Matematika A4, (Valszám), 2016.05.25

1.(a) Tapasztalatok szerint, valamely bíróságra kerülő személyek 60%-a bűnös, 40%-a ártatlan. Egy rossz hírű bíróról tudjuk, hogy ártatlanokat is elítél 0,3 valószínűséggel, bűnösöket pedig felment 0,25 valószínűséggel. Ha elítél valakit, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az illető ártatlan? (*nem kell numerikusan kiszámolni!*)

(b) (elmélet) Fogalmazza meg a valószínűség axiómáit relatív gyakoriságokra!

2.(a) Egyenletes eloszlás szerint (azaz terület arányosan) választunk egy (X, Y) véletlen pontot a $0 \leq x \leq 4$, $y \leq \frac{x}{2}$ háromszög tartományon. $M(Y)$=? (*az eredményt elég egyszeres integrálokkal megadni)*

(b) Egy kocka V térfogatát az egyik élének X értékéből számoljuk, mint az X^3 érték, ahol X eloszlásfüggvénye $F(x) = x^2$ ha $0 \leq x \leq 1$. Határozza meg V sűrűségfüggvényét!

3.(a) A következő adatokat mértük: $(3, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 2), (-1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, -1)$,
$(2, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$. Határozza meg és ábrázolja az $Y = 2$ értékhez tartozó feltételes tapasztalati valószínűség eloszlást, valamint adja meg összeg alakban a $\overline{cov}$ tapasztalati kovarianciát!

(b) (elmélet) Fogalmazza meg a nagy számok átlagra (várható értékre) vonatkozó erős törvényét arra az esetre, amikor az elméleti átlag (elméleti várható érték) nem létezik!

4.(a) Gyakorlásként, valaki n-szer szokott kosárra dobni. Sikeres dobásai számának 4 az átlaga, 8/3 varianciával. $n =$? (*készítsen modellt a feladatra*)

(b) (elmélet) Írja le képlettel a binomiális és Poisson eloszlás kapcsolatát!

5.(a) Sorozásnál a múlt században 100 főre 182 cm átlagos testmagasságot mértek. A mai átlagos testmagasság 180 cm. A szórás régen és most is 5 cm. Mondhatjuk-e ezután 90% biztonsággal, hogy a testmagasság *elméleti átlaga* az évek során megváltozott (akár felfelé, akár lefelé)? (a testmagasságra normális eloszlást tételezhetünk fel). Állítását részletezze!

(b) Kb. $0,05$ a valószínűsége annak, hogy egy zsák krumpli súlya az előírttól 50 dkg-al többel tér el. A súlyra normális eloszlást tételezünk fel. Határozza meg standardizálás és táblázat segítségével a súly szórását!

6.(a) (elmélet) n mérésünk van egy (X, Y) valószínűségi változóra. A mérési átlagok és szórások rendre: $\overline{x}_1 = 297, \overline{x}_2 = 310, s_1 = 6,5$ és $s_2 = 6,8$, továbbá $\overline{R} = -0,7$. Adja meg annak az egyenesnek egyenletét, amely a legkisebb négyzetek értelmében a legjobban közelíti a pontrendszert és becsülje az elkövetett hibát!

(b) Egy X élettartam exponenciális eloszlásúnak tekinthető 2 paraméterrel. Milyen konkrét értékkel tippelne X értékére, ha az abszolút hibát kívánjuk minimalizálni?

MEGOLDÁSOK

1. (a) $P(A \mid I) = \frac{P(A) \cdot P(I|A)}{P(B) \cdot P(I|B) + P(A) \cdot P(I|A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}6 \cdot 0{,}75 + 0{,}4 \cdot 0{,}3}$

(b) (i) $0 \leq \frac{k_A}{n} \leq 1$
(ii) $\frac{k_\Omega}{n} = 1$ és $\frac{k_\varnothing}{n} = 0$
(iii) $\frac{k_{A \cup B}}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}$ ha $A \cap B = \varnothing$

2(a) $h(x,y) = \frac{1}{ter(háromszög)} = \frac{1}{4}$

1. megoldás

$$M(y) = \iint\limits_{háromszög} y\ h(x,y)dxdy = \int_0^4 \left(\int_0^{x/2} y \cdot \tfrac{1}{4}dy\right)dx = \int_0^4 \frac{x^2}{32}dx = \frac{2}{3}$$

2. megoldás

$Y-$nak $g(y)$ sűrűségfüggvényére:

$$g(y) = \int_{2y}^{4} h(x,y)dx = 1 - \tfrac{y}{2},\ 0 \leq y \leq 2$$

$$M(y) = \int_0^2 y\ g(y)dy = \int_0^2 y\ (1 - \tfrac{y}{2})dy = \frac{2}{3}$$

(vigyázni kell, hogy a két megoldást és például az egyszeres és kétszeres integrálokat ne keverjük)

(b) A $t(x)$ transzformáló függvény $t(x) = x^3$

1. megoldás

A transzformált $G(y)$ eloszlás függvényére: $G(y) = F(t^{-1}(y))$, mivel $t(x)$ monoton nő.

Tehát $G(y) = x^2_{x=\sqrt[3]{y}} = y^{\frac{2}{3}}$,$0 \leq y \leq 1$, azaz $g(y) = G'(y) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$

2. megoldás

Az $f(x)$ sűrűségfüggvény: $F'(x) = 2x$

A transzformált $g(y)$ sűrűségfügvényére:

$g(y) = f(t^{-1}(y)) \cdot (t^{-1}(y))'$

$= 2x_{x=\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$,$0 \leq y \leq 1$

3. (a) Az eloszlás a -1, 0 és 2 értékekre koncentrálódik.

A relatív gyakoriságok rendre: $\frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ és $\frac{3}{6}$.

$\overline{x} = \frac{10}{9}, \overline{y} = \frac{16}{9}$, így $\overline{cov} = \sum_{k=1}^{9}(X_i - \frac{10}{9})(Y_i - \frac{16}{9})$

(b) Ha MX nem létezik, akkor az $\frac{X1+X2+...Xn}{n}$ mintaátlagok sorozata 1 vsz.-gel divergens, ha $n \to \infty$

4. (a) Binomiális eloszlást alkalmazhatunk.
$M = np = 4$ és $Var = npq = 8/3$. Ebből az egyenlet rendszerből, $n = 12$.
(b) $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ _{|\lambda=np}$ ha n nagy és p kicsiny.
(*fontos a kapcsolat* λ, *valamint* n és p *között*)

5. (a) Egy $m = m_0$ típusú döntési feladatról van szó, ismert σ szórás mellett. A tanult döntési szabály:
$m_0 - u_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{x} \leq m_0 + u_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ahol $m_0 = 180, \overline{x} = 182, \sigma = 5, n = 100$, u_p-t pedig a $2\Phi(u_p) - 1 = 0,9$-ből számolhatjuk, innen $u_p = 1,65$. Mivel $\overline{x}$ nincs benne az adott intervallumban, ezért elvetjük a null hipotézist, azaz elfogadjuk, hogy a testmagasság átlaga megváltozott.
(*fontos hangsúlyozni, hogy döntési feladatról van szó*)
(b) A feltétel: $P(|X - m| > 50) = 0,05$. A standardizálás (osztunk σ-val): $P(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| > \frac{50}{\sigma}) = 0,05$. Itt tehát $\frac{X-m}{\sigma}$ standard normális, ezért komplementerre áttérve $P(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \leq \frac{50}{\sigma}) = 0,95 = 2\Phi(\frac{50}{\sigma}) - 1$. Innen $\Phi(\frac{50}{\sigma}) = 0,975$, azaz, $\frac{50}{\sigma} = 2$, $\sigma = 25$.
(*a feltétel nem* $X - m > 50$ *egyoldali volt*)

6. (a) Az egyenes a tapasztalati regressziós egyenes:
$\frac{y-\overline{y}}{s_2} = \overline{R} \cdot \frac{x-\overline{x}}{s_1}$ ahol $\overline{x} = 297, \overline{y} = 310, s_1 = 6,5, s_2 = 6,8, \overline{R} = -0,7$
A hiba $= s_2^2(1 - \overline{R}^2) = 6,8^2(1 - 0,7^2)$
(b) A Steiner tétel értelmében a mediánnal tippelünk. A μ mediánt például az $1 - e^{-2\mu} = 0,5$ egyenletből számolhatjuk, ahol $1 - e^{-2x}$ az eloszlásfüggvény. $\mu = \frac{\ln 2}{2}$.