

Számelmélet 2009/2010 ősz
4. gyakorlat: Kongruenciák, Euler–Fermat-tétel

1. Legyen $b \in \mathbb{N}^+$ tizes számrendszerbeli felírása $a_n a_{n-1} \dots a_0$. Igazoljuk, hogy

- (a) $b \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{3}$;
- (b) $b \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{9}$;
- (c) $b \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

Adjunk hasonló szabályt a 4-gyel és a 7-tel való osztási maradék kiszámítására.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $m \mid a - b$, akkor $m^2 \mid a^m - b^m$.

3. Mennyi $\varphi(8800)$?

- 4. Hány különböző n csúcsú csillagot lehet rajzolni a ceruza felemelése nélkül?

5. Számítsuk ki $11^{23} \pmod{9}$ -et és $39^{7^5} \pmod{7}$ -et!

- 6. Mi az utolsó két számjegye a $303^{404^{17}}$ -nek? És az utolsó két bináris jegye?

7. Mutassuk meg, hogy amennyiben $11 \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ valamely $a, b, c \in \mathbb{Z}$ számokra, akkor fennáll $11^{30} \mid a^{30} + b^{30} + c^{30}$ is.

8. Relatív prím-e a $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?

(*) 9. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egész együtthatós nem konstans polinom. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ nem lehet minden n természetes szám esetén prím.

(*)10. Mi a 4^{4^4} szám számjegyei összegének a számjegyeinek az összegének a számjegyeinek az összegének a számjegyeinek az összege?

11. Adjunk a szita formula segítségével új bizonyítást a

$$\varphi(n) = n \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

összefüggésre, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ éppen n különböző prímosztói.

(Útmutatás: Legyen $A_j = \{a \in \mathbb{N}^+ : a \leq n, \text{ amelyre } p_j \mid a\}$. Mennyi $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^r A_j\right)$

elemszáma? Mit jelent, hogy $a \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^r A_j\right)$?)