

Számelmélet 2009/2010 ősz

6. gyakorlat: Wilson-tétel

- 1. Legyen $m \geq 3$, és tegyük fel, hogy valamely k pozitív egész számra $a^k \equiv -1 \pmod{m}$. Bizonyítsuk be, hogy $\phi_m(a)$ páros.
- 2. Tegyük fel, hogy p egy $4k - 1$ alakú prím. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

- 3. Legyen $p \geq 3$ prím, $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ és $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ teljes maradékrendszerek modulo p . Igazoljuk, hogy $\{a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_p b_p\}$ nem lehet teljes maradékrendszer. (Útmutatás: Használjuk a Wilson-tételt.)
- 4. Bizonyítsuk be, hogy ha $p \geq 3$ prím, $\{a_1, a_2, \dots, a_{\phi(2p)}\}$ redukált maradékrendszer modulo $2p$, akkor

$$\prod_{i=1}^{\phi(2p)} a_i \equiv -1 \pmod{2p}.$$