuk meg, hogy ha $(a, b) = 1$ és $c \mid ab$, akkor egyértelmű a_1 és b_1 .
2. Milyen n -ekre páratlan n osztóinak száma (azaz $d(n)$)?
3. Egy természetes szám *négyszetmentes*, ha nincs 1-től különböző négyzetszám az osztói között. Legyen n négyzetmentes osztóinak száma $A(n)$, a négyzetszám osztók száma $B(n)$, az összes osztók száma pedig $d(n)$. Igazoljuk, hogy $A(n)B(n) \geq d(n)$. Mikor áll fenn egyenlőség?
4. Mely pozitív egész n számok rendelkeznek a

$$\forall k \in \mathbb{N}^+ : n \mid k^2 \Rightarrow n \mid k$$

tulajdonsággal?

- 5. Igazoljuk, hogy minden szám egyértelműen felírható egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzataként, azaz minden n -hez létezik egyetlen m és k egész, amelyekre $n = m^2 k$ és k semmilyen 1-nél nagyobb négyzetszámmal nem osztható.
- 6. Egy kegyetlen várúr börtönének 400 szűk cellájában egy-egy rab sínylődik. A cellák ajtaján levő zár úgy működik, hogy egy elfordítás esetén nyílik, még egy elfordítás esetén ismét bezárul, stb. Jelenleg minden ajtó zárva van. A várúr a születésnapján elhatározza, hogy nagylelkű lesz, és megparancsolja az egyik őrnök, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát és utánaküld egy másik őrt, akit azzal bíz meg, hogy minden második záron fordítson egyet. Ezt követi a harmadik őrt, aki minden harmadik záron változtat stb. Végül a négyszázadik őrt a négyszázadik cella zárjának az állását módosítja. Azok a rabok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a várúr?
- 7. Tekintsük a páros számok körét! Mik a felbonthatatlanok és mik a prímek ebben a számkörben? Mely elemek írhatóak fel lényegében egyértelműen felbonthatatlan számok szorzataként?
- 8. Hány 0-ra végződik $1516!$ a tizes számrendszerben?
- 9. Osztható-e 98-cal $\binom{98}{48}$?
- 10. Igazoljuk, hogy $\sqrt[5]{100}$ és $\log_6(18)$ irracionális.
- 11. A 10^n osztói közül maximum hányat lehet kiválasztani úgy, hogy ezek közül semelyik se legyen osztója semelyik másik kiválasztottnak?