

Számelmélet 2009/2010 ősz
10. gyakorlat: Diofantikus egyenletek, Gauss-egészek

1. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi egyenleteket!
 - (a) $3x + 4y + 5z = 1$
 - (b) $6x + 20y + 9z = 2$
2. Melyek azok a Gauss-egészek amelyek oszthatók $1 + i$ -vel?
3. Számoljuk ki a $(13, 5 + i)$ legnagyobb közös osztót!
4. Soroljuk fel az „első néhány” Gauss-prímet! Kicsit pontosabban: az első néhány egész-prím felbontásában szereplő Gauss-prímek listáját kell megadnunk.
5. Határozzuk meg $13 + i$ kanonikus alakját!
- 6. Adjuk meg $136 - 17i$ felbontását Gauss-prímek szorzatára!
7. Hányféleképpen írható fel két négyzetszám összegeként a 65? És két négyzetszám különbségeként?
- 8. Keressük meg az $x^2 + y^2 = 1773593$ diofantikus egyenlet összes megoldását! (segítség: $1773593 = 17^3 \cdot 19^2$)
9. Bizonyítsuk be, hogy a egész szám pontosan akkor osztója b egésznek, ha a Gauss-egészek körében osztja a b -t. Igazoljuk, hogy a és b legnagyobb közös osztója az egészek körében egyben (egyik) legnagyobb közös osztója a Gauss-egészek körében is.
10. Azt mondjuk, hogy α és β Gauss-egészek *barátok*, ha relatív prímek, és egy (közönséges) egész szám pontosan akkor többszöröse α -nak, amikor β -nak. Bizonyítsuk be, hogy $a + bi$ -nek akkor és csak akkor van barátja, ha $(a, b) = 1$ és $a \not\equiv b \pmod{2}$.