

Számelmélet 2009/2010 ősz

9. gyakorlat: Fermat- és Mersenne-prímek, Dirichlet-tétel

1. (*Pepin-teszt*) Legyen $F_n = 2^{2^n} + 1$ az n -edik Fermat-szám. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 1$ esetén F_n pontosan akkor prím, ha

$$3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

- 2. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 2$ esetén F_n pontosan akkor prím, ha

$$5^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

3. Legyen $M_p = 2^p - 1$, ahol p prím. Bizonyítsuk be, hogy M_p pontosan akkor osztható $2p + 1$ -gyel, ha $2p + 1$ prím és $p \equiv 3 \pmod{4}$.

- (*) 4. A 8 és a 9, a 16 és a 17 szomszédos prímhatványok (a prímekeket is prímhatványoknak tekintjük). Jellemezzük az összes ilyen $n, n + 1$ számpárt.

5. Igazoljuk (a Dirichlet-tétel felhasználása nélkül), hogy végtelen sok $4k - 1$ alakú prím van.

6. Igazoljuk (a Dirichlet-tétel felhasználása nélkül), hogy végtelen sok $6k + 5$ alakú prím van.

- 7. Hány olyan prímszám van, amely kettes számrendszerbeli alakja 111-re végződik?

8. Legyen u_n és v_n pozitív számokból álló két sorozat. Azt mondjuk, hogy u_n *aszimptotikusan egyenlő* v_n -nel, azaz $u_n \sim v_n$, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

(a) Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció (reflexív, szimmetrikus, tranzitív).

(b) Legyen c pozitív szám. Mely u_n sorozatokra teljesül $u_n \sim c$? Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ esetén $u_n \sim u_n + c$.

(c) Ha p_n az n -edik prímet jelöli, igazoljuk, hogy $p_n \sim n \log(n \log n)$. (Használjuk fel az előadáson tanult $p_n \sim n \log n$ összefüggést!)