

Számelmélet 2009/2010 ősz

11. gyakorlat: Számelméleti függvények

Jelölje $\sigma(n)$ az n pozitív egész osztóinak összegét, $\delta(n)$ az ilyen osztók számát, $\mu(n)$ pedig a Möbius-függvényt, azaz

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1 \\ 0, & \text{ha } n \text{ nem négyzetmentes} \\ (-1)^r, & \text{ha } n \text{ éppen } r \text{ különböző prímszám szorzata} \end{cases}$$

Tétel. [Möbius-inverziós formula] Ha f számelméleti függvény összegzési függvénye f^+ , akkor

$$f(n) = \sum_{d|n} f^+(d) \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

1. Legyen f multiplikatív számelméleti függvény. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész a, b -re

$$f(a) \cdot f(b) = f((a, b)) \cdot f([a, b]),$$

ahol (a, b) a legnagyobb közös osztója, $[a, b]$ a legkisebb közös többszöröse a és b számoknak.

- 2. Igazoljuk, hogy ha $2^p - 1$ (Mersenne-)prím, akkor $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ tökéletes szám, azaz

$$\sigma(n) = 2n.$$

3. Milyen értéket vesz fel

$$g(n) = \sum_{k|100!} \mu(kn)?$$

4. Számoljuk ki a

(a) $\sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right),$

(b) $\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \delta(d)$

összegeket.

5. Adjuk meg $g(n)$ megfordítási függvényét, ha

(a) $g(n) = c$ valamely $c \in \mathbb{C}$ számra;

(b) $g(n) = \frac{(-1)^n + 1}{2};$

6. (a) Igazoljuk, hogy a modulo p primitív gyökök összege éppen $\mu(p-1)$ -gyel kongruens modulo p . (Útmutatás: Legyen $S(n)$ a pontosan n -edrendű elemek összege, $T(n)$ pedig azon a elemek összege, amelyekre $a^n \equiv 1 \pmod{p}$. Mutassuk meg, hogy $T(n) = 0$, ha $n \neq 1$ és használjuk a Möbius-inverziós formulát.)
- (b) Bizonyítsuk be, hogy az n -edik komplex primitív egységgyökök összege $\mu(n)$.