MATEMATIKAI LOGIKA

FERENCZI MIKLÓS

MATEMATIKAI LOGIKA

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ
BUDAPEST

2. javított kiadás

Az első kiadást lektorálta:

Dr. Sági Gábor
Dr. Szőts Miklós

ISBN 978-963-16-2870-8
Azonosító szám: MK–1301101

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó Kft.
Felelős kiadó: Simon István ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Csík Zoltán
Műszaki szerkesztő: Haász Anikó
Tördelőszerkesztés és számítógépes grafika: Könyv Művek Bt.
Terjedelem: 32,18 (A/5) ív
e-mail: vevoszolg@muszakikiado.hu
www.muszakikiado.hu
Nyomta és kötötte: Érdi Rózsa Nyomda
Felelős vezető: Juhász László ügyvezető igazgató

TARTALOM

ELŐSZÓ 9

BEVEZETÉS 13

1. A matematika logikai alapjairól 13

2. A filozófiától az informatikáig 20

1. FEJEZET: AZ ELSŐRENDŰ LOGIKA NYELVE 29

1.1 A nyelv 31

A nyelv alapelemei – A formulákról – Indukció, rekurzió

2. FEJEZET: A LOGIKA HALMAZELMÉLETI FELÉPÍTÉSE 45

2.1 Struktúra, igazság, formalizálás 46

Struktúra – Igazság – Igazsághalmazok – Formalizálás

2.2 A logikai következmény fogalmáról 62

Logikai következmény és kapcsolatai – Érvényesség, logikai ekvivalencia

2.3 Normálformák 77

2.4 Redukciós tételek 86

Kompaktsági tétel – Herbrand-tétel és változatai – Herbrand-modellek, Löwenheim–Skolem-tétel

3. FEJEZET: A BIZONYÍTÁSELMÉLETRŐL 97

3.1 Alapfogalmak. A Hilbert-féle levezetési rendszer 102
Alapfogalmak – Elemi tételek – A teljességi tétel és következményei

3.2 Analitikus fák 120
A modellkeresési eljárásról – A kalkulusról – Alkalmazás és változatok. Az automatikus tételbizonyítókról

3.3 Rezolúció 142
Állításrezolúció – Alaprezolúció, helyettesítéses rezolúció – Elsőrendű rezolúció – Az eljárás alkalmazásairól és finomításairól

3.4 A logika korlátairól 164
Inkomplettség – Eldönthetetlenség – Kitekintés

3.5 A logikai programozásról 175
Logikai programozás definit klózokkal, SLD-rezolúció – Korrekt válasz probléma – Induktív definíciók. Kapcsolatok a hagyományos programozással és az adatbázisokkal

3.6 A lambda-kalkulusról 193
A lambda-kalkulus elemei

4. FEJEZET: MODELLELMÉLET 201

4.1 Nevezetes axiómarendszerek. Modellmódszer 203
Nevezetes axiómarendszerek – Modellmódszer

4.2 Standard és nemstandard modellek 210
Nemstandard modell fogalma, Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel – Rendezések, komplettség ellenőrzése

4.3 Modellkonstrukciók 223
Néhány modellkonstrukció – Ultrahatvány, ultraszorzat

4.4 Karakterizációs tételek 235

5. FEJEZET: KLASSZIKUS LOGIKÁK, MODÁLIS LOGIKA 245

5.1 Másodrendű logika 246

5.2 Többfajtájú logika 251

5.3 Modális logika 256
Szemantika – Bizonyítási rendszer – A modális logika alkalmazásairól és általánosításairól

6. FEJEZET: LOGIKA ÉS A MATEMATIKA EGYÉB TERÜLETEI .. 267

6.1 Algebrai logika 268
Az állításlogika és az algebra kapcsolatáról – Az algebra és az elsőrendű logika kapcsolatáról, kitekintés

6.2 Bonyolultságelmélet és logika 283
Bonyolultsági osztályok jellemzése formalizálással – Bonyolultsági osztályok jellemzései logikai tárgyú problémákkal

6.3 A nemstandard analízisről 295
Az elsőrendű logikai bevezetésről – A típuslogikai bevezetésről

6.4 A halmazelmélet alapjairól 307

FELADATOK 313

1. Az elsőrendű logika nyelve 315
2. A logika halmazelméleti felépítése 317
3. A bizonyításelméletről 328
4. Modellelmélet 335
5. Klasszikus logikák, modális logika 341
6. Logika és a matematika egyéb területei 344

TÁRGYMUTATÓ 349

ELŐSZÓ

A logika ősrégi tudomány, története az ókorig vezethető vissza. A logikát sokáig a filozófia részének tekintették, e vonatkozásban csak a 19. század végén történt jelentős fordulat, amikor is megtörtént a logika egy jelentős szeletének (elsőrendű logikának) a matematizálása, és ezzel egy új tudományág jött létre, a **matematikai logika**. A 20. század elején a matematika megalapozásában bekövetkezett jelentős előrelépés (melyre röviden, mint a „matematika forradalmára” szokás utalni) elsősorban a matematika ezen új ágához köthető, sőt **az új tudomány a század egész matematikájára nagy hatással volt**. A bevezetésben a párhuzamossági axióma problémájának vázolásán keresztül áttekintést adunk a matematikai logika legfontosabb fogalmairól, valamint történetéről.

A 20. század utolsó évtizedeiben jelentős *fordulat* következett be a matematikai logika szerepét illetően. A számítástudomány megjelenésével a logika egy újabb rétege került előtérbe: gyakorlati *alkalmazhatósága*. A matematikai logika, létrejöttétől fogva, alapvető szerepet játszott a matematika megalapozásánál és a matematika filozófiai problémáinak megvilágításánál, de a század végén egyszeriben **alkalmazott tudománnyá is vált**, sőt rendkívül széleskörű informatikai alkalmazhatósága miatt fokozatosan az elméleti számítástudomány egyfajta „*általános nyelve*” lett. Az „informatika forradalmával” összefüggésben számos módszere és fogalma került az alkalmazók figyelmének középpontjába, ilyenek például a szintaktika, szemantika, modell, kiszámíthatóság, bizonyítás stb. fogalmak. A matematikai logika ma már szerves része a következő tudományterületeknek: *mesterséges intelligencia* (például kísérletek tervezése), *programozáselmélet* (például gépi bizonyítások, programspecifikáció, programverifikáció, logikai programozás), *adatbázis-elmélet* (például deduktív adatbázisok), *matematikai nyelvészet* (például formális nyelvek), *elméleti fizika* (kvantumlogika, relativitáselmélet). Ezzel párhuzamosan egy másik tendencia is megfigyelhető, az, hogy a matematikai logika **módszerei egyre nagyobb teret nyernek a matematikán belül** is, például a következő területeken: *nemstandard analízis*, *algebrai logika*, *algoritmuselmélet* (kiszámíthatóságelmélet), *halmazelmélet* stb. (ez utóbbi tendenciáról ad képet a könyv 6. fejezete).

A matematikai logika szerepének változását az oktatás nehézkesen követi, ennek jele, hogy sok esetben több évtizede kiadott tankönyveket használunk. Bár e tankönyvek keletkezésükkor igen korszerűek voltak, azonban azóta számos új fejezet jelent meg a logikában, a többi fejezetet illetően a hangsúlyok pedig eltolódtak. Jelen könyv megírásához az alapot a Budapesti Műszaki Egyetem műszaki informatika, valamint matematikus szakán évek óta folyamatosan tartott matematikai logika előadásaim adták. Meggyőződhettem arról, hogy az informatikusoknak, matematikusoknak, mérnököknek, nyelvészeknek, egyéb alkalmazóknak igényük van magyar nyelvű, bevezető jellegű, az *alkalmazásokat* is szem előtt tartó korszerű egyetemi tankönyvre a témából, ennek megvalósítására tesz kísérletet e munka.

Jelen könyv terjedelmét a téma sokrétűsége mellett az is behatárolta, hogy törekedtem arra, hogy a könyv egy heti négy órás szemeszter anyagát tartalmazza, variációs lehetőségekkel. Hangsúlyt helyeztem arra, hogy a könyv **bőséges feladatanyagot** tartalmazzon. Egyrészt majdnem minden témakörnél számos megoldott *mintapélda* szerepel, általában az egyes részek végén, összegyűjtve. Másrészt a könyv végén („Feladatok”) egy kisebb **példatárat** találunk, amelyben szinte minden témakörhöz szerepelnek gyakorló feladatok. A könyv feldolgozásakor célszerű e feladatok közül számosat megoldani. A tankönyv olvasásához előismeretként csupán a *halmazelmélet alapfogalmainak* ismeretét (például halmazműveletek, számosságok stb.) és egy *bevezető algebraelőadás* anyagának ismeretét feltételezem (számfogalom, csoport, test stb.). Kivétel a 6. fejezet, ahol helyenként szükség van bizonyos egyéb alapfogalmak ismeretére is (például a bonyolultságelméleti alfejezetnél).

Jelen tankönyv csak **elméleti alapokat nyújt a különféle alkalmazásokhoz**, de magát az alkalmazásokat már nem tárgyalhatja, ez egy másik könyvnek lehet a feladata. *Van néhány olyan lényeges elméleti témakör, amelyek részletezésére terjedelmi okokból nem került sor*, ezek elsősorban azok a témakörök, amelyek más diszciplínáknak is alapjai és az Olvasó egyéb tanulmányaiban is szerezhet (vagy már szerzett) bizonyos jártasságot e területeken, ilyenek például a *nyelv* vagy a *kiszámíthatóságelmélet*. Szintén terjedelmi okokból nem bővíthettem az *5. „Klasszikus logikák, modális logika”* fejezetet, noha e fejezet a matematikai logika egy fontos és dinamikusan fejlődő ágát jelzi. Nem tárgyaltam külön-külön az állításlogikát és az elsőrendű logikát, mint az számos bevezető jellegű könyvnél szokásos, mert egyetlen szemeszter általában nem elegendő mindkét logika érdembeli tárgyalására.

E könyv feldolgozásának módja függhet attól, hogy a későbbi alkalmazások közül melyeket részesíti az Olvasó előnyben. Azonban **minden esetben feldolgozásra ajánlom** a könyv törzsét adó következő fejezeteket: 1. és 2. fejezetek, továbbá a 3.1, 3.2, 3.4, 4.1 alfejezetek. Az 1. fejezetet első olvasásnál talán elegendő átlapozni, és később, a benne szereplő fogalmak felhasználásainál visszatérni e fogalmakra. E fejezetre ugyan minden későbbi fejezet támaszkodik, de a sok új fogalom miatt olvasása kissé fárasztó. Az is célja lehet egy logikakurzusnak, hogy a *bizonyításelmélet* minél hamarabb kerüljön feldolgozásra. Ez esetben közvetlenül a 2.1 és 2.2 alfejezetek olvasása után ajánlom a 3.1 és 3.2 alfejezetek feldolgozását.

Köszönet illeti tanáraimat, *Ruzsa Imrét* és *Makkai Mihályt*, munkatársaimat, *Andréka Hajnalt* és *Németi Istvánt* azért, hogy a könyv létrejöhetett. Köszönöm a könyv lektorainak, *Sági Gábornak* és *Szőts Miklósnak* lelkiismeretes munkájukat és számos ötletüket, amelyeket e könyvbe beépítettem. Köszönöm a szerkesztő, *Halmos Mária* alapos munkáját és hasznos tanácsait. Köszönet illeti hallgatóimat is a Budapesti Műszaki Egyetem matematikus, valamint műszaki informatika szakán számos hasznos észrevételükért.

A könyvvel kapcsolatos bármilyen észrevételt a ferenczi@math.bme.hu e-mail címen örömmel fogadok.

A SZERZŐ

ELŐSZÓ AZ ÁTDOLGOZOTT KIADÁSHOZ

Több, mint tíz év telt el jelen kötet első kiadásának megjelenése óta. Azóta számos, a kötettel kapcsolatos észrevétel gyűlt össze. A mostani átdolgozás beépíti ezeket az észrevételeket a kötetbe. A meglévő fejezetek közül tartalmilag, jelentősebben csak a 6. fejezet, „A logika és a matematika egyéb területei” változott. Egy új alfejezettel is gazdagodott a könyv, a lambda kalkulust tárgyaló 3.6 fejezettel. Időközben megjelent a jelen kötet folytatásának tekinthető angol nyelvű e-könyv is a Typotex kiadó gondozásában: Ferenczi, M., Szőts, M., Mathematical Logic for Applications, 2011 (tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/22.pdf). Ez a könyv egyrészt, az általános logika elmélet keretében, absztraktabban tárgyal számos a jelen kötetben bevezetett fogalmat, másrészt, az alkalmazásokat nemcsak előkészíti, hanem részletezi is. A könyv MSc, vagy PhD hallgatóknak ajánlott. Várom az olvasó szíves észrevételeit mindkét kötetre vonatkozóan.

A SZERZŐ

BEVEZETÉS

1. A matematika logikai alapjairól (a geometria alapjairól és a párhuzamossági axiómáról)

• *Néhány matematikai paradoxon.* A geometria megalapozásának problémája, a párhuzamossági axióma problémája igen alkalmas arra, hogy rajta keresztül előzetesen ismertessük a matematikai logika néhány fontos fogalmát és alapkérdését. Először felsorolunk a metematika különböző területeiről néhány olyan paradoxont, amelyekben közös, hogy feldolgozásukhoz kézenfekvő a matematikai logikai megközelítés.

(i) A valós számok közé elhelyezhetők úgy további számok, hogy a bővítés megőrzi a valós számok legfontosabb tulajdonságait (működik a „permanenciaelv"), és a bővítés tartalmaz végtelen kicsiny mennyiségeket (tehát infinitezimálisokat), azaz például olyan pozitív számokat, amelyek bármely szokásos pozitív valós számnál kisebbek (Robinson).

(ii) Tekintsük az összes halmazok halmazát, jelölje ezt H. Ismert összefüggés, hogy bármely halmaz számossága kisebb hatványhalmaza számosságánál, azaz speciálisan H-ra $|H| < \left|2^H\right|$. Másrészt H definíciója miatt, H tartalmazza saját hatványhalmazát, tehát $2^H \subseteq H$, ezért $\left|2^H\right| \leq |H|$. E két, számosságokra vonatkozó egyenlőtlenség ellentmond egymásnak (Russell).

(iii) A matematika minden „elég erős" axiomatikus elméletében (például a halmazelméletben, az aritmetikában) van olyan állítás, hogy sem ő, sem a tagadása nem bizonyítható (Gödel).

(iv) Valaki azt mondja: „Én most hazudok". Igazat nem mondhat, mert akkor ellentmondásba kerülne önmagával. Ha viszont hazudik, akkor állítása nem igaz, vagyis igazat mond, szemben a feltevéssel. Tehát mindkét esetben ellentmondáshoz jutunk („hazug-paradoxon").

(v) Bármely egyeneshez és rajta kívül fekvő ponthoz végtelen sok olyan egyenes létezik a síkon, amelyik átmegy az adott ponton és az adott egyenessel párhuzamos, azaz nincs vele közös pontja (párhuzamossági axióma tagadása).

A könyv olvasása során érintjük e paradoxonokat, így (i)-et a 6.3 részben, (ii)-t (és részben (iv)-et) a 6.4 részben, (iii)-at a 3.4 részben. Az (v) paradoxont, a párhuzamossági axióma tagadásának problémáját kíséreljük meg itt, a bevezetésben megvilágítani.

• *A párhuzamossági axióma történetéről.* Az ókorban a logika és a matematika tudománya igen magas fejlettségi szintre jutott. Ennek egyik bizonyítéka, hogy axiomatikus felépítés született a geometriára, amely felépítés Eukleidésztől maradt ránk. Axiomatikus felépítésen azt értették, hogy bizonyos axiómákból tételeket vezettek le „logikai” úton. Az állítások megfogalmazásához a természetes nyelvet használták, tehát itt nem használtak „formalizálást”, a megfogalmazás ezért nem nélkülözte a nyelvi esetlegességeket. Eukleidész nem foglalkozott azon következtetési mechanizmussal sem, amelyet a levezetéseknél automatikusan használt, tehát a következtetéseket nem egy rögzített „bizonyítási rendszer” keretében végezte. Néhány példa euklideszi axiómákra:

„Minden pontból minden ponton át lehet egyenest húzni.”

„Minden középpontból és minden sugárral lehet kört rajzolni.”

„Ha két egyenest úgy metsz egy harmadik egyenes, hogy a metsző egyenes egyik oldalán keletkező belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor az első két egyenes metszi egymást.”

Ez utóbbi a híres *párhuzamossági axióma*, amelyről megmutatható, hogy ekvivalens a következővel: „Bármely egyeneshez, bármely rajta kívül fekvő ponton át legfeljebb egy olyan egyenes fektethető a síkon, amelynek az adott egyenessel nincs közös pontja.”

A párhuzamossági axiómára már az ókorban felfigyeltek, és egészen a 20. század elejéig izgalmas témája volt a kutatásoknak. Úgy gondolták, hogy összetettebb állítást tartalmaz, mint a többi axióma, és ezért talán igazolható a többiből. Azonban sem a direkt, sem az indirekt bizonyítási próbálkozások nem vezettek eredményre. A 19. században Bolyai, Gauss és Lobacsevszkij egymástól függetlenül jutottak arra az eredményre, hogy az axióma „független” a többi axiómától, tehát sem az axióma, sem a tagadása nem vezethető le a többi axiómából. Felépítettek egy olyan geometriát, a hiperbolikus geometriát, amelyben a párhuzamossági axióma *tagadása*, azaz egy szemlélettel összeegyeztethetetlennek tűnő állítás helyettesíti a párhuzamossági axiómát. A párhuzamossági axióma történetére a szakasz végén még visszatérünk.

• *A geometria logikai megalapozása, bizonyításelméleti alapja és a párhuzamossági axióma.* A geometria modern megalapozása Hilberttől származik. Először szabatosan újrafogalmazta az euklideszi geometria axiómáit, és kísérletet tett az axiómák

ellentmondástalanságának bizonyítására, azaz annak igazolására, hogy nem vezethető le az axiómákból egyidejűleg valamely állítás és tagadása egyszerre.
Később ennél lényegesen továbbment, egy olyan általános formális logikai rendszert használt (Hilbert-féle kalkulus az elsőrendű logikára), amely az „axiomatikus módszer" matematizálásának tekinthető. Bevezetett egy formális nyelvet, amelyen az axiómák és egyéb állítások „formalizálhatók", továbbá definiált *megengedett* logikai következtetési szabályokat és logikai alapigazságokat (logikai axiómákat), azaz definiált egy *bizonyítási rendszert*.

A geometria „formális nyelve" „*abc*"-jének például a következő tekinthető. Felveszünk olyan jeleket, amelyek a logikai apparátus miatt szükségesek, ezek: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ és $=$, valamint felveszünk változókat: $x_1, x_2, \ldots$ Felveszünk olyan úgynevezett alapjeleket (nemlogikai jeleket), amelyek már speciálisan a *geometriai* állítások megfogalmazásához szükségesek, ilyenek például: P, E, S, I stb. rendre 1, 1, 1, 2 stb. változós előre rögzítendő relációjelek, melyekkel rendre a „pont", „egyenes", „sík", „illeszkedik", stb. konkrét geometriai relációk asszociálhatók. Az „abc" megadása után definiálható az, hogy melyek az „abc"-ből készíthető *értelmes jelsorozatok* (azaz *formulák*), tehát definiálható a nyelv *szintaktikája*. Az így definiált nyelv már alkalmas arra, hogy segítségével megfogalmazzuk a geometria állításait, azaz „formalizáljuk" őket.
Példaképpen felsorolunk néhány formalizált Hilbert-féle axiómát:

$$\forall x \forall y (Px \wedge Py \rightarrow \exists z (Ez \wedge Ixz \wedge Iyz)), \tag{1}$$

$$\exists x \exists y \exists z \exists u (Px \wedge Py \wedge Pz \wedge Pu \wedge \neg \exists v (Sv \wedge Ixv \wedge Iyv \wedge Izv \wedge Iuv)), \tag{2}$$

$$\forall u \forall v (Eu \wedge Pv \wedge \neg Iuv \wedge \exists w (Ew \wedge Ivw \wedge Duw) \rightarrow \forall s (Es \wedge Ivs \wedge Dus \rightarrow w{=}s)), \tag{3}$$

ahol (3)-ban a Dxy a következő formulát rövidíti: $\neg \exists t (Pt \wedge Itx \wedge Ity)$ (diszjunktság). A fenti formulák „szándékolt jelentései" rendre: „Bármely két ponton át fektethető egyenes", „Van négy nem egy síkban fekvő pont" és „Bármely egyeneshez, bármely rajta kívül fekvő ponton át legfeljebb egy olyan egyenes fektethető, amelynek az adott egyenessel nincs közös pontja".

Hangsúlyozzuk, hogy egy *formális nyelvben* sem az „abc" jeleinek, sem a formuláknak *nincs jelentésük* (noha asszociálhatunk hozzájuk jelentést), tehát például értelmetlen arról beszélni, hogy egy axióma önmagában *helyes-e vagy sem*. A (3) állítást illetően pedig logikailag 3 eset lehetséges: (i) a (3) formulát bizonyítani tudjuk a többi axiómából, (ii) a formula tagadását tudjuk bizonyítani, (iii) egyiket sem tudjuk bizonyítani (ez a függetlenség esete). Tehát pusztán *logikai kérdés* az, hogy (3) független-e a többi axiómától, és a kérdésnek nincs köze a szemlélethez.

A formális nyelv és a bizonyítási rendszerek fogalmát megközelíthetjük a számítógépek oldaláról is. A formalizálás lehetővé teszi azt, hogy akár *számítógépre programozzuk* az axiómákat és a geometria formális nyelvén megfogalmazható egyéb állításokat. Sőt, magának a bizonyítási rendszernek, például a következtetési szabályoknak és a logikai axiómáknak a programozása után képes a számítógép az axiómákból tételeket szabadon generálni. Arra is képes a gép, hogy ismert tételekre vagy bármilyen geometriai állításra (vagy tagadására) *bizonyítást* próbáljon *keresni*. Mindez Hilbert képzeletét is megmozgatta, bár számítógépben természetesen nem, csak gépies eljárásban gondolkozhatott. Azonban az, hogy *a gép tetszőleges geometriai állítást eldöntsön* abban az értelemben, hogy megállapítsa, következménye-e az axiómáknak, vagy sem, függ attól, hogy milyen „erős” axiómarendszert választunk. A Hilbert-féle geometriai axiómák során még erre a döntésre is képes egy „ideális” gép. De mint látni fogjuk, ha egy olyan axiómarendszert választunk, amelyben a természetes számok és szokásos tulajdonságaik is „modellezhetők” (a matematikában a legtöbb axiómarendszer ilyen), akkor már általában nem képes döntésre a gép.

• *A geometria szemantikai megalapozása, a modellmódszer és a párhuzamossági axióma.* Még nyitva hagytuk a kérdést, hogy kicserélhető-e a párhuzamossági axióma a tagadásával úgy, hogy ellentmondástalan rendszert kapjunk, tehát *független-e* (3) a többi axiómától. E kérdés megválaszolásához fordítsuk figyelmünket a formális nyelv jeleinek és formuláinak lehetséges „*értelmezéseire*”, azaz a logikai *szemantikára*.

A formális nyelv alapjeleinek *„értelmezésén” (interpretációján) egy konkrét halmazon (alaphalmazon)* rendre hozzájuk rendelt *konkrét relációkat* értünk. A logikai jelek értelmezése pedig egységesen, a „természetes” halmazelméleti fordítással történik (a $\vee$-t az unióval, az $\wedge$-t a metszettel értelmezzük, stb.).

> Például a geometriához bevezetett alapjelek „*szándékolt értelmezése*” (szándékolt interpretációja) a következő: Az alaphalmaz legyen a tér részhalmazainak A összessége, a P, E, S és I relációjelek interpretációi pedig legyenek rendre a „pont”, „egyenes”, „sík” tulajdonságok A-n és az „illeszkedik” reláció. Az alapjelek ezen értelmezéseire már a nyelv formulái is „*értelmet nyernek*”. Így az axiómák is értelmezhetők, és a szemlélet alapján elfogadjuk, hogy az axiómák igazak az „euklideszi térben”. Azt mondjuk, hogy egy konkrét, az axiómákat kielégítő értelmezés az axiómarendszer egy *modellje*.

Látni fogjuk, hogy abból, hogy egy axiómarendszernek egyáltalán *van* modellje, már levonható az a következtetés, hogy az axiómarendszer „ellentmondástalan” (feltéve, hogy a halmazelmélet ellentmondástalan, hiszen maga az alaphalmaz is általában egy végtelen halmaz). Hiszen ha ellentmondásos lenne, akkor az ellentmondás a konkrét modellen is „jelentkezne”.

Megállapítottuk fent, hogy a geometria *formalizálásánál* még elvonatkoztatunk az alapfogalmak (pont, egyenes, sík, illeszkedik stb.) eredeti jelentésétől. Az axiómák mint formulák tekinthetők az alapfogalmak egyfajta definíciójának. A szemantikában az axiómákról feltesszük, hogy őket a „szándékolt értelmezések” biztosan kielégítik. De vajon *egyértelműen definiálják-e* az axiómák az alapfogalmakat? Értelmezhetjük-e (interpretálhatjuk-e) úgy az alapfogalmakat, hogy kielégítsék az axiómákat, de jelentésük lényegesen eltérjen a „*szándékolt* értelmezéstől”? Mint azt az alábbiakban látni fogjuk, e kérdésre a válasz „igen”. Tekintsünk néhány példát:

a) Először egy játékos példát mutatunk. Kíséreljük meg a geometriát a magyar állampolgárok összességén interpretálni. Tehát legyen az alaphalmaz a magyar állampolgárok halmaza. A P („pont”), E („egyenes”), S („sík”) tulajdonságok rendre jelentsék a következőket: P:= „valaki 20 évesnél fiatalabb”, E:= „valaki 20 és 80 között van”, S:= „valaki 80-nál idősebb”. I pedig jelentse azt, hogy „valaki hallott valakiről”. Vizsgáljuk meg ezután néhány geometriai axiómára, hogy teljesülnek-e ezen interpretációra nézve.

Az (1) axióma jelentése: „Bármely két húsz évesnél fiatalabbhoz van olyan 20 és 80 közötti, hogy mindketten hallottak már róla.” A (2) axióma jelentése: „Van olyan négy húsz évesnél fiatalabb, hogy nincs olyan 80 évesnél idősebb, akiről mindegyikük hallott már.”

Megállapíthatjuk, hogy ezen (1) és (2) axiómák igaznak tekinthetők az adott interpretációra. Azonban közvetve belátható, hogy számos más axiómát nem elégít ki ez az értelmezés: például már olyan egyszerű tények sem igazak, hogy „két ponton át legfeljebb egy egyenes fektethető”, melynek jelentése most az, hogy „bármely két húsz évesnél fiatalabbhoz legfeljebb egy olyan 20 és 80 közötti van, akiről mindketten hallottak”.

E játékos példából érzékelhetjük, hogy az alapfogalmak értelmezésére nagy a szabadságunk, de erős az a kötöttség, hogy az axiómákat *kielégítő* értelmezéseket kell választanunk.

A további példákban csak *síkgeometriára* szorítkozunk.

b) Az „*analitikus geometriai*” modell. A modell alaphalmaza legyen a valós számokból álló *számpárok* részhalmazainak halmaza. P interpretációja legyen az „egyelemű halmaz” tulajdonság, E interpretációja pedig az, hogy a részhalmaz egy *lineáris függvény* ($y = mx + b$) *grafikonja*. Az I reláció interpretációja legyen a *részhalmaz* reláció. „Analitikus geometriai” tanulmányaink alapján tudjuk, hogy ez az interpretáció kielégíti a geometria axiómáit, feltéve, hogy a valós számok axiómarendszere ellentmondástalan (tehát az euklideszi geometria ellentmondástalan, ha a valós számok axiómarendszere ellentmondástalan).

c) A Cayley–Klein-modell. Tekintsünk a síkon egy rögzített körtartományt. A modell alaphalmaza legyen e körtartomány részhalmazainak összessége. P interpretációja legyen a szokásos „pont”, E interpretációja legyen a „húr” tulajdonság, I interpretációja pedig legyen a szokásos „illeszkedik”. Megmutatható, hogy e modell bővíthető úgy, hogy kielégítse a *síkgeometria* összes axiómáját, ha a teljes euklideszi sík kielégíti a szokásos axiómákat, de ne elégítse ki a párhuzamossági axiómát (Cayley–Klein-modell). A párhuzamossági axiómát e modell nem elégíti ki, hiszen adott húrhoz adott ponton át *sok* olyan húr húzható, hogy a két húrnak nincs közös pontja.

Jelöljük Σ-val a síkgeometriának a párhuzamossági axiómától megfosztott axiómarendszerét. Látjuk a fenti példák alapján, hogy valóban *létezik* a nyelv alapjeleinek az eredetitől lényegesen különböző és a Σ-beli axiómákat kielégítő értelmezése, azaz léteznek a Σ-hoz tartozó geometriának a „szándékolttól” eltérő, lényegesen különböző *modelljei*. A *c)* példa alapján még a következő fontos megállapítások tehetők a síkgeometriára nézve:

(i) Ha a geometria eredeti axiómarendszerében a párhuzamossági axiómát a tagadásával cseréljük ki, akkor az ellentmondástalanság szempontjából az eredeti rendszerrel *egyenértékű* rendszert kapunk, hiszen a Cayley–Klein-modell kielégíti ezt az axiómarendszert (feltéve, hogy az euklideszi modell kielégíti az eredeti axiómarendszert).

(ii) A párhuzamossági axióma *független* a többi axiómától, azaz Σ-tól, hiszen sem a párhuzamossági axiómát, sem tagadását nem tekinthetjük a Σ-beli axiómák „logikai következményének”, mivel egy axiómarendszernek nem lehet egy állítás úgy „logikai következménye”, hogy az axiómák fennállása esetén az állítás hol igaz, hol nem (tekintsük egyrészt a geometria szándékolt eredeti, euklideszi modelljét, másrészt a Cayley–Klein-modellt).

Azt a módszert, amikor *szemantikai* értelmezések segítségével vonunk le bizonyításelméleti következtetéseket (például bizonyíthatósággal, ellentmondástalansággal, stb. kapcsolatos következtetéseket), „modellmódszernek” hívjuk. Látni fogjuk, hogy a fentiek sok tekintetben általánosíthatók a geometria axiómarendszeréről más fontos axiómarendszerekre is.

Tehát az axiómarendszerek, bizonyítási rendszerek általában nem alkalmasak arra, hogy egyértelműen definiálják az alapfogalmakat, és arra sem, hogy megragadjuk velük a nyelv *összes állításának* „igazságát és hamisságát” az adott modellen, például a szándékolt modellen (lásd például a Σ axiómarendszert és a párhuzamossági axiómát). De alkalmasak az axiómarendszerek arra, hogy segítségükkel például bizonyításokat ellenőrizzünk, vagy tételeket generáljunk.

Megjegyezzük, hogy a Cayley–Klein-modellen kívül a síkgeometria axiómáinak más érdekes modelljei is léteznek, ilyen a *gömbi modell*. A síkgeometriát ekkor a gömb felületén értelmezzük. A „pont” és „illeszkedik” jelentése legyen a „gömbfelület pontja” és „illeszkedik”, míg az „egyenes” jelentése legyen a „gömbi főkör” tulajdonság. Nem részletezzük, de megmutatható, hogy erre az értelmezésre nézve, Σ majdnem mindegyik axiómája teljesül. Vegyük észre, hogy a „gömbi geometria” egy olyan geometria, ahol adott „egyeneshez”, rajta kívül fekvő ponton át *egyáltalán nem lehet* párhuzamost fektetni (adott főkörhöz és rajta kívül fekvő felületi ponthoz nincs olyan a ponton áthaladó gömbi főkör, amely az adott főkört nem metszi).

Megállapíthatjuk tehát, hogy, teljes általánosságban, adott „egyenes” és rajta kívül fekvő „pont” esetén *logikailag* három eset lehetséges: az adott egyeneshez *egyetlen* a ponton átmenő párhuzamos létezik, *végtelen sok* párhuzamos létezik, vagy *egyetlen egy sem* létezik. Ezek az esetek a fenti példák szerint realizálhatóak is. Ezen eseteknek rendre egy-egy geometria felel meg: az euklideszi, a hiperbolikus és az elliptikus geometria.

• *A párhuzamossági axióma problémájának ismeretelméleti hátteréről, a matematika és valóság viszonyáról.* Az eddigiekben igyekeztünk tisztázni a párhuzamossági axióma „logikai státusát”, függetlenségét a többi axiómától, tehát tisztázni egy logikai, matematikai kérdést. Egészen más jellegű probléma az, hogy a *fizikai valóságban* vajon a párhuzamossági axióma vagy pedig a tagadása igaz-e? A párhuzamossági axióma tükrözi-e a valóságot, és „valóságtól elrugaszkodottak”-e a nemeuklideszi geometriák? E kérdés már nyilván a *valóság és a matematika viszonyával* kapcsolatos, amíg például a függetlenség kérdése a matematika *belső* kérdése.

Bolyai és Lobacsevszkij munkásságát követően néhány évtized múlva igazolódott csak, hogy kozmikus méretekben éppen a nemeuklideszi geometriák alkalmasak arra, hogy valósághűen leírják a teret (relativitáselmélet, tér görbültsége, fénysugár mint az egyenes modellje stb.). Kiderült, hogy az euklideszi és a nemeuklideszi geometriák viszonya hasonló, mint a newtoni és einsteini világképek viszonya. Az einsteini elmélet például nem nagy sebességek és nem nagy távolságok esetén nagyjából ugyanazokat az eredményeket adja, mint a newtoni, míg nagy sebességek és távolságok esetén a két elmélet lényegesen eltérő eredményeket szolgáltat. Hasonlóan, „földi méretekben” az euklideszi geometria jó közelítéssel leírja a teret, míg kozmikus méretekben már nem.

A modern fizika felfedezéseinek az ismeretelmélet, a matematika, a logika, a tudománytörténet és metodológia szempontjából messzemenő tanulságai vannak. A matematika előre feltárt olyan *logikai lehetőségeket*, amelyek az euklideszi geometriával egyenértékűen konzisztens geometriai elméletekhez, a nemeuklideszi geometriákhoz vezettek, és ezen elméleteket ki is dolgozta. Sokáig úgy tekintettek a nemeuklideszi geometriákra mint szép, elvont, de haszontalan elméletekre. Később igazolták csak a fizikai kutatások, hogy ezen elméletek realizálódnak a fizikai valóságban, a fizikai felfedezéseket pedig elősegítették a matematika már létező idevágó eredményei. Tágabb értelemben annak az elvnek a működéséről van szó, hogy ha valami logikailag lehetséges (logikailag ellentmondástalan), akkor valamilyen formában realizálódik is a természetben. Hasonló mechanizmus működésének voltunk tanúi a matematikatörténetben például az imaginárius számok (komplex számok) bevezetésekor vagy a csoportelmélet létrejöttekor, amikor a matematika a fizikai felfedezések előtt járt. Megállapíthatjuk tehát, hogy szűk látókörű az a vélemény, amely a matematika alkalmazhatóságát, „hasznosságát” rövid távú alkalmazhatóságával kívánja mérni, hiszen a hasznosság csak történelmi távlatból ítélhető meg.

2. A filozófiától az informatikáig: a matematikai logika történetéről

Rövid áttekintést adunk a matematikai logika előzményeiről, történetének legfontosabb eseményeiről és fontosabb területeiről.

• *Filozófiai logika.* A „helyes következtetések” különböző módozatainak vizsgálata, a logika ősi tudomány. Bár a témának nyilván szoros a kapcsolata a matematikával, ez a terület sokáig csak a filozófiának volt tárgya. A logika leghíresebb művelője az ókorban a görög Arisztotelész, akinek és követőinek munkássága egészen a középkorig meghatározó volt. A középkorban például a skolasztikus filozófusok fordítottak nagy figyelmet a logikára. A logika gondolatköre számos nagy filozófust foglalkoztatott, például Kantot, Spinozát vagy Hegelt. E vizsgálódások azonban nem tekinthetőek még „matematikai logikának”, megfogalmazásuk nagyrészt nélkülözte a szimbolikát, és a „természetes nyelven” történt. A logikára mint a filozófia részére „filozófiai logikaként” szoktak hivatkozni. Azt a logikát pedig, amelyet a matematika ösztönösen használ a következtetéseknél, „naiv logikának” nevezhetjük.

• *Kísérletek a logika matematizálására.* A 17–18. században működő híres matematikusról, filozófusról, *Leibnizről* tudjuk, hogy foglalkoztatta a logika matematizálásának gondolata, bár kissé utópisztikus formában. Gondolkodott egy univerzális problémamegoldó, gépies eljárásról, valamint a formális nyelv fogalmáról is. Elgondolásai azonban csak publikálatlan jegyzeteiben maradtak az utókorra.

Boole, *Schröder*, *de Morgan* és *Peirce* munkásságát a 19. században már a matematikai logika *közvetlen előzményének* tekinthetjük. Bizonyos logikai fogalmakat algebrai, azaz matematikai fogalmakkal modelleztek. Idevágó munkásságuk eredménye a logikának egy tisztán algebrai megközelítése (relációalgebrák, Boole-algebrák stb.), később ebből nőtt ki az úgynevezett *algebrai logika*.

• *A matematikai logika létrejötte, formális bizonyítási rendszerek bevezetése.* A matematikai logika létrejöttét Gottlob *Frege* (1848–1925) munkásságától datálhatjuk. De Frege kortársai, David *Hilbert* (1862–1943) és Bertrand *Russell* (1872–1970) is elévülhetetlen érdemeket szereztek e tudományág létrejöttében.

Frege a matematika által már addig is alkalmazott *axiomatikus módszert*, a „naiv” axiomatikus módszert fejlesztette tovább, amennyiben azt „matematizálta”, matematikai szigorúsággal megfogalmazta. Bevezetett egy *formális nyelvet, logikai alapigazságokat* (logikai axiómákat), *levezetési szabályokat*, azaz létrehozott egy „bizonyítási rendszert". Eredeti célja az aritmetika minden addiginál szigorúbb felépítése volt, a matematikai logika létrejötte tehát e törekvés „melléktermékének" tekinthető.

Frege munkásságának idején létezett egy fontos körülmény, amelyik jelentősen motiválta a matematikai logika fejlődését, ez pedig a Cantor-féle *halmazelmélet* létrejötte volt, pontosabban az elmélet keletkezését hamarosan követő *ellentmondások és paradoxonok* felszínre kerülése. Noha a „naiv halmazelmélet" hiányosságait maga Cantor is észrevette, Russell angol filozófus és logikus volt az, aki e paradoxonokra irányította a tudományos közvélemény figyelmét. E paradoxonok a már ókorban is ismert „hazug-paradoxon" változatai. Több megoldás született az ellentmondások kiküszöbölésére, az érdeklődés középpontjába került az *axiomatikus módszer*. Különböző halmazelméleti axiómarendszerek születtek. *Russell* is adott egy lehetséges választ a paradoxonokra, amikor kidolgozott egy új logikai rendszert, az úgynevezett típuselméletet.

David Hilbert figyelmét a *geometria alapjainak* kutatása irányította az axiomatikára. Eleinte csak az axiomatika „naiv logikai" megközelítésével foglalkozott, és bebizonyította az euklideszi geometria relatív ellentmondástalanságát. Korán megérezte az axiomatikus módszer matematizálásában, „formalizálásában" rejlő lehetőségeket, különösen foglalkoztatta az axiómarendszerek ellentmondástalanságának problémája. Úgy sejtette, hogy véges eljárásokat használva valamennyi, egyáltalán megfogalmazható állításról eldönthető, hogy tétele-e egy axiómarendszernek, vagy sem.
Minden addiginál komolyabb formában felvetette az automatikus tételbizonyítás, azaz egy gépies, univerzális tételbizonyító eljárás kidolgozásának gondolatát, és kitűzte, általában, a matematikai logika kidolgozásának programját. Ez konkrétan az 1900-as párizsi matematikai világkonferencián tartott híres előadásában történt, ahol nagyhatású vízióként felvázolta azokat a matematikai problémákat, amelyekről úgy gondolta, hogy korának legfontosabb problémái, és megoldásuk hatással lehet az egész 20. századi matematika fejlődésére. Az ezt követő első komoly lépést a matematikai logika kidolgozására ő maga tette meg, amikor definiált egy olyan általános bizonyítási rendszert az elsőrendű logikára (Hilbert-kalkulus), amelyet már nemcsak a matematika egy-egy ágának tanulmányozására szánt (1920).

A századforduló táján és a század elején megfogalmazott, a logikát és a matematika alapjait érintő korszakalkotó gondolatok a 20. század *harmincas éveire* értek be igazán, ez az évtized igen fontos a logika szempontjából. Az ezen időszakban született eredmények, fogalmak részben lezárták és szintetizálták a századforduló táján elkezdődött kutatásokat, részben új fejezeteket nyitottak. Beszélhetünk az ezen időszak alatt született *pozitív* és úgynevezett *negatív* eredményekről, ilyen felosztás szerint fogjuk az alábbiakban röviden áttekinteni a korszakot.

• *A harmincas évek pozitív eredményeiről.* Alfred *Tarski* (1901–1983) megfogalmazta a *logikai szemantika* halmazelméletre építő alapjait, definiálta a *formulák igazságának* fogalmát struktúrán, és a *szemantikai következményfogalmat*. Tarski igazságdefiníciója egy szintézis eredménye, hiszen burkoltan használták már a matematikában a halmazelméletre épülő igazság és következmény fogalmát. Tarski szemantika elmélete tulajdonképpen abba a folyamatba illeszkedett, amelyben, már a halmazelmélet birtokában, a matematika egyes területeit sorra ráépítették a halmazelméletre (például az analízis absztrakt terei, a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle modellje stb.). A logika *szemantikai* felépítésének előnye, hogy szemléletes és valóság közeli. Hátránya viszont, hogy erősen használja a végtelen halmazok elméletét, ezért algoritmikusan nehezen kezelhető, szemben a bizonyításelmélettel, amelyik csak egy korlátozott halmazelméletet használ, és algoritmikusan könnyebben hozzáférhető.

Kurt Gödel (1906–1978) *teljességi tételében* bebizonyította, hogy a legfontosabb logika, az úgynevezett elsőrendű logika kétféle felépítése, a bizonyításelméleti (például a Hilbert-féle kalkulus) és a szemantikai felépítés, bizonyos értelemben, ekvivalens. Így a két felépítés egymás kontrolljaként, de kiegészítéseként is szolgálhat. Gödel ezzel bizonyította az elsőrendű logika *erejét*. Miután a matematika túlnyomó részben elsőrendű logikát használ, e kettős felépítés létezése és e felépítések ekvivalenciája az egész matematika szempontjából alapvető. Egy-egy bizonyításelméleti felépítés (kalkulus) és a halmazelméleti felépítés ekvivalenciáját a kalkulus *teljességének* hívjuk.

A Tarski-féle szemantika megszületése mellett a korszak másik jelentős fogalomalkotása egyfajta „*algoritmusfogalom*” létrejötte. Erre több ekvivalens definíció is született, ezek Church (*kiszámíthatóság*), Turing (*Turing-gép*), Kleene (*rekurzív függvények*) munkásságához fűződnek.

A bizonyításelméletben megszületett az a fontos eredmény, hogy az aritmetika Peano-féle axiómarendszere *ellentmondástalan*, amennyiben a halmazelmélet egy igen korlátozott része ellentmondástalan (Gentzen). Ez máig is az egyik legfontosabb ellentmondástalansági eredmény a matematika nagy elméleteit illetően.

Létrejöttek az első, formalizált *nemklasszikus logikák*, azaz az elsőrendű logikától lényegesen különböző logikák (például többértékű, modális, intuicionista logikák). E logikák kutatásai már a század tízes éveiben elkezdődtek.

• *A harmincas évek negatív eredményeiről.* Gödel és Church a harmincas években hozták nyilvánosságra azokat a híres eredményeiket, amelyek bizonyos értelemben rácáfoltak Hilbert várakozásaira, és amelyeket mint a bizonyításelmélet korlátjait (a matematika korlátjait) szokásos idézni. Gödel *I. inkomplettségi tételében* azt igazolta, hogy ha egy elmélet „elég erős”, akkor bárhogyan is veszünk fel egy „kezelhető” axiómarendszert, mindig lesz olyan állítás, hogy sem ő, sem a tagadása nem igazolható az axiómákból. Church *eldönthetetlenségi tételében* azt is megmutatta, hogy a matematika elég erős elméletei *nem eldönthetők*, azaz nem létezik olyan algoritmus, amelyik bármely megfogalmazható állításról véges sok lépés után képes eldönteni, hogy bizonyítható-e az elméletben, vagy sem. Ezek az eredmények igen általánosak, hiszen a matematika legtöbb fontos elmélete „elég erős” (például az aritmetika, a halmazelmélet stb.).
Gödel *II. inkomplettségi tételében* megmutatta, hogy az axiómarendszerek ellentmondástalanságát általában nem lehet az axiómarendszeren belül igazolni. Tehát csak egy

bővebb axiómarendszeren belül lehet igazolni, mint ahogy annak ellentmondástalanságát egy még bővebb axiómarendszerben, és így tovább. Az inkomplettségi tételek ismeretében megkérdőjelezhető az, hogy van a matematikában teljes bizonyosság.

Kitérünk *Löwenheim és Skolem tételére*, amely ugyan a harmincas éveknél korábbra datálható, de a híres negatív eredmények közé sorolható. Tudjuk, hogy egy-egy terület alapfogalmairól (például a geometriában a pont, egyenes, sík stb.) nem tudunk többet mondani, mint amit az őket tartalmazó axiómák és logikai következményeik róluk állítanak. Már jelen bevezetés első részében is láttuk, hogy az axiómák általában nem definiálják egyértelműen az alapfogalmakat (vagyis az axiómákat kielégítő struktúrák általában nem feltétlenül „izomorfak"). Löwenheim és Skolem bebizonyították, hogy nemcsak az axiómáknak, de magának az illető egész axiomatizálandó elsőrendű *elméletnek* is léteznek lényegesen különböző modelljei (tehát a nyelvben megfogalmazható, a modellben igaz *összes* állítás halmazának is), például léteznek különböző számosságú modelljei. Mindebből és a Gödel I. inkomplettségi tételből következik, hogy az elsőrendű logika általában nem alkalmas arra, hogy segítségével akár egy elég bonyolult elméletet, vagy akár egy elég bonyolult struktúrát tökéletesen „megragadjunk".

A matematika alapjait érintő század eleji felfedezések és a harmincas években született eredmények az egész tudományos világ érdeklődését felkeltették. Szokás erről az időszakról mint a „*matematika forradalmáról*" beszélni. Ez azért indokolt, mert egyrészt a matematika, és így közvetve az egész tudomány többezer éves fejlődés után új, az addiginál szilárdabbnak tűnő alapokat nyert. Másrészt sikerült feltérképezni az ezen alapok nyújtotta *lehetőségeket* és *korlátokat*. E korlátok összecsengtek az *ismeretelmélet* azon tapasztalataival, hogy a megismerés fokozatos és viszonylagos, az intuíció gépies eljárással nem helyettesíthető, a teljes megismerés pedig lehetetlen. Nagy jelentőségű volt, hogy ezek a megismerésre vonatkozó tapasztalatok *egzakt* matematikai formában jelentek meg, mindez a filozófiai logika matematizálásának és a matematikai logikának volt a nagy sikere. A negatív eredmények lezártak bizonyos matematikai kutatásokat, és egyúttal *új* és fontos kutatási irányokat jelöltek ki. Az alábbiakban röviden ezeket az irányokat ismertetjük.

• *A logika szakterületeinek kialakulása.* A harmincas években ered a matematikai logikának számos olyan jelentős vonulata, amelyik a mai napig ível. Ezen időszaktól számíthatjuk a matematikai logika fejezetekre tagozódását.

(i) Tarski eredményei nyomán, megindult a szemantikakutatás. Ez rövidesen beletorkollott az úgynevezett *modellelmélet* létrejöttébe. A modellelmélet a *struktúrák, struktúraosztályok* vizsgálata a matematikai logika eszközeivel. A terület a matematikai logika és az algebra határterülete. Amíg kezdetben a logika kutatóit egyetlen struktúra kimerítő leírása, axiomatizálhatósága foglalkoztatta, addig a modellelmélet megjelenésével előtérbe került az axiómákat kielégítő *összes* struktúrák vizsgálata, és *modellosztályokban* kezdtek el gondolkodni. Így a logikában is bekövetkezett az a *szemléletváltás*, amely a matematika számos egyéb területén már korábban lezajlott (például az absztrakt algebrák vagy az analízis absztrakt tereinek bevezetésekor stb.). Annak is köszönhetően, hogy a modellelmélet igen változatos matematikai technikákat használ, igen mély eredmények jöttek itt létre, sőt a 20. század második felének a matematikai logikához kapcsolódó látványos matematikai eredményei elsősorban e területhez köthetők.

Az egyik ilyen eredmény, hogy Abraham Robinson amerikai algebrista-logikus viszonylag egyszerű matematikai logikai eszközök segítségével megalapozta az infinitezimális mennyiségek elméletét, azaz a *nemstandard analízist*. Többszáz év után, Newton munkássága óta először sikerült precíz alapokat találni erre az elméletre, a logika eszköztárának köszönhetően. A nemstandard analízist követte a nemstandard topológia, nemstandard geometria, nemstandard számelmélet stb. létrejötte. Robinson felfedezése egy új szemlélet meghonosodását jelentette a matematikában.

A modellelmélethez (és a halmazelmélethez) kapcsolható másik jelentős esemény: Cohen a hatvanas években megoldotta a halmazelmélet *kontinuumhipotézisének* híres problémáját, azaz azt a problémát, hogy létezik-e számosság a megszámlálhatóan végtelen és a kontinuum számosság között. Bebizonyította a függetlenséget a halmazelmélet Zermelo–Fraenkel-féle axiómáitól.

Cohen, valamint Robinson fenti kutatásai is az úgynevezett *nemstandard modellek* vizsgálatához tartoznak.

(ii) A logika fontos területévé vált a *bizonyításelmélet*. A Hilbert-rendszeren kívül számos más bizonyítási rendszer jött létre. Elterjedt *levezetési rendszerek* például a Gentzen-kalkulus, vagy a természetes levezetési rendszer. Előtérbe kerültek a *cáfolati rendszerek*, például a rezolúció vagy az analitikus fák. Ez utóbbi bizonyítási rendszerek nem a direkt, hanem az indirekt érvelésen nyugszanak. A cáfolati rendszerek algoritmikus szempontból jobban kezelhetők, mint a levezetési rendszerek. A számítógépek megjelenésével, a logikai programozás és az automatikus tételbizonyítás létrejöttével a bizonyításelmélet fejlődése még inkább felgyorsult.

(iii) Elkezdődött a *kiszámíthatóságelmélet* kutatása. Markov is bevezetett egy olyan fogalmat (Markov-algoritmus), amely ismét ekvivalensnek bizonyult az algoritmus fogalmának már létező egyéb verzióival. Az inkomplettségi tételek és a Church-tétel ismeretében olyan eljárások vizsgálata vált érdekessé, amelyek ha nem is döntési eljárások, de a bizonyítások hatékony *keresését* teszik lehetővé.

Gyorsan fejlődő és fontos terület a *bonyolultságelmélet*. Frissnek számítanak még azok az eredmények, melyek szerint számos bonyolultságelméleti fogalom és tétel lefordítható logikára, és viszont. Később a számítógép megjelenése kikényszerítette egy a kiszámíthatóság- és bonyolultságelméletnél is általánosabb, jelentős tudományág létrejöttét, az *algoritmuselméletét*.

A *formális nyelvek* területén hasonló fejlődés következett be, mint a kiszámíthatóságelméletnél: a formális nyelvek elmélete kiterjedt és önálló diszciplínává vált a számítástudomány és a matematikai nyelvészet fejlődése eredményeként

(iv) Alfred *Tarski* munkásságától számíthatjuk az *algebrai logika* létrejöttét. Említettük már, hogy Boole, Schröder, de Morgan és Peirce eredményei, a Boole- és a relációalgebrák kutatásai az *algebrai logika* 19. századi előzményeinek tekinthetők. Számos bizonyítéka volt már annak, hogy a logika és az algebra egymáshoz igen közelálló tudományágak (például logikai műveletek és Boole-műveletek kapcsolata, elméletek és szűrők kapcsolata stb.). Tarski és tanítványai, valamint más jelentős kutatók (Henkin, Monk, Craig, Halmos) szisztematikusan kezdtek el a témával foglalkozni. Az állításlogika „algebraizációi” után elkezdték vizsgálni az elsőrendű logika algebraizációit, így Tarski definiálta a *cilindrikus algebrákat*, Halmos a *poliadikus algebrákat* stb.

A kutatások igazolták azt a sejtést, hogy a logika jelentős része „átfogalmazható” algebrává, és fordítva. E felfedezés megtermékenyítően hatott mindkét tudományágra. Sikerült logikai problémákat algebraiakra átfogalmazni, ott megoldani, és viszont, meglepő és szép eredmények születtek, a matematika látszólag távolinak tűnő fogalmai között sikerült így kapcsolatokat találni.

(v) Bár a kutatók között ma is egyetértés van a tekintetben, hogy a klasszikus elsőrendű logika kitüntetett szerepet játszik az összes logikák között, mégis e logika számos vonatkozásban, például kifejezőerejét tekintve, szegényesnek bizonyult ahhoz, hogy minden szituációban megfelelően modellezzék vele a valóságot. Létrejöttek az úgynevezett *nemklasszikus logikák*, ezen belül olyan jelentős irányzatok, mint a többértékű logikák (Łukasiewicz), a modális logikák (Lewis), vagy az intuicionista logika (Heyting). A nemklasszikus logikák kutatását kezdetben elsősorban a filozófia és a nyelvtudomány, de később már elsősorban az *informatika* és a *számítástudomány* motiválta.

A nemklasszikus logikákat sokféleképpen osztályozhatjuk: léteznek olyanok amelyek bővítései az elsőrendű logikának (például magasabb rendű logikák, vagy bizonyos modális logikák), olyanok, amelyek korlátozásai az elsőrendű logikának (például intuicionista logika), vagy léteznek egészen más elveken nyugvó logikák (például nemmonoton logikák, valószínűségi logikák).

Sokáig problematikusnak látszott a nemklasszikus logikák szemantikai megalapozása. Ebben jelentett áttörést az úgynevezett *Kripke-szemantika* fogalma (1960). Nagy a változatosság a nemklasszikus logikák területén, és a jövő dönti majd el, hogy melyek válnak közülük igazán fontossá.

• *A matematikai logika mint alkalmazott tudomány.* A 20. század utolsó negyede *jelentős fordulatot* hozott a matematikai logika fejlődésében. A számítógépek megjelenésével és kutatásával, az informatika fejlődésével az addig elsősorban csak a matematika saját problémáival foglalkozó, kissé filozófiai ihletettségű matematikai logika egyszeriben *alkalmazott* és *gyakorlati* tudománnyá is vált. A matematikai logikát ugyan már a számítógép megjelenése előtt is alkalmazták például a nyelvtudományban, a logikai áramkörök tervezésekor vagy az elméleti fizikában, de az alkalmazást illetően *áttörés* csak a számítógépek megjelenésekor következett be. A számítógépes alkalmazások miatt az érdeklődés középpontjába került az *algoritmikus szemlélet* és az *eldönthetőséggel* kapcsolatos számos pozitív eredmény. A számítástudomány fejlődésének hatására a logika egyéb területein is újabb, gyors fejlődés indult el: ilyenek a bizonyításelmélet (kutatását elsősorban a gépi bizonyítások és a logikai programozás motiválta), a nemklasszikus logikák (kutatását elsősorban a mesterséges intelligencia és a matematikai nyelvészet motiválta), a szemantikakutatás (a programozáselmélet, programhelyesség-bizonyítás motiválta). Létrejött egy interakció is az alkalmazások és a matematikai logika elmélete között, hiszen az egész alkalmazási folyamat visszahatott a matematikai logika belső fejlődésére is. Új logikák jöttek létre, például dinamikus logika, nemmonoton logikák, speciális többértékű logikák stb. Az alkalmazások és az elmélet közötti interakcióra példa az *adatbázis-elmélet*, ahol a logikát nagymértékben alkalmazzák, ugyanakkor az alkalmazások is elindítottak fontos elméleti logikai kutatásokat.

A fenti folyamatot jellemző példa a logika alkalmazása a *mesterséges intelligenciában*. E területen számos olyan logikai eredmény került alkalmazásra, melyeknek a számítógépek megjelenése előtt csak filozófiai jelentősége volt (például eredmények a nemklasszikus logikákról).

> Itt jegyezzük meg, hogy könyvünk tárgyának megjelölése a „*matematikai logika*” ma már kissé anakronisztikus. E terminológia szerepe történetileg egyrészt a filozófiai logikától való megkülönböztetés volt, másrészt az, hogy kezdetben a matematikai logikát elsősorban magára a matematikára alkalmazták. Mára a terminológia azonban mindkét szerepét elvesztette. Egyrészt elmondhatjuk, hogy a modern filozófiai logika és a matematikai logika összeolvadt abban az értelemben, hogy a „logikáról” való filozofálás ma már általában nem nélkülözheti azt, hogy készítsünk hozzá egy formalizált (azaz matematikai) modellt, azaz a logika formalizált tudománnyá vált. Másrészt a matematikai logika már régóta nemcsak a matematika logikájával foglalkozik, hanem az élet bármely területéről igyekszik modellezni a „helyes érveléssel” kapcsolatos problémákat. Elegendő lenne tehát a tudományágat röviden „*logikának*” nevezni, mint ahogyan ezt több helyen meg is tesszük a rövidítés kedvéért. Úgy tűnik azonban, hogy a logikával kapcsolatos jelzett folyamatok még nem annyira ismertek, hogy felesleges lenne a „logika” megjelölés elé a nyomatékosító „matematikai” jelző, egyértelműsítve témánk tárgyát. Történeti okok is indokolják a matematikai logika terminológia használatát.

• *A hazai logikakutatásokról.* A hazai logikakutatás területén nemcsak jelentős kutatókról beszélhetünk, hanem jelentős *logikaiskolákról* is. Elmondhatjuk, hogy ezen iskolák komoly szerepet játszottak a 20. századi logika történetében. *Péter Rózsa* a rekurzív függvények területén ért el fontos eredményeket. *Kalmár László*, aki iskolát teremtett a számítástudomány, és ezen belül is az elméleti számítástudomány terén, a logika számítástudományi alkalmazásaiban vitt úttörő szerepet. *Ruzsa Imre* a logika humán alkalmazásainak területén teremtett iskolát, kutatási területe elsősorban a nemklasszikus logikák, ezen belül például az intenzionális logika. *Németi István* és *Andréka Hajnal* az algebrai logikában teremtettek nemzetközi hírű iskolát, bekapcsolódtak a Tarski-csoport munkájába, és a témakör vezető kutatói közé számítanak, de fontos eredményeik vannak a logika számítástudományi alkalmazásainak terén is. *Makkai Mihály* területe a modellelmélet, számos mély eredmény fűződik a nevéhez. A felsorolt kutatók valamennyien a logika oktatásának területén is elévülhetetlen érdemeket szereztek.

1. FEJEZET

AZ ELSŐRENDŰ LOGIKA NYELVE

A formális nyelv fogalma nem idegen azok számára, akik írtak már számítógépes programot. Ismert, hogy a programozási nyelvek tartalmaznak bizonyos megengedett szimbólumokat („abc”), továbbá szabályokat (szintaktikai szabályokat) arra nézve, hogy a szimbólumokból hogyan képezhetők megengedett, azaz értelmes jelsorozatok („szavak”). A programozáson kívül egyéb területeken is találkozunk formális nyelvekkel, például kottaírásnál, koreográfiáknál, tipográfiában, titkosírásokban, nyelvészetben stb. A formális nyelveknek általános és kiterjedt elmélete létezik, amelyet nem célunk itt részletezni. Az alábbiakban olyan fogalmakat érintünk csupán, ezeket is helyenként informálisan, amelyek egy bevezető *matematikai logika* előadás követéséhez szükségesek.

A formális nyelvekről is (így az „elsőrendű nyelvről” is) valamilyen nyelven, a „**metanyelven**” beszélünk. Jelen könyvben a metanyelv a köznapi nyelv. Az is gyakran előfordul, például a számítástudományban, hogy *magáról a formális nyelvről is egy másik formális nyelven beszélünk*.

A számos ismert formális nyelv között is az egyik legfontosabb az „elsőrendű logika” alább ismertetendő nyelve. Ez a nyelv tulajdonképpen a „**matematika nyelve**”, és sok más formális nyelvnek is alapját képezi. Úgy is *tekinthetjük ezt a nyelvet, mint egy, a matematika többezer éves története során letisztult, nagy általánossággal rendelkező matematikai jelölés- és szimbólumgyűjteményt*. A matematika fejlődése elválaszthatatlan jelölésrendszerének fejlődésétől, a matematika művelése pedig elképzelhetetlen jelölésrendszere nélkül. Matematikai tanulmányaink során e jelölésekkel, szimbólumokkal már jórészt találkoztunk, és a következőkre tekinthetünk úgy is, mint ismereteink rendszerezésére. Kitekintést adunk majd arra, milyen következményekkel jár az elsőrendű nyelv szűkítése (például nulladrendű nyelvvé) vagy bővítése (például másodrendű nyelvvé, lásd majd az 5.1 részt).

Az elsőrendű logika mellett létezik „nulladrendű" („állítás-"), „másodrendű", „magasabb rendű" („n-ed rendű") logika, az ezekhez tartozó nyelvek pedig a „nulladrendű" („állítás-"), „másodrendű", „magasabb rendű" („n-ed rendű") nyelvek. E logikák klasszikus logikáknak egy (n-től függő) hierarchiáját képezik. Tárgyalásunk során végig következetesen kitérünk az állításlogikára, és majd külön részben tárgyaljuk a másodrendű logikát (5.1 rész).

1.1 A nyelv

1.1.1 A nyelv alapelemei

A következő felosztás szinte minden logikai nyelvre érvényes. Egy *logikai nyelv* áll:

- a benne előforduló jelek (szimbólumok) összességéből, az „**abc**”-ből;
- a nyelv **típusából**;
- az „abc” jeleiből képezett, megengedett „értelmes” véges jelsorozatok összességéből, a **formulákból**, másképpen „szavakból”.

Jelen részben sorra vesszük a nyelv fenti elemeit az elsőrendű nyelv esetére.

1. Definíció. Az elsőrendű nyelv *jelei (szimbólumai)*:

(i) A „logikai konstansok”: a $\neg$ (*negáció*, illetve „nem”), $\wedge$ (*konjunkció*, illetve „és”), $\vee$ (*diszjunkció*, illetve „vagy”), $\rightarrow$ (*implikáció*, másképpen: kondicionális vagy materiális implikáció), $\leftrightarrow$ (*ekvivalencia*, másképpen: bikondicionális), $\exists$ (*egzisztenciális kvantor*, illetve „létezik”), $\forall$ (*univerzális kvantor*, illetve „minden”), az = jel;

(ii) A „ *nemlogikai konstansok*”, azaz:
véges vagy megszámlálható sok függvényjel (*függvénykonstans*):
$f_1, f_2, \ldots$
véges vagy megszámlálhatóan sok relációjel (*relációkonstans*):
$P_1,\ P_2, \ldots$

(iii) Az *individuumváltozók* (röviden: változók): $x_1,\ x_2, \ldots$

Nyelv számosságán a benne megengedett jelek (szimbólumok) összességének számosságát értjük. Ez mindig végtelen számosság, mert például **az individuumváltozók számát nem kívánjuk korlátozni**.

Azáltal, hogy a fenti definícióban kikötöttük, hogy a nemlogikai jelek számossága legfeljebb megszámlálható, **feltettük, hogy a nyelv megszámlálható**. Azonban szükség lehet arra is, hogy *megszámlálhatónál több* jelet is megengedjünk, ha erre szükségünk lesz, akkor ezt *külön* kiemeljük. Mivel a nyelv megszámlálható, ezért a függvény- és relációjeleket megadhatjuk egy *kettős sorozattal*, így: $\langle f_1, f_2, \ldots;\ P_1,\ P_2, \ldots\rangle$.

Feltételezzük, hogy a megengedett jelek *mind különbözőek*. Az „abc” jelei közül csupán az individuumváltozók a *változók*, a többi jel *konstans* (logikai, illetve nemlogikai konstansok). A *nullaargumentumú* függvényjeleket *individuumkonstansoknak* nevezzük (jelölésük például $c_1, c_2, \ldots$), a *nullaargumentumú* relációjeleket *állításkonstansoknak* nevezzük. E két kategóriát, fontosságuk miatt, szokták külön kategóriaként is kezelni a nemlogikai jeleken belül.

Megjegyezzük, hogy az $\to$ jel nem a „következmény”, „következik” fogalmaknak felel meg a nyelvben, hanem *egy logikai művelet jele* (e kérdésre még később a 2.2 alfejezetben visszatérünk). Látni fogjuk, hogy $A \to B$ például ekvivalens $\neg A \vee B$-vel, tekinthető ezért ez utóbbi művelet jelöléseként is. A „következik”-kel összetéveszthetősége miatt szokták az $\to$ műveletet így is is jelölni: $\supset$.

Használunk majd olyan szűkített nyelvet is („dialektusok”), amelyben csak a $\neg$, $\wedge$ és $\exists$ logikai konstansok megengedettek. Később látni fogjuk, hogy a többi logikai konstans ($\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$) kifejezhető e konstansok segítségével. Amennyiben ezt a szűkebb nyelvet használjuk, ezt a körülményt külön hangsúlyozzuk. Szűkíthetjük úgy is a nyelvet, hogy ne tartalmazza az egyenlőségjelet mint logikai jelet. Ebben az esetben *egyenlőségmentes nyelvről* beszélünk. A következőkben feltesszük, hogy a nyelv *tartalmaz egyenlőségjelet*, hacsak ennek ellenkezőjét nem említjük.

Ezután rátérünk a nyelvek következő összetevőjére, a **típus** fogalmára.

2. Definíció. A nyelv *típusa* egy a függvény- és relációjeleknek nemnegatív egész argumentumszámokat tulajdonító hozzárendelés, amelyik leírja, hogy az egyes függvény-, illetve relációjelek hány változós függvényeknek, illetve relációknak felelnek meg. Megadása egy nemnegatív egész számokból álló $\langle a_1, a_2, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots \rangle$ kettős sorozattal történik, amely a függvény- és relációjelek $\langle f_1, f_2, \ldots;\ P_1, P_2, \ldots \rangle$ sorozatának felel meg.

A logikai vizsgálatok szempontjából sokszor csak a nyelv *típusának* van jelentősége, és nem a konkrét függvény- és relációjeleknek.

Megjegyezzük, hogy a *logikai nyelv* (és a *logika*) fogalmát **kettős értelemben** használják az irodalomban. Használják **konkrét** logikai nyelvként, tehát amikor a nemlogikai jelek konkrét adott jelek, és használják ezen konkrét logikai nyelvek olyan **osztályaként**, ahol csupán a logikai jelek rögzítettek, a nemlogikai jelek szabadon változhatnak. Többek között e kettősség miatt is érdemes szem előtt tartani az „abc” felosztását nemlogikai és logikai jelekre, hiszen ez *utóbbiak a nyelvfogalom bármely értelmezése mellett rögzítettek*. Jelen könyvben törekedünk arra, hogy az adott kontextusból mindig egyértelműen kiderüljön, hogy milyen értelemben használjuk a logikai nyelv (és a logika) fogalmát.

Megállapíthatjuk tehát, hogy **az egyes konkrét elsőrendű nyelvek egymástól lényegesen csak a függvény-, és relációjelek összességében különböznek**. Például a logikai jeleken kívül a csoportelmélet nyelve a $+$, $-$, 0 függvényjeleket, illetve konstanst, a rendezés nyelve a $<$ kétargumentumú relációjelet, a halmazelmélet az $\in$ kétargumentumú relációjelet tartalmazza mint nemlogikai jeleket.

A nyelvek *jelölése*: $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{G}$ stb. Gyakran használunk index nélküli betűket, individuumváltozókra $x, y, z, \ldots$-t, függvényjelekre $f, g, h, \ldots$-t, relációjelekre P, Q, $R, \ldots$-t, individuumkonstansokra $a, b, c, \ldots$-t stb.
Amennyiben az $\mathcal{L}$ nyelvet individuumkonstansoknak például egy C halmazával bővítjük, akkor az új nyelvet így jelöljük: $\mathcal{L}(C)$.

Néhány, a matematikai gyakorlatból ismert, fontosabb nyelv nemlogikai jelei és típusa:

Példák

1. *Rendezés*
   relációjel: $<$
      típusa: $\langle;\ 2\rangle$

2. *Boole-algebra*
   függvényjelek: $+,\ \cdot,\ -$, 0, 1
      típusa: $\langle 2, 2, 1, 0, 0; \rangle$

3. *Csoport*
   függvényjelek: $+,\ -$, 0
      típusa: $\langle 2, 1, 0; \rangle$
   vagy
   függvényjelek: $+$, 0
      típusa: $\langle 2, 0; \rangle$

4. *Rendezett test*
   függvényjelek: $+,\ -,\ \cdot$, 0, 1
   relációjel: $<$
      típusa: $\langle 2, 1, 2, 0, 0;\ 2\rangle$

5. *Aritmetika*
   függvényjelek: $+,\ \cdot$, S, 0 (ahol S a rákövetkezés jele)
   relációjel: $<$
      típusa: $\langle 2, 2, 1, 0;\ 2\rangle$

6. *Gráfelmélet*
   relációjel: E
      típusa: $\langle;\ 2\rangle$

Definiáljuk a nyelvekhez tartozó harmadik kategóriát, a nyelv jeleiből képezett „értelmes” véges jelsorozatokat, a *formulákat*, tehát a nyelv (szűkebb értelemben vett) **szintaxisát**.

Először a *függvényszerű kifejezések* (röviden: *kifejezések*), azaz a *termek* fogalmát definiáljuk (indukcióval).

3. Definíció. A *termek* pontosan a következő (i)–(ii) szabályok véges sokszori alkalmazásával nyert véges jelsorozatok:

(i) Az individuumváltozók és az individuumkonstansok termek.

(ii) Ha f n argumentumú függvényjel, és $t_1, t_2, \dots t_n$ tetszőleges termek, akkor az $ft_1t_2\dots t_n$ jelsorozat term.

Az elsőrendű formula úgynevezett prefix fogalmának (induktív) definíciója:

4. Definíció. A *formulák* pontosan a következő (i)–(iv) szabályok véges sokszori alkalmazásával nyert véges jelsorozatok:

(i) Ha P n argumentumú relációjel, és $t_1, t_2, \dots t_n$ tetszőleges termek, akkor a $Pt_1t_2\dots t_n$ jelsorozat formula, speciálisan az állításkonstans (nullaváltozós relációjel) is formula.

(ii) Ha t_1 és t_2 termek, akkor $=t_1t_2$ formula.

(iii) Ha α és β formulák, akkor a $\neg\alpha$, $\wedge\alpha\beta$, $\vee\alpha\beta$, $\to\alpha\beta$, $\leftrightarrow\alpha\beta$ jelsorozatok mindegyike formula.

(iv) Ha α formula, és x tetszőleges individuumváltozó, akkor a $\exists x\alpha$ és $\forall x\alpha$ jelsorozatok formulák.

5. Definíció. Az előző definíció szerinti (i) és (ii) alakú formulák az *atomi formulák*. Ha egy formula atomi formula, vagy atomi formula negáltja, akkor *literálnak* nevezzük, literálok véges diszjunkcióit *klózoknak* hívjuk.

A termek definíciója a matematikai gyakorlatból, a halmazelméletből jól ismert „összetett függvény” képzésével analóg, és a formula definíciója is ezzel rokonítható. Utóbbinál természetesen vigyázni kell arra, hogy relációjel argumentumába csak term írható. Szokás szemléltetni a formulák szerkezetét úgynevezett *formációfákkal*, ezt most nem részletezzük. Jegyezzük meg, hogy *elsőrendű formulák esetén csak individuumváltozókat lehet kvantálni* (azaz kvantorral ellátni), tehát például függvény- és relációjeleket nem. Amikor a nyelvben csak a $\neg$, $\wedge$, $\exists$ logikai konstansok fordulnak elő (tehát a nyelv szűkített), akkor (iii)-nál és (iv)-nél értelemszerűen csak a $\neg\alpha$, $\wedge\alpha\beta$, $\exists x\alpha$ formulák képzése megengedett.

Bebizonyítható a következő, a formula fogalmával kapcsolatos alapvető tétel:

6. Tétel. Igazak a következő (i) és (ii) állítások:

(i) A formulák halmaza *rekurzív* (azaz eldönthető) halmaz.

(ii) Igaz a formulák egyértelmű olvashatósága.

A tételt nem bizonyítjuk. A (ii) állítás másképpen azt jelenti, hogy bármely formula a definíciója szerinti szabályok alkalmazásával csak egyféleképpen állítható elő, másképpen „*egyértelműen dekódolható*”. Az (i) állítással kapcsolatban emlékeztetünk a rekurzivitás (eldönthetőség) **intuitív** jelentésére:

Egy H **halmaz** A **részhalmaza rekurzív (eldönthető)**, *ha létezik olyan algoritmus, amely* H *bármely eleméről véges sok lépésben „eldönti”, eleme-e* A*-nak, vagy sem.*

Ennél gyengébb fogalom a rekurzív felsorolhatóság:

Egy H halmaz A részhalmaza **rekurzív felsorolható (félig eldönthető)**, *ha létezik olyan algoritmus, hogy* H *bármely a eleme esetén azt a tényt, hogy a eleme* A*-nak, véges sok lépés után jelzi (de ha a nem eleme* A*-nak, ezt nem feltétlenül adja meg).*

A továbbiakban a rekurzív, illetve eldönthető, valamint a rekurzív felsorolható, illetve félig eldönthető terminológiákat majd egymás szinonimájaként használjuk.
A tétel (i) állítása tehát azt jelenti, hogy az „abc” bármely véges jelsorozatáról eldönthető, hogy formulája-e a nyelvnek, vagy sem.

Röviden kitérünk az elsőrendű logikánál egyszerűbb logikára, az „**állításlogikára**” (nulladrendű logikára). E logikában *nincsenek változók, függvény- vagy relációjelek, kvantorok, és nincs egyenlőség*. Mégis e speciális logika igen nagy jelentőségű.

7. Definíció. *Az állításlogika „abc”-je* az elsőrendű logika „abc”-jének az a része, amelyben csak az *állításlogikai jelek*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ és az *állításkonstansok* (azaz 0 argumentumú relációjelek) szerepelnek.

Állításlogikai nyelv esetén felesleges típusról beszélni. Vagy például termek az állításlogikában értelemszerűen nincsenek. Az állításlogika formuladefiníciója szintén indukcióval történhet, az elsőrendű definíció lépései közül nincs szükség mindegyikre. Az alábbi definícióban a *formula* végig *állításformulát* jelent:

8. Definíció. Az *állításformulák* a következő (i)–(ii) szabályok véges sokszori alkalmazásával nyert véges jelsorozatok:

(i) Az állításkonstansok formulák.

(ii) Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha$, $\wedge\alpha\beta$, $\vee\alpha\beta$, $\rightarrow\alpha\beta$, $\leftrightarrow\alpha\beta$ mindegyike formula.

Megjegyezzük, hogy a formula definícióját „induktivitása” miatt szokták a programozási nyelvek metanyelvéből ismert „::=” jelölés segítségével is leírni, például *állításformulák* esetén így:

formula ::= atomi formula,
formula ::= $\neg$ formula,
formula ::= formula1 $\wedge$ formula2
stb.

1.1.2 A formulákról

Jelen részben először az elsőrendű formulákkal kapcsolatos néhány további fontos fogalmat sorolunk fel. Ezután a formulák (termek) gyakorlati írásmódjával, az úgynevezett *infix* írásmóddal ismerkedünk (szemben az előző részben ismertetett úgynevezett *prefix* írásmóddal, amely elméleti és számítógépes alkalmazásra előnyös). Végül *példákat* mutatunk.

Adott formula esetén azokat a formulákat, amelyeket a formula képzéséhez a formula definíciója szerint felhasználunk, az adott formula *részformuláinak* nevezzük. Adott egzisztenciális vagy univerzális kvantor *hatáskörén* a 4. Definíció (iv) lépése szerinti α *részformulát* értjük, azaz azt a formulát, amellyel az illető kvantort és változót összekapcsoljuk újabb részformulává.

Tekintsük az x individuumváltozó egy konkrét előfordulását egy formulában. x ezen előfordulása *kötött*, hogyha valamely olyan részformulában található, amelyik azonos egy x-re vonatkozó kvantor hatáskörével (tehát x itt kvantált). Ellenkező esetben x ezen előfordulása *szabad* (tehát x itt nem kvantált).

9. Definíció. Egy adott x individuumváltozó adott φ formulában *kötött*, ha x valamennyi előfordulása kötött, tehát x csak kvantáltan fordul elő. Ellenkező esetben x *szabad* az adott φ formulában.

Ha egy formulában nincs szabad individuumváltozó, akkor a formulát *mondatnak* is nevezzük, vagy azt mondjuk, hogy a formula *zárt*. Ellenkező esetben a formula *nyílt*.

Ha φ nyílt formula az x_1, $x_2, \ldots x_n$ szabad változókkal, akkor azt mondjuk, hogy $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \varphi$ egy *egzisztenciális lezárása* φ-nek, jelölése $\exists\varphi$. φ egzisztenciális lezárásai tehát a kvantorok sorrendjében különbözhetnek egymástól. Ha ilyen sorrendet nem adunk meg, akkor feltételezzük, hogy a sorrend tetszőleges, de rögzített. Hasonlóan, beszélhetünk egy formula *univerzális lezártjáról*, $\forall\varphi$-ről is.

10. Definíció. Legyen x szabad változója egy φ formulának, legyen u egy másik individuumváltozó, és tegyük fel, hogy x egyetlen szabad előfordulása sem esik u-ra vonatkozó kvantor hatáskörébe. Azt a műveletet, amikor x *valamennyi szabad előfordulásánál* x helyébe az adott u változót írjuk, az x változó u-val történő *helyettesítésének* (megengedett helyettesítésnek) nevezzük.

Tehát egy szabad változónak egy másik változóval történő helyettesítése *megengedett*, ha helyettesítés után a helyettesített változó sehol sem válik kötötté.

Általánosabban, az x szabad változó helyébe termet is helyettesíthetünk, ha x nem esik a term argumentumaiban szereplő változók egyikére vonatkozó kvantor hatáskörébe sem.

11. Definíció. Egy adott Q kvantor (tehát $\exists$ vagy $\forall$) utáni x individuumváltozó *kicserélhető* egy u individuumváltozóra a kvantor hatáskörében szereplő valamennyi előfordulásával együtt, ha u nem szerepel a Q kvantor hatáskörében.

Felhívjuk a figyelmet helyettesítés és csere közötti néhány fontos különbségre: Szabad változót nem cserélhetünk, kötött változót pedig nem helyettesíthetünk. Továbbá, míg a *helyettesítés szabad változóra és az egész formulára vonatkozik*, addig a *csere* kötött változóra vonatkozik, és vonatkozhat csak részformulára.
Később megmutatjuk, hogy cserénél tulajdonképpen csak egy „**átjelölés**” történik, az új formula logikailag **„ekvivalens” az eredetivel**. Helyettesítésnél viszont egy formulához egy **másik formulát** rendelünk, amelyik általában logikailag **„nem ekvivalens” az eredetivel**.

Megjegyezzük, hogy a formulák kötött, illetve szabad változóinak szerepe hasonlít a programozási nyelvek eljárásainál a lokális, illetve input paraméterváltozók szerepéhez (az előbbiekhez kívülről nem lehet hozzáférni, az utóbbiaknak viszont kívülről adunk át értéket), vagy hasonlít a paraméteres integrálok esetén az integrációs változó, illetve paraméterváltozó szerepéhez.

* * *

Ezután a termek, formulák egy a *matematikai gyakorlatból már ismert lehetséges másik írásmódjáról, az infix írásmódról* lesz szó, szemben az első részben definiált prefix írásmóddal. Azonban tekintettel arra, hogy *az infix írásmód jól ismert a matematikai gyakorlatból, a definíciókat már nem részletezzük.*

A *legfontosabb különbség* a két írásmód között az, hogy a kétváltozós függvényeknél vagy relációknál nem előre, hanem az argumentumjelek közé írjuk a relációvagy függvényjeleket. Például $<xy$ helyett $x<y$-t írunk, vagy $+xy$ helyett $x+y$-t, általánosan Rxy helyett xRy-t, fxy helyett xfy-t írunk. Ezt az írásmódot infix írásmódnak nevezzük.

Az infix írásmód zárójelek és vesszők használatát teszi szükségessé, tehát a nyelv „abc”-jét bővítjük a (,), és , jelekkel (bal zárójel, jobb zárójel, vessző). Hiszen zárójelek nélkül a termek és formulák olvasata nem lenne egyértelmű (például $2 + 3 \cdot 4$ jelenthetné $2 + (3 \cdot 4)$-et, de $(2 + 3) \cdot 4$-et is). A term és formulafogalom definiálható infix írásmódra is. Például a 4. Definíció (iii) és (iv) része így módosul:

(iii)' Ha α és β formulák, akkor a $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ jelsorozatok mindegyike formula.

(iv)' Ha α formula, és x tetszőleges individuumváltozó, akkor a $\exists x\alpha$ és $\forall x\alpha$ jelsorozatok formulák.

Infix írásmódnál termek esetén az argumentumokat gyakran zárójelekkel szoktuk elválasztani a term jelétől, és vesszőkkel választjuk el őket egymástól, például így: $f(x, y, \log z)$ (itt f függvénykonstanst jelöl, de úgynevezett másodrendű nyelveknél jelölhet függvényváltozót is).

A zárójeles írásmód hátránya, hogy a formulák, termek túlzsúfoltak zárójelekkel. Ezért a felesleges zárójeleket (azaz az egyértelmű olvashatóságot nem befolyásoló zárójeleket) igyekszünk elhagyni. Például a $((x = y) \vee (y = z))$ formula olvasata így is egyértelmű: $x = y \vee y = z$. Természetesen léteznek zárójelek, amelyeket nem lehet elhagyni, például az $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$ vagy a $\neg(\alpha) \vee \beta$ formuláknál a zárójel elhagyása után a formulák olvasata nem egyértelmű.

Ahhoz, hogy *további zárójeleket hagyhassunk el*, *precedenciaszabályokat*, azaz *elsőbbségi szabályokat* vezetünk be. Ezek:

- A kétargumentumú logikai konstansok *elsőbbségi (precedencia) sorrendje*:
  $$\wedge,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow$$
  (tehát legszorosabban az $\wedge$ köt, leggyengébben a $\leftrightarrow$).
- Az 1 argumentumú logikai konstansok, azaz a $\neg$, $\exists$ és $\forall$ *erősebbek* bármely 2 argumentumúnál.
- Az azonos kétargumentumú logikai konstansok egymás közötti elsőbbségét a *balról jobbra szabály rendezi*. Ez a szabály azt jelenti, hogy először mindig a bal oldali formulát tekintjük külön műveleti komponensnek.

Utóbbi szabálynak csak az implikációnál lesz jelentősége, az egyéb műveletek „asszociativitása” miatt. E szabály értelmében:

$$\alpha \to \beta \to \gamma \text{ jelentése: } \alpha \to (\beta \to \gamma).$$

A precedenciaszabályok birtokában a zárójel nélküli $\alpha \wedge \beta \vee \gamma$, illetve $\neg\alpha \vee \beta$ formulák olvasata már egyértelmű: $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$, illetve $(\neg\alpha) \vee \beta$.

Nemlogikai jeleket tartalmazó kifejezések vagy formulák esetén mindig e *jelektől függően* kell speciális elsőbbségi szabályokat megállapítani (aritmetika, Boole-algebrák stb.). Például tudjuk, hogy az aritmetikában a szorzás erősebb, mint az összeadás, ezért $2 + 3 \cdot 5$ olvasata $2 + (3 \cdot 5)$.

Zárójelek használata azonban a precedenciaszabályok bevezetése után is megengedett, sőt szükséges. Például az aritmetikában $2+3\cdot 5$ helyett írhatunk a *nyomatékosítás kedvéért* $2+(3\cdot 5)$-öt is, vagy $\sin x\cdot y$ helyett $(\sin x)\cdot y$-t, tehát a *„felesleges" zárójelek használata megengedett*. Ha pedig *meg kívánjuk változtatni az eredeti precedencia-sorrendet*, akkor $(2+3)\cdot 5$-öt írunk. Például $\sin(x\cdot y)$-t zárójelezés nélkül nem is tudnánk infix írásmódban leírni.
Megjegyezzük, hogy hasonlóan ahhoz a matematikai gyakorlathoz, amikor például egy háromváltozós függvényt $f(x,y,z)$-vel jelölünk, például egy *adott α formulát, amelynek szabad változói pontosan x, y és z, jelölhetünk informálisan $\alpha(x,y,z)$-vel.* Ezt a jelölést használva, ha u megengedett helyettesítés x helyébe, akkor a helyettesítés eredményét *informálisan* így is jelölhetjük: $\alpha(x/u,y,z)$, vagy egyszerűen így: $\alpha(u,y,z)$.

Végül *összefoglalásul* megállapíthatjuk a következőket. Az általunk eredetileg definiált prefix írásmód előnye, hogy minden további kiegészítés nélkül lehetővé teszi a formulák *egyértelmű olvashatóságát* (6. Tétel (ii)). A prefix írásmód elméleti célokra, illetve számítógép számára egyszerű és kielégítő. Azonban a prefix formulák „kézi használatnál" nehezen áttekinthetőek, ilyenkor az infix írásmód a használatos.

A továbbiakban azt a *kettősséget* fogjuk követni, hogy elméleti célokra (például bizonyításoknál) inkább a prefix írásmódot, míg kézi számolásoknál inkább az infix írásmódot használjuk. A továbbiakban *feltételezzük*, hogy az infix alakú formulák csupán informálisak, és *mögöttük tulajdonképpen prefix alakú formulák állnak, feltételezzük azt, hogy az infix alak a prefix írásmódnak csupán áttekinthető rövidítése.*

A következőkben néhány *példával illusztráljuk* a tanult fogalmakat. A formulák *infix* alakban adottak.

1. Példa. $\neg\neg Py\to\neg Qy\vee Ry\to Ry$.

Az elsőbbségi szabályokat alkalmazva a formula egy zárójelezett alakja a következő: $\neg\neg Py\to((\neg Qy\vee Ry)\to Ry)$.
Prefix alakja: $\to\neg\neg Py\to\vee\neg Qy\,Ry\,Ry$.
Részformulák a következők: Py, Qy, Ry (atomi formulák), $\neg Py$, $\neg Qy$ (literálok, az atomi formulákon kívül), $\neg\neg Py$, $\neg Qy\vee Ry$, $\neg Qy\vee Ry\to Ry$.
A formula nyílt, 1 darab szabad változóval, y-nal.

2. Példa. $\exists y(x\cdot y\le 0)$.

Prefix alakja: $\exists y\le\cdot x\,y\,0$.
1 darab részformula: $x\cdot y\le 0$.
A 0 individuumkonstans.
y bármely változóval cserélhető, kivéve x-et, például z-vel cserélve: $\exists z(x\cdot z\le 0)$.

x bármely változóval helyettesíthető, kivéve y-t. Például x-et u-val helyettesítve a $\exists y(u \cdot y \leq 0)$ formulát kapjuk.

3. Példa. $\forall x \forall y(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$.

A prefix alak: $\forall x \forall y = \cdot x Sy + \cdot xyx$.
Részformulák: $x \cdot Sy = x \cdot y + x$, $\forall y(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$.
Az individuumváltozókon kívül termek: Sy, $x \cdot Sy$, $x \cdot y$, $x \cdot y + x$.
A formula zárt, azaz mondat, y nem cserélhető x-re, és fordítva.

4. Példa. $\forall x(\neg x = 0 \to \exists y(y \cdot x = 1))$.

Prefix alak: $\forall x \to \neg = x0\exists y = \cdot yx1$.
Részformulák: $x = 0$, $y \cdot x = 1$, $\neg x = 0$, $\exists y(y \cdot x = 1)$, $\neg x = 0 \to \exists y(y \cdot x = 1)$.
Termek: x, y, $y \cdot x$, a 0 és 1.
A formula zárt. $\exists y$ hatásköre az $y \cdot x = 1$ részformula, $\forall x$ hatásköre pedig a rákövetkező egész formula. y nem cserélhető le x-re, és fordítva: $\neg x = 0$-ban cserélhető x az y-ra, $y \cdot x = 1$-ben pedig nem, de például y és x is cserélhető z-re.

5. Példa. $\exists v(\forall x(Px \to Qxy) \wedge (Rx \vee Suv))$.

Prefix alak: $\exists v \wedge \forall x \to Px\, Qxy \vee Rx\, Suv$.
A formula részformulái: Px, Qxy, Rx, Suv (atomi formulák), $Px \to Qxy$, $\forall x(Px \to Qxy)$, $Rx \vee Suv$, $\forall x(Px \to Qxy) \wedge (Rx \vee Suv)$.
A formula nyílt, szabad változói: x, y és u. Jelölhetjük ezért a formulát például $\varphi(x, y, u)$-val. x kötött a $\forall x(Px \to Qxy)$ részformulában, szabad a $Rx \vee Suv$ részformulában.
Nem megengedett helyettesítések: y/x, y/v, x/v, u/v. De például megengedett helyettesítések: y/u, y/z, x/y, x/u, x/z, u/x, u/y, u/z.
x nem cserélhető y-ra, és v nem cserélhető x, y és u-ra.
Megjegyezzük, hogy ha például az eredeti formulából elhagyjuk a zárójeleket, akkor a következő formulával ekvivalens, egészen más értelmű formulát kapjuk: $\exists v \forall x\, Px \to ((Qxy \wedge Rx) \vee Suv)$

6. Példa. $\exists x \forall x(\exists y\, Q(f(x, y), z) \vee R(g(x), y, a)) \to \exists x \forall z(x = y) \to P(c)$*, ahol a és c individuumkonstansok.*

A relációkban összetettebb termek szerepelnek, használjuk ezért a függvény- és relációjelek után a zárójeleket.
A formula szabad változói: y és z, noha mindkettő egy-egy részformulában kötötten is előfordul.

A formula elején $\exists x \forall x$ szintaktikailag megengedett, de később látni fogjuk, hogy $\exists x$ felesleges.

A formulában szereplő termek, amelyek nem individuumváltozók: a, c, $f(x,y)$, $g(x)$

Nem megengedett helyettesítések: z/y, z/x, y/x, y/z, ezért y és z helyébe például $f(x,y)$ vagy $g(x)$ helyettesítése sem megengedett.

y nem cserélhető x-re vagy z-re, z nem cserélhető x-re vagy y-ra, x nem cserélhető z-re, y-ra.

1.1.3 Indukció, rekurzió

Jelen részben a könyvben gyakran használt két definíciós (és bizonyítási) technikát tárgyalunk, az *indukció* és a *rekurzió* módszerét. Már e részben is alkalmaztuk e technikákat, alábbi példáink éppen a fejezet eddigi definícióira építenek, az utóbbi definíciókat alappéldákként tekintjük majd. Jelen rész első olvasáskor ki is hagyható úgy, hogy olvasására akkor térünk vissza, amikor az itt szereplő fogalmakkal találkozunk később.

A következő meghatározás már ismert matematikai tanulmányainkból.

12. Definíció. Tegyük fel, hogy adott egy U halmazon függvények (műveletek) egy összessége, és hogy B részhalmaza U-nak. Ekkor U-nak a B részhalmazt tartalmazó legszűkebb azon D részhalmazát, amelyik szintén zárt az adott függvényekre (műveletekre) nézve, a B halmazból az adott függvények (műveletek) által *generált* halmaznak nevezzük.

Megmutatható, hogy ilyen D halmaz létezik és egyértelmű. D-t a B halmaznak az adott függvényekre nézve vett *induktív lezárásának* is nevezik. Általánosítható a definíció úgy, hogy U-n értelmezett *műveletek* helyett U-n értelmezett *relációkból* indulunk ki. Használva a fenti definíció elvét, igazolható, hogy például a 3. Definícióval *ekvivalens* definíció a következő:

A termek összessége a nyelv véges jelsorozatainak azon legszűkebb D részhalmaza, amelyik tartalmazza az individuumváltozókat és individuumkonstansokat, és teljesíti azt a feltételt, hogy ha $t_1,\dots t_n$ *D-beli, és* f n *argumentumú függvényjel, akkor* $ft_1,\dots t_n$ *is D-beli.*

Megjegyezzük, hogy a generált halmaz fenti általános 12. Definíciójának is létezik olyan változata, amely viszont a termek eredeti 3. Definíciójával állítható párhuzamba, ezt itt most nem részletezzük.

A fenti 12. Definícióhoz kapcsolódik a matematikában gyakran alkalmazott, alábbi nyilvánvaló tulajdonság, amelyet *indukciós elvnek* hívunk (nem tévesztendő össze a természetes számok szerinti teljes indukcióval):

Indukciós elv a) *Ha D a B halmazból adott függvények segítségével generált halmaz (D, $B \subseteq U$), valamint ha egy $B \subseteq C \subseteq D$ tulajdonságú C halmaz zárt a generáló függvényekre, akkor $C = D$.*

A továbbiakban is tegyük fel, hogy D a B halmazból adott függvények által generált halmaz. Sokszor használjuk az indukciós elv következő változatát:

Indukciós elv b) *Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbi* (i) *és* (ii) *feltételek:*

(i) *B minden eleme rendelkezik valamely K tulajdonsággal,*

(ii) *a D-t generáló függvények megőrzik a K tulajdonságot (tehát ha az $a_1, \ldots a_m$ elemek K tulajdonságúak, és $t(x_1, \ldots x_m)$ egy generáló függvény, akkor a $t(a_1, \ldots a_m)$ elem is K tulajdonságú).*

Ekkor a B által generált D halmaz is rendelkezik a K tulajdonsággal.

Az indukciós elv segítségével tehát a K tulajdonság *kiterjeszthető* B-ről D-re. Az indukciós elvet felhasználhatjuk további definíciók, valamint bizonyítások céljára. Speciálisan, ha B az atomi formulák összessége, a függvények a logikai műveletek, D pedig az összes formulák összessége, akkor az *indukciós elv b) változatát formulaindukciónak* nevezzük.

Tehát a formulaindukció szerint, tegyük fel, hogy valamely K tulajdonság

(i) *igaz atomi formulákra, valamint*

(ii) *igazsága öröklődik tetszőleges α és β formulákról a $\neg\alpha$, $\wedge\alpha\beta$, $\vee\alpha\beta$, $\rightarrow\alpha\beta$, $\leftrightarrow\alpha\beta$, $\exists x\alpha$ és $\forall x\alpha$ formulákra.*

Ekkor a K tulajdonság igaz minden formulára.

Másik gyakran alkalmazott elv a matematikában a *rekurzióval* történő definíció, amikor szintén a 12. Definícióra, de annak speciális esetére, a „szabadon generált” D halmaz fogalmára építünk. Ez utóbbi fogalmat itt nem részletezzük, de megmutatható, hogy például az állításformulák összessége „szabadon generált” az állításszimbólumokból az állításműveletek által (de például egy tetszőleges csoport valamely tetszőleges B részhalmaza által generált csoport már általában nem szabadon generált, lásd még a 6.1 alfejezetet).

A „*művelettartó függvény*” fogalmával már találkoztunk matematikai tanulmányaink során. Például egy kétváltozós, valamely H halmazon értelmezett h függvény művelettartó a szintén kétváltozós $+$-szal jelölt műveletre nézve, ha $h(a+b) = ha + hb$ minden $a, b \in H$ elemekre.

A *rekurzióval történő definíciónak*, másképpen *függvények rekurzióval történő kiterjesztésének*, a következő, könnyen igazolható állítás az alapja:

Rekurzióelv (kiterjesztés rekurzióval). *Tekintsünk egy tetszőleges B halmaz által bizonyos adott függvényekre nézve „szabadon generált" D halmazt és egy tetszőleges f függvényt B-n. Ekkor*

(i) *ha B-n f műveletartó bizonyos adott műveletekre, továbbá*

(ii) *f egyértelműen kiterjeszthető D-re,*

akkor kiterjesztése is műveletartó ezen műveletekre D-n.

Tekintsük *példaként* a formulák *hosszának* definícióját. Tegyük fel, hogy a nyelv állításnyelv, tehát csak az állításkonstansokat és a $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ logikai műveleteket tartalmazza. Említettük, hogy ekkor a formulák összessége „szabadon generált".

A formulák L *hosszának* egy lehetséges definíciója:

(i) $L(\varphi) = 1$, ha φ atomi formula,

(ii) $L(\neg\varphi) = 1 + L(\varphi)$, ahol φ tetszőleges formula, illetve
$L(\varphi * \psi) = 1 + L(\varphi) + L(\psi)$, ahol φ és ψ tetszőleges formulák, és $*$ a $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ műveletek bármelyike lehet.

Az individuumváltozók szabad (illetve kötött) előfordulásának, valamint a helyettesítés és csere műveleteinek *formális definíciója* szintén rekurzióval történhet, ennek meggondolását az Olvasóra bízzuk.

2. FEJEZET

A LOGIKA HALMAZELMÉLETI FELÉPÍTÉSE

A logika, a matematika a fizikai valóság egy-egy szeletét a maga sajátos eszközeivel vizsgálja. Egyik ilyen lehetséges eszköz a *szemantika*, amikor a valóság egy szeletét egy *halmazzal és a halmaz elemei között fennálló bizonyos relációkkal* modellezzük. Célul tűzzük ki, hogy az ezen relációkkal kapcsolatos lehetséges (elsőrendű logikai) állítások igazságát megállapítsuk. A szóban forgó halmaz és a vizsgált relációk együttesét struktúrának nevezzük. A logika *másik lehetséges eszköze* a bizonyításelmélet (lásd 3. fejezet), amikor is formális következtetések alkalmazásával nyerünk tételeket. A *szemantikai és a bizonyításelméleti út esetén is szükség van egy rögzített $\mathcal{L}$ formális nyelvre*, amelyen a matematikai állításainkat megfogalmazzuk.
Jelen fejezetben a logika (matematika) szemantikájának alapfogalmaival foglalkozunk, illetve ehhez kapcsolódó néhány témakört érintünk.

2.1 Struktúra, igazság, formalizálás

2.1.1 Struktúra

Matematikai tanulmányaink nagy része egy-egy rögzített struktúra vizsgálatából állt. Jelen részben a struktúra (elsőrendű struktúra) általános fogalmával foglalkozunk.

Először emlékeztetünk a matematikai tanulmányainkból már ismert *reláció* és *függvény* fogalmakra. Egy A halmazon értelmezett valamely n argumentumú R *reláción* az n-szeres $A \times A \times \ldots \times A$ Descartes-szorzat egy rögzített *részhalmazát* értjük.

Ha az $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$ sorozatra $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle \in R$, akkor azt mondjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots a_n$ *elemek relációban vannak egymással* R szerint, vagy másképpen, R *igaz* $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$-re.

Emlékeztetünk arra, hogy minden n argumentumú f függvény egy speciális $n + 1$ argumentumú reláció, nevezetesen „*grafikonjának*” F relációja, tehát $f(a_1, a_2, \ldots a_n) = b$ akkor és csak akkor, ha $\langle a_1, a_2, \ldots a_n, b \rangle \in F$.

A relációk *halmazok* (másképpen „igazsághalmazok”), ezért definíció szerint nem rendelkeznek „igazságértékekkel”. Azonban a relációk *másik lehetséges definíciója* az lehetne, hogy egy reláció „igazságértékek” (igaz és hamis) hozzárendelése az $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$ n-esekhez. Például, ha P a természetes számok N halmazán értelmezett „páros szám” reláció, akkor P, definíció szerint, a páros számok *részhalmaza*, és *nem* „igazságértékeknek” (hamis, igaz) egy olyan hozzárendelése a természetes számokhoz (azaz egy olyan függvény), hogy Px „igaz”, ha x páros (jelölésben $Px = \uparrow$), és Px „hamis”, ha x páratlan ($Px = \downarrow$). E két megközelítés természetesen ekvivalens, jelen példánál $x \in P$ fennáll pontosan akkor, ha az „x páros” állítás „igaz”.

Halmazként kezelni a relációkat technikailag egyszerűbb és természetesebb, azonban intuitíve és a matematikai logika szempontjából sokszor a másik megközelítés a természetesebb (például természetesebb azt mondani, hogy $2 < 3$ „igaz”, mint azt, hogy a $\langle 2, 3 \rangle$ sorozat benne van a $<$ reláció igazsághalmazában).

Ezért a továbbiakban azt a kettősséget választjuk, hogy **a terminológia és jelölés szintjén használjuk azt, hogy „igaz” vagy „hamis”**, de arra gondolva, *hogy e formalizmus mögött a tartalom az, hogy „eleme” vagy „nem eleme” a relációnak (az „igazsághalmaznak”)*. Ez a kettősség végigvonul majd egész tárgyalásunkon.

Tehát $R(a_1, a_2, \ldots a_n) = \uparrow$ azt fogja *jelölni*, hogy az $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$ sorozat eleme az R relációnak, és *azt mondjuk*, hogy R „igaz” $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$-re, tehát $R(a_1, a_2, \ldots a_n)$ egy igazságértéket jelent.

Tegyük fel, hogy adott egy $\mathcal{L}$ μ típusú elsőrendű nyelv, amely az $f_1, f_2, \ldots$ függvény- és P_1, $P_2, \ldots$ relációjeleket tartalmazza.

1. Definíció

Egy μ típusú *struktúrán* értjük a következő $\mathcal{A}$ sorozatot:

$$\mathcal{A} = \left\langle A, f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \ldots P_1^{\mathcal{A}}, P_2^{\mathcal{A}}, \ldots \right\rangle,$$

ahol A egy nem üres halmaz, a struktúra alaphalmaza (univerzuma),

$$f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \ldots P_1^{\mathcal{A}}, P_2^{\mathcal{A}} \ldots$$

pedig rendre a nyelv μ típusának megfelelő argumentumszámú, A-n értelmezett függvények (transzformációk), illetve relációk, amelyekre azt mondjuk, hogy a nyelv függvény-, illetve relációjeleinek interpretációi.

Megállapíthatjuk, hogy egy **struktúra** tulajdonképpen **egy A halmaz és vele kapcsolatos bizonyos kitüntetett halmazok, a relációk és a függvények (mint speciális relációk) összessége.**
Ha $\mathcal{A}$ nem tartalmaz relációkat, akkor szokás **algebrának** is nevezni, ha pedig függvényeket nem tartalmaz, akkor **modellnek** is hívjuk. Azonban a struktúra és modell kifejezéseket gyakran használjuk egymás szinonimájaként is. Mivel a függvények tekinthetők relációknak is, ezért minden algebrához rendelhetünk egy vele ekvivalens modellt. Azonban ez az áttérés nem mindig természetes.

Struktúra számosságán alaphalmazának számosságát értjük. Ha nem okoz félreértést, akkor elhagyjuk az $\mathcal{A}$ felső indexeket a függvény- és a relációjelöléseknél, de emlékezetben tartjuk azt, hogy **a nyelv függvény- és relációjelei, illetve a struktúra függvényei és relációi lényegesen különböző fogalmak**. Amikor egyazon nyelvhez tartozó, de különböző struktúrákkal dolgozunk, vigyáznunk kell a konkrét függvények, relációk jelölésének megkülönböztetésére. Fontos speciális esete az interpretációnak, amikor egy nyelvbeli a individuumkonstanshoz (0 argumentumú függvényjel) A-nak egy $a^{\mathcal{A}}$ elemét rendeljük.
A matematikában használt legtöbb struktúra csak *véges sok* függvényt, illetve relációt tartalmaz, de ezt nem követeltük meg a fenti definícióban.

Feltételezzük, hogy a struktúrák már definiáltak *valamilyen módon*, tehát jelen részben nem vizsgáljuk azt, hogy hogyan jöttek létre (lehet egy struktúra közvetlenül a fizikai valóság halmazelméleti modellje, vagy adódhat más struktúrákból valamely halmazelméleti konstrukcióval, mint például a valós számok stb.).

Példákat mutatunk struktúrákra:

1. Példa. $\mathcal{L}$: $+$, $\cdot$, S, 0, $<$. *Aritmetika típusú struktúra*:

$$\mathcal{N} = \left\langle N, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, S^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}} \right\rangle,$$

ahol N a természetes számok halmaza, $+^{\mathcal{N}}$, $\cdot^{\mathcal{N}}$, $S^{\mathcal{N}}$, $0^{\mathcal{N}}$, $<^{\mathcal{N}}$ pedig rendre a szokásos összeadás, szorzás, rákövetkezés ($S^{\mathcal{N}}n = n + 1$), nulla és a rendezés N-en.

2. Példa. $\mathcal{L}$: $+\,,\ \cdot\,,\ -\,, 0, 1,\ <$. *Rendezett valós típusú struktúra*:

$$\mathcal{R} = \left\langle R,\ +^{\mathcal{R}},\ \cdot^{\mathcal{R}},\ -^{\mathcal{R}},\ 0^{\mathcal{R}},\ 1^{\mathcal{R}},\ <^{\mathcal{R}} \right\rangle,$$

ahol R a valós számok halmaza, $+^{\mathcal{R}}$, $\cdot^{\mathcal{R}}$, $-^{\mathcal{R}}$, $0^{\mathcal{R}}$, $1^{\mathcal{R}}$, $<^{\mathcal{R}}$ pedig rendre a szokásos összeadás, szorzás, mínusz (ellentettképzés), nulla, egy és a rendezés R-en.

3. Példa. $\mathcal{L}$: $+,\ \cdot,\ -,\ 0,\ 1$. *Egy Boole-algebra típusú struktúra a racionális számok „hatványhalmaz-algebrája”*:

$$\mathcal{B} = \left\langle 2^{Q},\ \cup\,,\ \cap\,,\ \sim,\ \emptyset,\ Q \right\rangle,$$

ahol Q a racionális számok halmaza, 2^{Q} ennek hatványhalmaza, a műveletek: az unió, metszet, komplementerképzés, a konstansok: az üres és az egység halmaz.

4. Példa. $\mathcal{L}$: $+,\ 0$. *„Baby aritmetika” típusú struktúra*:

$$\mathcal{N}' = \left\langle N,\ +^{\mathcal{N}'},\ 0^{\mathcal{N}'} \right\rangle,$$

ahol $+^{\mathcal{N}'}$, $0^{\mathcal{N}'}$ a szokásos összeadás és a nulla N-en.

5. Példa. *A 4. Példabeli struktúrát kiterjesztjük úgy, hogy az alaphalmaz az egész számok E halmaza legyen.* Ekkor

$$\mathcal{E}' = \left\langle E,\ +^{\mathcal{E}'},\ 0^{\mathcal{E}'} \right\rangle,$$

ahol $+^{\mathcal{E}'}$ és $0^{\mathcal{E}'}$ a szokásos összeadás és nulla E-n.

6. Példa. *Az 5. Példabeli struktúra nyelvét kibővítjük egy egyváltozós művelettel, a $-$-szal (tehát a nyelv: $+,\ -,\ 0$). Ekkor a kibővített 5. Példabeli struktúra*:

$$\mathcal{E}'' = \left\langle E,\ +^{\mathcal{E}''},\ -^{\mathcal{E}''},\ 0^{\mathcal{E}''} \right\rangle,$$

ahol $-^{\mathcal{E}''}$ a szokásos ellentettképzés E-n. Belátható, hogy $\mathcal{E}''$ szintén csoport.

7. Példa. $\mathcal{L}$: *F, I, T rendre 1, 1, 2 argumentumú relációjelek. Az $\mathcal{A}$ struktúra alaphalmaza legyen az emberek halmaza, F és I interpretációja legyen a „fiatal” és „idős” tulajdonság, T interpretációja pedig a „tiszteli az illetőt” reláció.*

Látni fogjuk, hogy az $\mathcal{A}$ struktúra például alkalmas arra, hogy a „Nem minden fiatal tiszteli az időseket” hétköznapi állítás „formalizáltját” vele interpretáljuk (lásd még e rész végén a 3. Példát).

2.1.2 Igazság

Eljutottunk oda, hogy értelmezhessük a logikai igazság egyfajta fogalmát, definiálhassuk az *„α formula igaz az $\mathcal{A}$ struktúrán”* szemantikai igazságfogalmat, utóbbi a logika egyik központi jelentőségű definíciója lesz.

A formulák közül a nyílt formulák igazságértékéről csak abban az esetben lehet majd beszélni, ha a bennük szereplő individuumváltozóknak konkrét értékeket adunk, ez esetben azt mondjuk majd, hogy a „*formula igazsága az individuumváltozók adott értékelése mellett*”.

Az $x_1, x_2, \ldots$ *individuumváltozó-sorozat értékelését az $\mathcal{A}$ struktúrán egy A-ból származó $\sigma = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ sorozattal adjuk meg*, ahol $a_i \in A$ legyen az x_i változó aktuális értéke. Ekkor a $t(x_1, x_2, \ldots x_n)$ term (függvény) aktuális értékét a σ *értékelés mellett* az összetett függvény szokásos kiértékelési szabálya definiálja, ezt az értéket röviden így jelöljük: t^σ, vagy így: $t(a_1, a_2, \ldots a_n)$ (hangsúlyozzuk, hogy ez utóbbi az $a_1, a_2, \ldots a_n$ elemek miatt *már nem a nyelv kifejezése* általában).

Amennyiben a σ értékelésről áttérünk az $\langle a_1, a_2, \ldots a_i/a, \ldots \rangle$ értékelésre, azaz x_i-t a-val értékeljük az eredeti a_i helyett, akkor ezt σ_a^i jelöli. Szoktuk a $\sigma_a^{x_i}$ vagy a σ_a^x jelöléseket is használni, amely ugyanazt jelenti, mint σ_a^i, tehát azt, hogy annyiadik helyre helyettesítjük a-t a σ sorozatban, ahányadik tag x_i (vagy x) az individuumváltozók sorozatában.

A nyelv adott α **formulája igazságának definíciója $\mathcal{A}$-n az individuumváltozók adott σ értékelése mellett** (tehát α^σ igazságának, másképpen *igazságértékelésének* definíciója) *indukcióval* történik, a formulák definíciójának megfelelően:

2. Definíció. (Igazságértékelés struktúrán.)

(i) ha $P(t_1, t_2, \ldots t_m)$ a nyelv atomi formulája, ahol $t_1, t_2, \ldots t_m$ tetszőleges termek, akkor
$P^\sigma(t_1, t_2, \ldots t_m)$ igaz akkor és csak akkor, ha $\langle t_1^\sigma, t_2^\sigma, \ldots t_m^\sigma \rangle \in P^\mathcal{A}$,

(ii) ha t_1 és t_2 termek,
$(t_1 = t_2)^\sigma$ igaz akkor és csak akkor, ha $t_1^\sigma = t_2^\sigma$,

(iii) ha α^σ és β^σ igazságértékei már adottak $\mathcal{A}$-n, akkor
$(\neg\alpha)^\sigma$ igaz akkor és csak akkor, ha α^σ hamis,
$(\alpha \wedge \beta)^\sigma$ igaz akkor és csak akkor, ha α^σ igaz és β^σ igaz,
$(\alpha \vee \beta)^\sigma$ hamis akkor és csak akkor, ha α^σ hamis és β^σ hamis,
$(\alpha \to \beta)^\sigma$ hamis akkor és csak akkor, ha α^σ igaz és β^σ hamis,
$(\alpha \leftrightarrow \beta)^\sigma$ igaz akkor és csak akkor, ha α^σ igaz és β^σ igaz, vagy α^σ hamis és β^σ hamis,

(iv) ha az $\alpha^{\sigma_a^i}$-k igazságértékei már adottak minden $a \in A$-ra, akkor
$(\exists x_i \alpha)^\sigma$ igaz akkor és csak akkor, ha van olyan $a \in A$, hogy $\alpha^{\sigma_a^i}$ igaz,
$(\forall x_i \alpha)^\sigma$ igaz akkor és csak akkor, ha bármely $a \in A$-ra $\alpha^{\sigma_a^i}$ igaz.

Ami az igazságérték *jelölését* illeti, továbbvisszük azt a konvenciót, amelyet a 2.1.1. elején említettünk a relációkkal kapcsolatban.

α igazságát az $\mathcal{A}$ struktúrán a σ értékelésre nézve így jelöljük:

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha^{\sigma} = \uparrow \ \mathcal{A}\text{-n vagy} \\ \mathcal{A} \vDash \alpha^{\sigma}\end{array}}$$

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ *kielégíti* az α formulát a σ értékelésre nézve, vagy $\mathcal{A}$ *modellje* α^{σ}-nak.

Két észrevételt teszünk a σ értékelés szerepére vonatkozóan:

- Speciálisan, amennyiben α zárt formula, akkor igazságértéke *nem függ* σ-tól. Az individuumváltozók értékelésétől *függetlenül* tehát a zárt formuláknak (mondatoknak) *van* igazságértéke egy struktúrán.
  Ezért ha α zárt, mivel σ felesleges bizonyos értelemben, a fenti $\alpha^{\sigma} = \uparrow$ jelölés mellett a *következőt is használjuk:*

$$\boxed{\overline{\alpha} = \uparrow \ \mathcal{A}\text{-n,}}$$

  ahol tehát $\overline{\alpha}$ α „igazságértékét” jelöli az $\mathcal{A}$ struktúrán.
- Ha a σ_1 és σ_2 értékelések egy α formula *szabad változóin* megegyeznek, akkor α^{σ_1} és α^{σ_2} igazságértéke is megegyezik, mint az könnyen ellenőrizhető indukcióval, a definíció fenti pontjait követve. E megjegyzés értelmében, elegendő csupán α szabad változóinak értékelését megadni σ-ból, ezért az $\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$ formula esetén *használhatjuk a következő jelöléseket* is: $\mathcal{A} \vDash \alpha(a_1, a_2, \ldots a_n)$ vagy $\mathcal{A} \vDash \alpha[a_1, a_2, \ldots a_n]$. *Vigyázzunk, itt* $\alpha(a_1, a_2, \ldots a_n)$ *vagy* $\alpha[a_1, a_2, \ldots a_n]$ *csupán jelölés, nem formula.*
  Általánosabban az is igaz, hogy egy formula igazságértéke csak a benne előforduló nemlogikai jelek interpretációitól függ.

Az alapvető 2. Definíció kapcsán egy észrevételt teszünk a *logika (matematika) halmazelméleti felépítéséről*:

A valóság ilyen módon történő matematikai tárgyalása szemléletes és természetes, gyengéje azonban, hogy általában nem algoritmizálható (tehát számítógéppel például nem kezelhető), és függ egy erős elmélettől, a halmazelmélettől. Ezért is mutatunk majd egy másik utat is a logika felépítésére, a bizonyításelméleti utat. Annak, hogy az igazságértékelés nem algoritmizálható, egyik oka az, hogy a struktúrában található relációk (függvények) általában már maguk sem feltétlenül „rekurzívak”, másik oka, hogy a kvantorok általában tetszőleges végtelen univerzumon futhatnak, ezért sem a „van”, sem a „minden” kvantor igazságértéke a definíció alapján nem meghatározható. Például tekintsük a $\varphi = \forall N \, \exists n \, (n > N \wedge P(n) \wedge P(n+2))$ formulát a természetes számokon, ahol $P(n)$ a $\forall x \forall y (n = x \cdot y \to x = 1 \vee x = n)$ formula, és jelentése az, hogy n prímszám. φ jelentése: *végtelen sok ikerprímszám létezik*. Tehát a viszonylag egyszerű φ formula a matematika máig megoldatlan problémáját takarja, a definíció alapján igazságértékét meghatározni természetesen nem tudjuk.

Röviden kitérünk a formulák igazságértékelésének speciális esetére, az **állításformulák igazságértékelésére**:

Mivel *állításlogikában* nincsenek változók, ezért állításlogikában az igazságértékelés 2. Definíciójából csak a definíció (i) és (iii) pontjaira van szükség. (i)-nél elég megadni az állitáskonstansok „igazságértékeit”, (iii)-nál pedig nincs szükség σ felső indexekre. Állításlogikában természetesen a struktúra fogalma is leegyszerűsíthető.

Az igazságértékelés (iii) pontjához tartozó definíciókat szokás *igazságtáblázatokkal* megadni. Például az $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ műveletek igazságtáblázatai rendre:

$$\begin{array}{c|cc} {}_A\backslash^B & \uparrow & \downarrow \\ \hline \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} {}_A\backslash^B & \uparrow & \downarrow \\ \hline \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} {}_A\backslash^B & \uparrow & \downarrow \\ \hline \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \downarrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

Említettük már az 1. fejezetben, hogy az implikációt mint műveletet *ne tekintsük „következtetésnek”*. A fentiek alapján, az **implikáció csupán egy olyan művelet, amely pontosan akkor hamis, ha az előtag igaz, az utótag pedig hamis**. Az implikáció definíciójának kérdésére később, az úgynevezett Dedukció tétellel kapcsolatban még visszatérünk.

* * *

Az igazság definíciójához kapcsolódó néhány fontos egyéb definíciót ismertetünk:

Gyakran van szükség arra, hogy ne csak egyetlen formula, hanem egy *formulahalmaz* igazságáról is beszélhessünk egy struktúrán (másképpen arról, hogy adott struktúra kielégíti-e formulák egy véges vagy végtelen *halmazát*, például egy axiómarendszert). Erre vonatkozik a következő definíció:

3. Definíció. *$\mathcal{L}$-beli formulák egy Σ halmaza* akkor igaz egy adott $\mathcal{A}$ struktúrán egy adott σ értékelés mellett ($\mathcal{A}$ akkor elégíti ki Σ-t az adott értékelés mellett), ha Σ *valamennyi* formulája igaz a σ értékelés mellett. Jelölése: $\mathcal{A} \vDash \Sigma^{\sigma}$.

Emlékeztetünk arra, hogy adott struktúrán egyik fontos célunk a formulák igazságértékének meghatározása. Ezzel kapcsolatos a következő definíció:

4. Definíció. (Struktúra elmélete.)

> Az $\mathcal{A}$ struktúra *elméletén*, Th$\mathcal{A}$-n, az $\mathcal{L}$ nyelv azon zárt formuláinak halmazát értjük, amelyek igazak $\mathcal{A}$-n, tehát
> $$\mathrm{Th}\mathcal{A} = \{\varphi : \overline{\varphi} = \uparrow \ \mathcal{A}\text{-n, és } \varphi \text{ zárt}\}.$$

Legyen $\mathcal{K}$ egy adott $\mathcal{L}$ nyelv típusú struktúraosztály.

5. Definíció. (Struktúraosztály elmélete.) Egy $\mathcal{K}$ struktúraosztály *elméletén* az $\mathcal{L}$ nyelv azon zárt formuláinak halmazát értjük, amelyek valamennyi $\mathcal{K}$-beli struktúrán igazak, tehát

$$\mathrm{Th}\mathcal{K} = \{\varphi : \overline{\varphi} = \uparrow \text{ minden } \mathcal{K}\text{-hoz tartozó struktúrán}\}.$$

Legyen $\mathcal{L}$ egy függvényjelmentes nyelv. Tekintsünk egy $\mathcal{L}$ típusú $\mathcal{C}$ modellt. Rendeljünk a $\mathcal{C}$ modell C' alaphalmazához egy olyan C szimbólumhalmazt, amelyik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető C'-nek, és jelölje c a c' elemnek megfelelő elemet. Emlékeztetünk arra, hogy a C-vel bővített nyelvet így jelöltük: $\mathcal{L}(C)$.

6. Definíció. A $\mathcal{C}$ *modell* $\mathcal{L}$-beli D *diagramján* értjük az $\mathcal{L}(C)$ nyelv összes lehetséges, következő tulajdonságú $P(c_1, c_2, \dots c_n)$ vagy $\neg P(c_1, c_2, \dots c_n)$ alakú zárt literáljainak olyan halmazát, hogy

$$P(c_1, c_2, \dots c_n) \in D \text{ akkor és csak akkor, ha } P(c'_1, c'_2, \dots c'_n) = \uparrow \ \mathcal{A}\text{-n},$$
$$\neg P(c_1, c_2, \dots c_n) \in D \text{ akkor és csak akkor, ha } P(c'_1, c'_2, \dots c'_n) = \downarrow \ \mathcal{A}\text{-n},$$

ahol P $\mathcal{L}$-nek összes relációjelein fut.
Pozitív diagramnak nevezzük a diagramnak azt a részhalmazát, amely az igaz formuláknak megfelelő $P(c_1, c_2, \dots c_n)$ atomi formulákból áll, tehát

$$D = \left\{P(c_1, c_2, \dots c_n) \colon P(c'_1, c'_2, \dots c'_n) = \uparrow \ \mathcal{A}\text{-n}, P \text{ relációja } \mathcal{L}\text{-nek}\right\}.$$

Tehát $\mathcal{L}(C)$ minden α atomi formulájára vagy $\alpha \in D$, vagy $\neg\alpha \in D$. Pozitív diagramról beszélünk tehát akkor, ha D $\mathcal{L}(C)$-nek csak az $\mathcal{A}$-n *igaz* atomi formuláit tartalmazza.
A diagram egy adott *modellnek a nyelvbeli (szintaktikai) „képe”*, modell és diagramja egymásnak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők.
A fenti definíció könnyen átvihető modellről (tehát függvényjelmentes struktúráról) *tetszőleges struktúrára*, $P(c_1, c_2, \dots c_n)$ helyett ekkor $\mathcal{L}(C)$-nek tetszőleges (termeket is tartalmazó) atomi formuláját kell szerepeltetni.

2.1.3 Igazsághalmazok

Ezután az elsőrendű formulák igazságértékelésének definícióját más oldalról közelítjük. Vegyük észre, hogy az igazság definíciójához egyrészt szükség volt a *formális nyelv* fogalmára, másrészt a *halmaz* fogalmára. Most a halmazelméleti kapcsolatra fordítjuk figyelmünket.

Egy konkrét struktúrában a konkrét relációk (mint „igazsághalmazok”) a nyelv relációjeleinek interpretációi. Az előző részben célként tűztük ki, hogy ezt általánosítsuk az összes formulára. Ezt valósítja meg a következő definíció:

7. Definíció. Egy $\alpha(x_1, x_2, \dots x_n)$ *formula* $[\alpha]$ igazsághalmaza az $\mathcal{A}$ *struktúrán* az individuumváltozók σ értékeléseinek azon halmaza $\mathcal{A}$-n, amelyekre $\alpha^\sigma =\uparrow \mathcal{A}$-n, tehát

$$\boxed{[\alpha] = \{\sigma : \alpha^\sigma =\uparrow \mathcal{A}\text{-n}\}}$$

Tehát tekinthetjük úgy $[\alpha]$-t, **mint az α formula interpretációját** $\mathcal{A}$-n. Emlékeztetünk a következőre:

Az $\alpha^\sigma =\uparrow$ vagy $\alpha^\sigma =\downarrow$ jelölések megfelelnek annak, hogy $\sigma \in$ vagy $\sigma \notin$ az igazsághalmaznak, tehát e jelölések az „eleme”, „nem eleme” kódolásai.

A 2.1.1-ben relációk „igazsághalmazaira” és magukra a relációkra mint „igazsághalmazokra” elmondottak általánosíthatók tetszőleges formulákra.
Egy korábbi megjegyzés értelmében, amennyiben az α formula n szabad változós, akkor α igazsága csak a benne szereplő n *szabad* individuumváltozó értékelésétől függ. Az igazsághalmazok tehát csak véges dimenziótól „függenek” (véges dimenziós halmazok úgynevezett „cilinderhalmazai” („hengerhalmazai”)). Azonban az egységesség és egyszerűség kedvéért az igazsághalmazokat mégis az *összes* individuumváltozó lehetséges σ értékelései bizonyos összességének tekintjük (végtelen sorozatok egy halmaza).

A következő tétel azt tükrözi, hogy **az igazságértékelés lépései „mögött” a halmazműveletek állnak.** Egyszerűség kedvéért most is tegyük fel, hogy az $\mathcal{L}$ nyelv nem tartalmaz más függvényeket mint individuumkonstansokat. Legyen $\mathcal{C}$ rögzített struktúra.

8. Tétel. Legyenek α és β tetszőleges formulák $\mathcal{L}$-ben. Ekkor igazak a következő állítások:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & [\neg\alpha] = \sim [\alpha], \\ \text{(ii)} & [\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cap [\beta], \\ \text{(iii)} & [\alpha \vee \beta] = [\alpha] \cup [\beta], \\ \text{(iv)} & [\exists x \alpha] = \bigcup_{c \in C} \left[\alpha^{\sigma_c^x}\right], \\ \text{(v)} & [\forall x \alpha] = \bigcap_{c \in C} \left[\alpha^{\sigma_c^x}\right], \end{array}}$$

ahol az igazsághalmazok a rögzített $\mathcal{C}$ struktúrára vonatkoznak, amelynek alaphalmaza C', a jobb oldali halmazműveletek C' megszámlálható direkt hatványán értelmezettek, a (iv) és (v)-beli jobb oldali formulák pedig $\mathcal{L}(C)$-beliek, ahol C elemei rendre a C'-beli elemek nevei.

Bizonyítás. A következő ekvivalenciáknál felhasználjuk az igazságértékelés definícióját, valamint a halmazműveletek definícióit.

(i) $\sigma \in [\neg\alpha] \Leftrightarrow \sigma \notin [\alpha] \Leftrightarrow \sigma \in \sim [\alpha]$.

(ii) $\sigma \in [\alpha \wedge \beta] \Leftrightarrow \sigma \in [\alpha]$ és $\sigma \in [\beta] \Leftrightarrow \sigma \in [\alpha] \cap [\beta]$.

(iii) $\sigma \in [\alpha \vee \beta] \Leftrightarrow \sigma \in [\alpha]$ vagy $\sigma \in [\beta] \Leftrightarrow \sigma \in [\alpha] \cup [\beta]$.

(iv) $\sigma \in [\exists x \alpha] \Leftrightarrow \sigma^x_{c'} \in [\alpha]$ valamely $c' \in C'$-re $\Leftrightarrow \sigma \in [\alpha(x/c)]$, mivel $\alpha(x/c)$-ben x kötött, és c interpretációjának neve c'. Tehát $\sigma \in \bigcup_{c \in C} [\alpha(x/c)]$. Fordítva, ha $\sigma \in \bigcup_{c \in C} [\alpha(x/c)]$, akkor $\sigma \in [\alpha(x/c)]$ valamely c-re, ezért $\sigma^x_{c'} \in [\alpha]$, vagyis $\sigma \in [\exists x \alpha]$.

(v) Hasonlóan igazolható, mint (iv).

■

Könnyű ellenőrizni, hogy *a formulák igazsághalmazai zártak az* $\cup, \cap, \sim, \emptyset$ *halmazműveletekre, ezért Boole-halmazalgebrát alkotnak, sőt az is igaz, hogy úgynevezett „cilindrikus halmazalgebrát" alkotnak* (lásd 6.1).

Megjegyezzük, hogy használva a formulák induktív definícióját, a **fenti tételben foglaltak alkalmasak arra, hogy formulák igazságértékelésére egy másik definíciót adjunk** (amely az eredetivel ekvivalens). Ugyanis atomi formulák igazsághalmazaiból kiindulva, alkalmazva a formulák induktív definícióját és a 8. Tételt, definiálhatjuk *tetszőleges* formula igazsághalmazát.

Igazsághalmazokkal kapcsolatos fontos definíció a következő:

9. Definíció. Egy tetszőleges Q ($Q \subseteq A \times \ldots \times A$) n argumentumú, az $\mathcal{A}$ struktúra A alaphalmazán értelmezett reláció *definiálható* $\mathcal{A}$-n az $\mathcal{L}$ nyelven, ha van $\mathcal{L}$-nek olyan n szabad változós α formulája, amelyre $[\alpha] \restriction A^n = Q$ (ahol $[\alpha] \restriction A^n$ jelöli az $[\alpha]$ igazsághalmaz n dimenziós korlátozását).

Egy Q reláció tehát akkor definiálható $\mathcal{A}$-n, ha pontosan „leírható" a nyelv valamely formulájával mint annak igazsághalmaza.

2.1.4 Formalizálás

Először néhány észrevételt teszünk a *struktúra* és az *igazság* fogalmának hátterével kapcsolatban (az egyszerűség kedvéért most csak zárt formulákra gondolunk):

Arról jó képünk van matematikai tanulmányainkból, hogy mit jelent az, hogy egy-egy matematikai („formalizált") állítás a matematika valamely konkrét területén igaz vagy hamis (például geometriai állítások a síkról vagy aritmetikai állítások a számokról stb.). Általában összetettebb a helyzet a *hétköznapi élet* állításait (a „hétköznapi állításokat") illetően. Érdemes erről az oldalról is megközelíteni az igazság értelmezését, ekkor a matematikai állítások igazságának fogalmát is mélyebben megértjük (a matematikai állítások is sokszor csak „kváziformalizáltak").

A „hétköznapi állításoknak” is van „logikai szerkezetük”, „elemi állításokból”, logikainak tekinthető „műveletekkel” (például „és”, „vagy”, „nem”, „létezik” stb.) jönnek létre. Ezt a logikai szerkezetet próbáljuk megragadni, amikor az *állítást egy formális nyelvre lefordítjuk*, és kapunk egy φ *formulát*. φ ekkor csak az eredeti állítás logikai szerkezetét őrzi meg, jelentése és igazságértéke nincsen.

A „hétköznapi állítások” is a valóság egy-egy szeletére vonatkoznak: bizonyos dolgok összességére és ezek közötti viszonylatokra. Mint tudjuk, utóbbiakat az elsőrendű logikában *egy halmazzal és vele kapcsolatos bizonyos relációkkal (beleértve a függvényeket is), azaz egy $\mathcal{A}$ struktúrával modellezzük.* Egy φ formula úgy nyer majd jelentést és igazságértéket a logikában, ha elemi összetevőit, azaz a benne előforduló reláció- és függvényjeleket *interpretáljuk*, vagyis *hozzájuk rendelünk egy $\mathcal{A}$ struktúrát, azaz valamely konkrét halmazon konkrét relációkat és függvényeket*. Mindez már meghatározza a φ *formula* egy lehetséges interpretációját (igazsághalmazát) és jelentését a logikában, ezen keresztül pedig zárt formulák esetén igazságértékét. φ ezen interpretációját nevezzük *szándékolt interpretációnak*.

Felvetődik a kérdés, hogy *milyen szempontok szerint választjuk ki a jelenség vizsgálatához, az állítások formalizálásához szükséges nyelvet*, azaz a nemlogikai konstansokat: a relációkat és függvényeket. Például, ha a természetes számokat kívánjuk vizsgálni, tehát a természetes számok halmaza az univerzum, akkor tekinthetjük függvénynek csak az összeadást, de hozzávehetjük a szorzást, majd a $<$ relációt is stb. Sőt elvileg felvehetnénk a természetes számokkal kapcsolatos „összes relációt” is a struktúrába. Arra a kérdésre, hogy egy adott jelenség vizsgálatához milyen nyelvet válasszunk (és ezért mennyire bő struktúrát), általánosságban azt válaszolhatjuk, hogy fel kell mérni, hogy *minek érdekében* kívánunk eredményeket nyerni. Ha összetettebb a nyelv (és ezért a hozzá tartozó struktúra), ennek ára, hogy bonyolultabb a vizsgálata. Az ismert struktúrák esetén (természetes számok, geometria, csoportok stb.) már nagyjából tudjuk, hogy egy-egy reláció elvétele vagy hozzáadása a nyelvhez (struktúrához) milyen következményekkel jár a struktúra elméletére nézve. A relációk definiálhatóságának fogalma pedig majd segít abban, hogy eldöntsük, érdemes e egyáltalán a nyelvet bővíteni ahhoz, hogy egy adott R relációt kezelni tudjunk.

Ezután két megjegyzést teszünk:

Az egyik megjegyzés, hogy a „hétköznapi állítások” *jelentésének* a logikában az felel meg, hogy a formalizált állítást, a formulát *kiegészítjük* egy interpretációjával, tehát a formula és az interpretáció együttesét (párját) tekintjük (itt bizonyos különböző alakú formulákat, az úgynevezett „logikailag ekvivalens” formulákat, azonosítjuk). Önmagában az interpretáció nem tekinthető tehát jelentésnek (például valamennyi hamis formula interpretációja az üres halmaz). A jelentés fogalmát sokféleképpen szokták modellezni a logikában, és ennek kiterjedt irodalma létezik. Például egy zárt formula jelentésének lehet tekinteni az összes olyan interpretáció együttesét is, amely mellett igaz a formula. Szükségszerű, hogy a modellezésnél a hétköznapi jelentés általában veszít információtartalmából.

A másik megjegyzés, hogy még *metaszinten* feltételeztük, hogy egy-egy „hétköznapi állítás” csak „igaz” vagy „hamis” lehet, tehát nincs harmadik lehetőség. Feltételezzük továbbá, hogy amennyiben valamilyen „logikai szerkezet” áll az állítás mögött (a hétköznapi értelemben), azaz más állításokból bizonyos logikainak tekinthető műveletekkel adódik, akkor igazsága csak ezen „logikai szerkezettől” és a résztvevő állítások igazságaitól függ, tehát például a résztvevő állítások és az egész állítás jelentésétől nem függ. Vegyük észre, hogy *mindezen feltételezéseknek az igazságértékelés általunk adott definíciója valóban megfelel*.

A konkrét hétköznapi állítások (vagy „kváziformalizált” matematikai állítások) *logikai szerkezetének, jelentésének, igazságának* modellezése a matematikában egy fontos alkalmazói feladat.

Azt a tevékenységet, amikor egy hétköznapi állításhoz magadunk egy $\mathcal{L}$ formális nyelvet, ezen pedig egy a logikai szerkezetét tükröző φ formulát, **formalizálásnak** nevezzük.

A formalizálásnak több változata is ismert. Például erősebb értelemben megengedhető, hogy az állítást nem egyetlen, hanem végtelen sok formulával formalizáljuk (abban az értelemben, hogy ezek együttese egyszerre elégüljön ki).

A formalizálás mellett másik fontos eleme a logika alkalmazásának, hogy **megadunk a választott nyelvhez és formulához egy szándékolt interpretációt**, azaz megadunk egy olyan modellt, amely tükrözi a vizsgált objektumok összességét és az azok közötti viszonylatokat. A „szándékolt interpretáció” kifejezés helyett használjuk a „standard modell” terminológiát is, főleg a modellelméletben (lásd a 4.2 alfejezet). Az is előfordulhat, hogy nincs egyetlen szándékolt interpretáció, azaz a valós életnek nem egy konkrét „szituációjáról” van szó, hanem sok ilyenről.

A következőkben példákat mutatunk formalizálásra és szándékolt interpretációk megadására. Az első feladat a másodiktól elválasztható, de ugyanakkor vele nyilván össze is függ. A feladatoknál szokásos előre megadni egy $\mathcal{L}$ formális nyelvet, amelyen a formalizálást végezzük, és amelyhez megadjuk a szándékolt interpretációt (a fentiek szerint a gyakorlatban azonban e nyelveket is nekünk kell definiálni).

Gyakori a formalizálásnál az úgynevezett korlátozott kvantorok használata. A $\forall x(Px \to \ldots)$ és a $\exists x(Px \land \ldots)$ formulákban vagy részformulákban a $\forall$ és $\exists$ kvantorokat *korlátozott kvantoroknak* hívjuk (vigyázzunk, itt $\to$ és $\land$ nem felcserélhetők). Korlátozott kvantorokkal még fogunk találkozni az 5.2 alfejezetben, a többfajtájú logikánál.

Az alábbi példáknál adja meg a Φ *(nem formalizált) állításokhoz a megadott* $\mathcal{L}$ *nyelven az állítások* φ *formalizálását és a szándékolt interpretációt, amennyiben ez utóbbi létezik* ($\mathcal{L}$-nél csupán a *nemlogikai* konstansokat adjuk meg)!

1. Példa.

Φ: *A sík bármely két pontján át fektethető egyenes.*

$\mathcal{L}$: P, E, I.

Típusa: $\langle ; 1,\ 1,\ 2\rangle$.

A φ formula:
$\forall x \forall y (Px \wedge Py \rightarrow \exists z (Ez \wedge Ixz \wedge Iyz))$.

A struktúra: A: a sík részhalmazainak összessége,
Px: x pont tulajdonságú (azaz x egy pont),
Ex: x egyenes tulajdonságú (azaz x egy egyenes),
Ixy: x illeszkedik y-ra.

Megjegyzés: A formalizált állításoknak a szándékolton kívül még sok más interpretációjuk van (ezekkel, többek között, a következő fejezetben foglalkozunk). Például a mostani példában egy másik interpretáció a következő:

A struktúra: A: egész számok,
Px: x természetes szám,
Ex: x összetett szám (nem prímszám),
Ixy: x osztója y-nak.

Nyilván, φ erre az interpretációra nézve is igaz.

2. Példa.

Φ: *Bármely pozitív ε valós számhoz van olyan N természetes szám, hogy ha az n és m természetes számok nagyobbak N-nél, akkor $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ahol a_n egy valós számsorozat.*

$\mathcal{L}$: a, abs, T, P.

Típusa : $\langle 1,\ 1;\ 1,\ 1\rangle$.

A φ formula:
$\forall \varepsilon (P\varepsilon \rightarrow \exists N (TN \wedge \forall n \forall m (Tn \wedge Tm \wedge N < n \wedge N < m \rightarrow \mathrm{abs}(a(n), a(m)) < \varepsilon)))$.

A struktúra: A: valós számok,
$\mathrm{abs}(x, y)$: $x - y$ abszolút értéke,
$a(x)$: a természetes számokon a_n, ha $x = n$, egyébként tetszőleges,
Px: x pozitív,
Tx: x természetes szám.

Megjegyzés: Figyeljük meg a megoldásban a korlátozott kvantorok használatát. Továbbá ne tévesszük össze az $\rightarrow$ és $\wedge$ műveletek szerepét. Például helytelen a következő megoldás:
$\forall \varepsilon (P\varepsilon \wedge \exists N (TN \wedge \forall n \forall m (Tn \wedge Tm \wedge N < n \wedge N < m \rightarrow \mathrm{abs}(a(n), a(m)) < \varepsilon)))$.
Ez, többek között, azt implikálná, hogy minden valós szám pozitív!

3. Példa.
Φ: *Nem minden fiatal tiszteli az időseket.*
$\mathcal{L}$: F, I, T.
Típusa: $\langle;\ 1,\ 1,\ 2\rangle$.

A φ formula:
$\neg\forall x(Fx \to \forall y(Iy \to Txy))$.
A struktúra alaphalmaza legyen az emberek halmaza,
Fx: x fiatal,
Ix: x idős,
Txy: x tiszteli y-t.

Megjegyezzük, hogy a következő közvetlenül nem formalizálása Φ-nek:
$\exists x(Fx \wedge \exists y(Iy \wedge \neg Txy))$
(Van olyan fiatal, aki egy időst nem tisztel), noha „ekvivalens” az adott formulával.

4. Példa.
Φ: *Néha bolonddá lehet tenni minden embert.*
$\mathcal{L}$: T, E, B.
Típusa: $\langle;\ 1,\ 1,\ 2\rangle$.

A φ formula:
$\exists t(Tt \wedge \forall x(Ex \to Btx))$.
Legyen a struktúra alaphalmaza az időpillanatok és az emberek diszjunkt halmazának uniója.
Tx: x egy időpillanat,
Ey: y ember,
Bxy: x időpontban y-t bolonddá lehet tenni.

5. Példa.
Φ: *10 házaspárt tekintve, egyik férfi sem táncol a saját feleségével.*
$\mathcal{L}$: A_1, $A_2, \ldots A_{10}$.
Típusa: $\langle;\ 0,\ 0, \ldots\ 0\rangle$.

A_i jelentése: az i-edik férfi a saját feleségével táncol.
A φ formula:
$\neg A_1 \wedge \neg A_2 \ldots \wedge \neg A_{10}$.
Itt a Φ állítás *véges* halmazra vonatkozik, ezért *individuumváltozók és -kvantorok alkalmazása nem szükséges a formalizáláshoz* (de nincs is kizárva). Kínálkozik, hogy *állításlogikával* modellezzünk. A valószínűségszámításban például gyakran van szükség állításlogikai formalizálásra.

6. Példa.
Φ: *Ha két nő beszélget, akkor egy harmadik csuklik.*
$\mathcal{L}$: B, C
Típusa: $\langle;\ 2,\ 1\rangle$

A φ formula:
$\forall x \forall y (Bxy \wedge x \neq y \rightarrow \exists z (Cz \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$
Legyen a struktúra alaphalmaza a nők halmaza.
Bxy: x beszélget y-nal,
Cx: x csuklik.

Megjegyzés: Az állítást állításlogikával is modellezhetjük, bár ez a modell „durvább”, mint a megadott elsőrendű modell. Ez esetben a nyelv tartalmazza a D és E állításjeleket, amelyek jelentései rendre legyenek: „két nő beszélget” és „ egy harmadik csuklik”. Ekkor a formula: $D \rightarrow E$.

7. Példa. *Mi a halmazelmélet nyelvén adott következő formula jelentése?*

$$\varphi : \forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \leftrightarrow (v = x \vee v = y))$$

A formula a páraxióma: „bármely két halmazhoz létezik egy harmadik halmaz, amelynek pontosan az adott két halmaz az elemei”.

8. Példa.
Φ: *A rögzített* $H' \subseteq [0,1]$ *valós halmaznak van legkisebb felső korlátja.*
$\mathcal{L}$: $\leq$, H.
Típusa: $\langle;\ 2,\ 1\rangle$.

Jelölje Fx a $\forall u (Hu \rightarrow u \leq x)$ formulát (Fx jelentése az, hogy x felső korlátja H-nak).
A φ formula:
$\exists x (Fx \wedge \forall y (Fy \rightarrow x \leq y)$.
A struktúra A alaphalmaza legyen a $[0,1]$ intervallum.
$\leq$: a szokásos valós rendezés,
Hx: $x \in H$.

9. Példa.
Φ: *A* $[0,1]$ *intervallum bármely részhalmazának van legkisebb felső korlátja.*

Vezessünk be a $[0,1]$ intervallum bármely H'_γ halmazához egy H_γ 1 argumentumú relációjelet, jelölje az így nyert kontinuum számosságú nyelvet $\mathcal{L}$. Jelölje a 8. Példa megoldását φ_H, és egyébként tartsuk meg a 8. Példa jelöléseit. Igazolható, hogy Φ-t nem tudjuk leírni egyetlen elsőrendű formulával, tehát a szűkebb értelemben nem formalizálható elsőrendben, de le tudjuk írni egy *végtelen* Σ formulahalmazzal:

$$\Sigma = \left\{\varphi_{H_\gamma} : H_\gamma \subseteq [0,1]\right\}$$

A szándékolt interpretáció legyen a 8. Példában bevezetett struktúra kibővítve a H'_γ interpretációkkal, jelölje ezt a struktúrát $\mathcal{A}'$.
A Σ formulahalmaz abban az értelemben írja le a Φ állítást, hogy $\mathcal{A}'$ egyszerre interpretációja *valamennyi* Σ-beli formulának.

Megjegyezzük, hogy a 8. Példát nem módosíthatjuk úgy, hogy a megoldás $\forall H\varphi_H$ legyen, ugyanis elsőrendű nyelven nincs függvény-, vagy relációváltozó, ezért függvényeket és relációkat nem lehet kvantálni. Ez a megoldás majd csak másodrendű logikában értelmezhető, és a feladatnak ez lesz a természetesebb megoldása.

10. Példa.
Φ: *Minden komplex test feletti valódi polinomnak van gyöke.*
$\mathcal{L}$: $+,\ \cdot,\ 0$.
Típusa: $\langle 2, 2, 0; \rangle$.

Most is belátható, hogy a Φ állítást véges elsőrendű formulahalmazzal nem, csak végtelen formulahalmazzal tudjuk leírni, tehát Φ szűkebb értelemben elsőrendű formulával nem formalizálható. Legyen φ_n a következő formula:

$$\forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y [x_n \neq 0 \rightarrow (x_n y^n + \ldots x_1 y + x_0 = 0)] \quad n = 1, 2, \ldots$$

φ_n jelentése az, hogy a pontosan n-ed fokú polinomoknak van gyöke.
Ekkor Φ formalizálása az általánosabb értelemben lehetséges, a

$$\Sigma = \{\varphi_n : n \in \omega\}$$

formulahalmazzal.
A struktúra alaphalmaza legyen a komplex számok halmaza, az összeadás, a szorzás és a nulla pedig a szokásos.

11. Példa.
Φ: *Az additív Abel-csoportok axiómái (asszociativitás, kommutativitás, 0 elem és inverz létezése).*
$\mathcal{L}$: $+,\ -,\ 0$.
Típusa: $\langle 2, 1, 0; \rangle$.

A φ formula:
$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z) \wedge \forall x \forall y (x + y = y + x) \wedge$
$\wedge \forall x (x + 0 = x) \wedge \forall x (x + (-x) = 0)$.
Mivel az *összes* additív Abel-csoportot kívántuk jellemezni, nincs konkrét szándékolt interpretáció.

12. Példa.
Φ: *A gráfok hurokmentessége és irányítatlansága (irreflexívitás és szimmetria).*
$\mathcal{L}$: E.
Típusa: $\langle ; 2 \rangle$.

Exy: x és y között él van.
A φ formula:
$\forall x \neg Exx \wedge \forall x \forall y (Exy \to Eyx)$.
φ szintén egy struktúraösszesség tulajdonsága, tehát nincs szándékolt interpretáció.

2.2 A logikai következmény fogalmáról

Az előző részben a logika egyik központi jelentőségű fogalmával az igazságfogalommal foglalkoztunk. Jelen részben egy másik alapvető fogalmat, a *logikai következmény* (következmény, szemantikai következmény) fogalmát tárgyaljuk (utóbbi nem tévesztendő össze az implikáció műveletével). Majd az érvényességfogalomról, kapcsolatáról a logikai következménnyel és a logikai ekvivalenciáról lesz szó.
E részben végig feltesszük, hogy adott egy rögzített $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv, valamint azt, hogy a formulák $\mathcal{L}$-beli formulák, és a struktúrák $\mathcal{L}$ típusúak.

2.2.1 Logikai következmény és kapcsolatai

1. Definíció. (Logikai következmény.)

> Egy α formula formulák egy Σ összességének *logikai következménye* (szemantikai következménye), ha minden olyan $\mathcal{A}$ struktúrára és individuumváltozó-értékelésre, amelyre Σ *minden* formulája igaz, α is igaz. Jelölése: $\Sigma \vDash \alpha$

Tehát speciálisan, *ha nincs olyan struktúra, ahol Σ minden formulája igaz, akkor α logikai következménye Σ-nak.*
Ha Σ zárt formulák halmaza, és α is zárt, akkor $\Sigma \vDash \alpha$ pontosan akkor, *ha minden olyan struktúrán, ahol Σ valamennyi formulája igaz, α is igaz.* Nem csak zárt formulákra szokás ilyen módon definiálni a logikai következmény fogalmát, ekkor a résztvevő formulák helyett azok univerzális lezártjait veszik, és erre alkalmazzák az iménti feltételt. Megjegyezzük, hogy ez a definíció nem ekvivalens az általunk adottal.

Ha α logikai következménye Σ-nak, akkor például azt mondjuk, hogy $\Sigma \vDash \alpha$ *fennáll* vagy *teljesül*. Ha Σ csak egy formulából, például φ-ből áll, akkor a logikai következményt így jelöljük: $\varphi \vDash \alpha$.

Az 1. Definíció **két ekvivalens** megfogalmazása:
$\Sigma \vDash \alpha$ akkor nem teljesül, ha valamely modellre és értékelésre Σ összes formulája igaz, de α hamis.

Vagy:
$\Sigma \vDash \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$-nak nincs modellje.

Ez utóbbi változat gyakran helyettesíti az irodalomban az 1. Definíciót. Például ezt a változatot használjuk az úgynevezett „cáfolati kalkulusok” teljességi vizsgálatainál. Vegyük észre a következőt.

> Egy adott $\Sigma \models \alpha$ következmény helyessége vagy helytelensége nem függ a benne szereplő formulák jelentésétől, csak logikai szerkezetüktől.

E tulajdonság lesz az egyik kiindulópontja a logika másik nagy fejezetének, a bizonyításelméletnek.

Megjegyezzük, hogy definíció szerint, ha egy következmény helyességét kívánjuk igazolni, akkor elvben *minden* struktúrán vizsgálnunk kell, ha pedig helytelenségét, akkor elég *egyetlen* struktúrán egy ellenpélda.

Egy *helyes* $\Sigma \models \alpha$ *logikai következményt arra „használhatunk”, hogy egy konkrét struktúrán igaz állításokat nyerjünk a segítségével* (*azt mondjuk* $\Sigma \models \alpha$-t „alkalmazzuk” egy konkrét struktúrán). Ugyanis, ha tudjuk, hogy egy $\mathcal{A}$ struktúra kielégíti Σ-t, akkor $\Sigma \models \alpha$ helyességéből, definíció szerint, következik α igazsága $\mathcal{A}$-n. $\Sigma \models \alpha$ ezért egy „erős” tulajdonság abban az értelemben, hogy nemcsak $\mathcal{A}$-n, hanem minden olyan struktúrán *alkalmazni tudjuk*, amelyik kielégíti Σ-t. Helyes $\Sigma \models \alpha$ következtetés segítségével természetesen hamis állításokat is kaphatunk $\mathcal{A}$-n, amennyiben hamis állításokból indulunk ki.

Néhány további megjegyzést fűzünk a logikai következmény fogalmának definíciójához (az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Σ most csupán *zárt* formulákat tartalmaz, és α is zárt):

- Σ formuláit „axiómáknak”, α-t pedig „tételnek” gondolva, vegyük észre, hogy a $\Sigma \models \alpha$ definíció egybeesik a matematikából ismert „α tétele a Σ axiómarendszernek” (szemantikai) értelmezésével.
  Például ha Σ a csoportaxiómák, és α egy rögzített tétele a csoportelméletnek, akkor $\Sigma \models \alpha$ valóban azt jelenti, hogy α minden olyan struktúrán igaz, amelyik csoport, azaz kielégíti Σ-t.
- Azok a nehézségek, amelyek az igazságértékelés definíciójának közvetlen alkalmazásával kapcsolatosak (például kvantoros formulák igazságértékelése végtelen halmazon), átmennek a következményfogalomnak a definíció alapján történő kezelésére is.
  Erre a problémára majd a bizonyításelméletről szóló fejezetben keresünk megoldást. Gyakran alkalmazzuk majd a következményfogalom definícióját arra, hogy azt igazoljuk, hogy $\Sigma \models \alpha$ *nem* teljesül.
- A hétköznapi életre vetítve, a logikai következmény fogalmának jelentése a következő. Tegyük fel, hogy a Σ-beli formulák és az α formula rendre a Σ'-beli és α' „hétköznapi állítások” formalizálásai. $\Sigma \models \alpha$ helyessége ekkor Σ'-re és α'-re nézve azt jelenti, hogy *bárhogyan* is változtatjuk meg egyidejűleg a Σ'-beli és az

α' állítások jelentéseit úgy, hogy „logikai szerkezetüket” megőrizzük, és a Σ'-beli állítások „igazak” legyenek a szóban forgó jelentések mellett, ekkor α' is igaz lesz e jelentések mellett. Másképpen: *ha a „logikai szerkezeteket” megőrizve elvonatkoztatunk a Σ'-beli és az α' állítások jelentéseitől úgy, hogy a Σ'-beli állítások „igazak” legyenek, akkor ez utóbbi maga után vonja α' igazságát.*

Ugyanezt másfelől megközelítve: sokszor találkozunk a hétköznapi életben azzal a kérdéssel, hogy a Σ'-beli „hétköznapi állításokból” „következik-e” az α' „hétköznapi állítás” (azaz α' „következménye”-e Σ'-nek)? A problémát úgy értelmezzük, és úgy modellezzük a logikai szemantikában, hogy *formalizáljuk* a Σ'-beli és az α' állításokat, és az így nyert Σ-beli és α formulákra vizsgáljuk azt, hogy $\Sigma \models \alpha$ teljesül-e.

- Mint azt az 1. fejezetben már megjegyeztük, nem szabad összetévesztenünk a $\beta \to \alpha$ és az „α logikai következménye β-nak”, azaz a $\beta \models \alpha$ fogalmakat. $\beta \to \alpha$ egy **formula, amelynek minden struktúrán más és más igazságértéke lehet**. Míg $\beta \models \alpha$ **nem formula**, hanem a metanyelvnek egy állítása, amelyik **struktúrától függetlenül helyes vagy helytelen**, és értelmetlen arról beszélni, hogy igaz-e egy konkrét struktúrán.

  Mindazonáltal szoros kapcsolat van a két fogalom között (lásd 2.2.2-ben a dedukciótételt).

  Felhívjuk a figyelmet arra is, hogy **lényeges fogalmi különbség van az igazság (zárt formula igazsága adott struktúrán) és a $\Sigma \models \alpha$ következmény fennállása („igazsága”, „igaz volta”) között**. Ugyanis az első csak egy konkrét struktúrán értelmezhető, és a struktúrától függ, míg **arról értelmetlen beszélni, hogy egy $\Sigma \models \alpha$ következmény egy konkrét struktúrán helyes**.

- A logikai következmény fogalom bevezetésénél találkozunk először azzal, hogy egy nyelvet (formulákat) *többféleképpen is interpretálhatunk.* Most kell igazán megérteni azt, hogy egy „hétköznapi állítást”, logikai szerkezetét megőrizve, hogyan fosztjuk meg jelentésétől, azaz hogyan fordítjuk le egy formális nyelvre, majd ezt követően, hogyan interpretálhatjuk többféleképpen (lásd a 7. Példát).

  Ez utóbbi tevékenység *fordított irányú* ahhoz a hagyományos eljáráshoz képest, amikor a szándékolt interpretációból *indulunk ki* (például a tér geometriája vagy a valós számok). Most *keressük* az adott formulákat kielégítő interpretációkat. Ez utóbbi tevékenység is rendkívül fontos a matematikában, erre még visszatérünk a későbbiekben (lásd modellelmélet, nemstandard modellek, nemstandard analízis stb.).

A logikai következmény fogalmának jobb megértéséhez tanácsos lesz feldolgozni többek között az e rész végén található 1–6. Példákat.

Most felsorolunk néhány fontos *következménysémát*. A következményséma abban tér el a logikai következménytől, hogy *akkor helyes, ha a benne szereplő formulaváltozókat tetszőleges módon formulákkal helyettesítve helyes következményt kapunk.*

2. Tétel. Az alábbiak helyes következtetési sémák:

(i) $\{\neg\alpha \to \neg\beta, \beta\} \vDash \alpha$ (indirekt következtetés).

(ii) $\{\beta, \beta \to \alpha\} \vDash \alpha$ (modus ponens).

(iii) $(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma) \vDash \beta \vee \gamma$ (rezolúciós következtetés).

Bizonyítás.

(i) Tegyük fel, hogy $\beta^\sigma = \uparrow$ és $(\neg\alpha \to \neg\beta)^\sigma = \uparrow$ valamely $\mathcal{A}$ struktúrára és σ értékelésre. Ekkor az implikáció definíciójából következik, hogy $(\neg\alpha)^\sigma = \downarrow$, tehát $\alpha^\sigma = \uparrow$ valóban.

(ii) Tegyük fel, hogy valamely $\mathcal{A}$ struktúrára és σ értékelésre $\beta^\sigma = \uparrow$, $(\beta \to \alpha)^\sigma = \uparrow$. Ekkor az implikáció definíciójából következően, $\alpha^\sigma = \uparrow$, valóban.

(iii) Ha valamely $\mathcal{A}$ struktúrára és σ értékelésre, például $\alpha^\sigma = \uparrow$, akkor kihasználva, hogy $(\neg\alpha \vee \gamma)^\sigma = \uparrow$, valóban $\gamma^\sigma = \uparrow$. Ha viszont $\alpha^\sigma = \downarrow$, akkor kihasználva, hogy $(\alpha \vee \beta)^\sigma = \uparrow$, valóban $\beta^\sigma = \uparrow$. Tehát $(\beta \vee \gamma)^\sigma$ mindenképpen igaz.

■

Ismertek a fenti állítások „relativizált” változatai is. Például legyen Λ egy tetszőleges, rögzített zárt formulahalmaz. Ekkor például a (ii) állítás relativizált változata: ha $\Lambda \vDash \beta$ és $\Lambda \vDash \beta \to \alpha$, akkor $\Lambda \vDash \alpha$.

Ezután kimondunk néhány, a következményfogalomhoz kapcsolódó definíciót. Legyen Σ *zárt* formulák egy tetszőleges összessége.

3. Definíció. A Σ formulahalmaz azon *logikai következményeinek összességét*, amelyek *zárt* formulák, Cons(Σ)-val jelöljük (a „Consequence” rövidítéseként), tehát

$$\mathrm{Cons}(\Sigma) = \{\beta : \Sigma \vDash \beta,\ \beta \text{ zárt}\}.$$

Cons(Σ) nyilván *zárt a következményre* abban az értelemben, hogy ha $\mathrm{Cons}(\Sigma) \vDash \alpha$, és α zárt, akkor $\alpha \in \mathrm{Cons}(\Sigma)$. Hiszen ha $\mathrm{Cons}(\Sigma) \vDash \alpha$ valamely α zárt formulára, akkor $\Sigma \vDash \alpha$ is teljesül, hiszen ha nem teljesülne, akkor valamely $\mathcal{A}$ struktúra kielégítené $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$-t. Cons definíciója miatt $\mathcal{A}$ kielégítené Cons(Σ)-t is, ezért α-t is. Ez utóbbi ellentmond annak, hogy $\mathcal{A}$ kielégíti $\neg\alpha$-t.

4. Definíció. Zárt formulák egy Γ összessége *elmélet*, ha Γ zárt a Cons operátorra, azaz $\Gamma = \mathrm{Cons}(\Gamma)$.

5. Definíció. Egy Γ elmélet *axiomatizálható*, ha zárt formulák valamely *rekurzív* Σ halmazára $\Gamma = \mathrm{Cons}(\Sigma)$. Speciálisan a Γ elmélet *végesen axiomatizálható*, ha zárt formulák valamely véges Σ halmazára $\Gamma = \mathrm{Cons}(\Sigma)$.

6. Definíció. Egy Γ elmélet *eldönthető*, ha Γ rekurzív halmaz a formulák összességén. Egy Γ elmélet eldönthetetlen, ha nem eldönthető. A Γ elméletre nézve vett $\Gamma \vDash$ *következményreláció eldönthető*, ha a Γ elmélet eldönthető.

Megjegyezzük, ha a Γ elmélet axiomatizálható, akkor Γ általában már *nem rekurzív*, csupán *rekurzív felsorolható*.

7. Definíció. Egy Σ formulahalmaz *ellentmondásos (inkonzisztens)*, ha valamely β formulára $\Sigma \vDash \beta$ és $\Sigma \vDash \neg\beta$ egyidejűleg. Ha egy formulahalmaz nem ellentmondásos, akkor azt mondjuk, hogy *ellentmondástalan (konzisztens)*.

8. Definíció. Egy β formula *független* a Σ formulahalmaztól, ha

$$\Sigma \vDash \beta \quad \text{és} \quad \Sigma \vDash \neg\beta$$

egyike sem teljesül.

Az ellentmondástalanság és függetlenség fogalmának fontos esetei, amikor egy *elméletre* vonatkoznak, tehát Σ egy elmélet.

9. Definíció. Egy Γ elmélet *komplett*, ha bármely zárt β formulára vagy $\beta \in \Gamma$ vagy $\neg\beta \in \Gamma$, azaz nincs Γ-tól független zárt formula.

Megjegyezzük, hogy a 3. fejezetben találkozni fogunk a fenti definíciók úgynevezett bizonyításelméleti változataival is. Megkülönböztetésül, ha szükséges, akkor használni szoktuk a fent ismertetett definíciókra a „szemantikai úton definiált” vagy „szemantikai értelemben” elnevezéseket: például mondhatjuk, hogy „*elmélet* a szemantikai értelemben” vagy „*ellentmondástalan elmélet* a szemantikai értelemben” stb.

Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra, és $\mathcal{A}$ elmélete $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ (tehát $\mathrm{Th}\mathcal{A} = \{\alpha : \mathcal{A} \vDash \alpha,\ \alpha \text{ zárt}\}$). A következő tételből kiderül, hogy a $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ fogalma speciális esete a fent definiált elméletfogalomnak.

10. Tétel. $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ egy *elmélet* a 4. Definícióbeli értelemben is. $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ konzisztens és komplett.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ rögzített. Tegyük fel, hogy $\mathrm{Th}\mathcal{A} \vDash \beta$, ahol β zárt formula. Igazolandó, hogy $\beta \in \mathrm{Th}\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$, definíció szerint, kielégíti $\mathrm{Th}\mathcal{A}$-t, ezért a feltétel szerint β-t is kielégíti. Mivel β igaz $\mathcal{A}$-n, ezért $\beta \in \mathrm{Th}\mathcal{A}$.
Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ konzisztens, hiszen $\mathcal{A}$ egy modellje, és ezért nem lehet α és $\neg\alpha$ is $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ eleme valamely α-ra. Továbbá komplett, mivel bármely zárt formulára α vagy $\neg\alpha$ igaz $\mathcal{A}$-n.

■

Legyen $\mathcal{K}$ adott típusú struktúrák egy osztálya. A 2.1.2 részben definiáltuk $\mathrm{Th}\mathcal{K}$ fogalmát. A következő tétel hasonlóan igazolható, mint az előző:

11. Tétel. $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ egy *elmélet* a 4. Definícióbeli értelemben is, továbbá $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ konzisztens.

Th$\mathcal{A}$ az elméletek egyik fontos esete. Az eddigi definíciók segítségével megfogalmazható a logika egyik legfontosabb kérdése:

Legyen $\mathcal{A}$ rögzített struktúra.

Probléma: *Axiomatizálható-e, illetve eldönthető-e a* Th$\mathcal{A}$ *elmélet?*

A kérdés tehát az, hogy létezik-e olyan zárt formulákból álló rekurzív Σ formulahalmaz, hogy

$$\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Cons}(\Sigma),$$

illetve maga Th$\mathcal{A}$ rekurzív formulahalmaz-e? A problémára a bizonyításelméletről szóló fejezetben térünk vissza.

A fenti probléma általánosítható *struktúraosztály* elméletére, Th$\mathcal{K}$-ra: *Axiomatizálható-e, illetve eldönthető-e a* Th$\mathcal{K}$ *elmélet?*

Tehát létezik-e olyan zárt formulákból álló rekurzív Σ formulahalmaz, hogy

$$\mathrm{Th}\mathcal{K} = \mathrm{Cons}(\Sigma)$$

2.2.2 Érvényesség, logikai ekvivalencia

Az igazságértékelés szempontjából kitüntetett szerepet játszanak az *érvényes formulák*, azaz azok a formulák, amelyek *bármely alkalmas típusú* struktúrán, az individuumváltozók *bármely* értékelése mellett igazak. Látni fogjuk, hogy az általános következményfogalom vizsgálata, bizonyos értelemben, visszavezethető az érvényesség vizsgálatára.

12. Definíció. Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{L}$ egy α formulája *érvényes*, ha a formula bármely struktúrán és tetszőleges individuumváltozó-értékelésekre igaz, tehát $\mathcal{A} \vDash \alpha^\sigma$ bármely $\mathcal{A}$ struktúrára és bármely σ értékelésre. Jelölése: $\vDash \alpha$

Nyilvánvaló, hogy ilyen formulák például a következők:

$\varphi \vee \neg\varphi,\ \varphi \to \varphi,\ \varphi \to (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \wedge \psi) \to \varphi,\ \forall x\varphi \to \varphi,\ \varphi \to \exists x\varphi$ stb.

Az érvényesség fogalmának ellentéte a következő:

13. Definíció. Egy $\mathcal{L}$ nyelv formulája *érvénytelen* (vagy *kielégíthetetlen*), ha igazságértéke bármely $\mathcal{A}$ struktúrán, bármely individuumváltozó-értékelésre hamis.

Nyilvánvaló, hogy az érvényes formulák negáltjai érvénytelenek. Vigyázzunk, a **legtöbb formula se nem érvényes, se nem érvénytelen**, tehát ha egy formula nem érvényes, ez nem azt jelenti, hogy érvénytelen.

Megjegyezzük, hogy egy nyílt formula érvényességén, érvénytelenségén szokták az irodalomban *univerzális lezártjának* érvényességét, illetve érvénytelenségét is érteni (például elsőrendű klózok esetén vagy univerzális axiómarendszereknél szokták használni ezt az értelmezést).

A logikailag érvényes α formuláknál úgy tekintjük, hogy az *üres* Σ formulahalmaznak következményei. Ezért a $\models\alpha$ jelölést tekinthetjük úgy is, mint a $\emptyset\models\alpha$ jelölés rövidítését.

Megjegyezzük, hogy a $\models$ jelet **legalább három vonatkozásban használjuk a logikában**: a *kielégülés, a következmény és az érvényesség* jeleként, tehát:

- $\mathcal{A}\models\alpha$ (az $\mathcal{A}$ struktúra kielégíti α-t),
- $\Sigma\models\alpha$ (α logikai következménye a Σ formulahalmaznak),
- $\models\alpha$ (α érvényes).

* * *

Most rátérünk a logikai következmény és az érvényesség kapcsolatának és egyúttal a logikai következmény és az implikációművelet kapcsolatának tárgyalására. Erre a kapcsolatra vonatkozik a *Dedukció tétel.*

Legyen Σ formulák tetszőleges halmaza (esetleg $\Sigma=\emptyset$), α és β tetszőleges formulák.

14. Tétel. (Dedukció tétel, szemantikai.)

$$\boxed{\Sigma\cup\{\beta\}\models\alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \Sigma\models\beta\rightarrow\alpha.}$$

Speciálisan, ha $\Sigma=\emptyset$, akkor

$$\beta\models\alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \models\beta\rightarrow\alpha \tag{1}$$

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $\Sigma\cup\{\beta\}\models\alpha$, és indirekt tételezzük fel, hogy $\Sigma\models\beta\rightarrow\alpha$ nem igaz. Ekkor valamely $\mathcal{A}$ struktúrára és σ értékelésre $\mathcal{A}\models\Sigma^\sigma$, de $(\beta\rightarrow\alpha)^\sigma=\downarrow$ $\mathcal{A}$-n, azaz $\beta^\sigma=\uparrow$ és $\alpha^\sigma=\downarrow$ $\mathcal{A}$-n. Ekkor $\mathcal{A}\models(\Sigma\cup\{\beta\})^\sigma$ is teljesül. Utóbbi viszont a feltétel szerint maga után vonja α^σ igazságát $\mathcal{A}$-n. Ez ellentmondás.

A másik irány triviális, hiszen a modus ponens következtetési szabály relativizált változata.

■

Indukcióval ellenőrizhető a következő:

Következmény. Legyen Σ véges, tehát $\Sigma=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n\}$. Ekkor

$$\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n\}\models\alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \models\varphi_1\rightarrow\varphi_2\rightarrow\ldots\rightarrow\varphi_n\rightarrow\alpha$$

(a jobb oldal helyett írhatjuk ezt is: $\models\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_n\rightarrow\alpha$).

Tudjuk, hogy az érvényességfogalom speciális esete a logikai következmény fogalmának ($\Sigma = \emptyset$). Az iménti Következmény szerint **véges** Σ-ra ez *fordítva is igaz* abban az értelemben, hogy **a logikai következmény vizsgálata mindig visszavezethető az érvényesség fogalmára**.

A Dedukció tétel a 14. Tételbeli (1) **speciális esete mutatja a következményfogalom és az $\to$ művelet kapcsolatát**: $\beta \vDash \alpha$ fennállásának vizsgálata tehát visszavezethető $\vDash \beta \to \alpha$ helyességének vizsgálatára. $\vDash$-t függetlenül definiáltuk az $\to$ művelettől, ezért az (1) összefüggés is alátámasztja az $\to$ művelet definíciójának jogosságát (lásd $\to$ igazságtábláját).

A Dedukció tétel és az iménti észrevételek tükrében az érvényességfogalom nagy jelentőséget nyer. Vegyük észre, hogy az **érvényes zárt formulák összessége egy elméletet alkot**, a $\mathrm{Th}\mathcal{M}$ elméletet, ahol $\mathcal{M}$ az adott nyelv típusú összes modellek osztálya. $\mathrm{Th}\mathcal{M}$ fontos elmélet a logikában, és hasonlóan egy $\mathcal{A}$ struktúra $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ elméletéhez, a következő probléma $\mathrm{Th}\mathcal{M}$ esetén is lényeges:

Probléma: *Axiomatizálható-e, illetve eldönthető-e a $\mathrm{Th}\mathcal{M}$ elmélet?*

A kérdés tehát az, hogy létezik-e olyan zárt formulákból álló rekurzív Σ formulahalmaz, hogy

$$\mathrm{Th}\mathcal{M} = \mathrm{Cons}(\Sigma),$$

illetve maga $\mathrm{Th}\mathcal{M}$ rekurzív-e?

Emlékeztetünk arra, hogy $\mathrm{Th}\mathcal{M}$ eldönthetőségéről azt is mondjuk, hogy a $\vDash$ következményreláció eldönthető. A problémára a bizonyításelmélet fejezetben térünk vissza.

* * *

Annak, hogy tájékozódni tudjunk elsőrendű logikában, fontos feltétele bizonyos „logikai ekvivalenciák” ismerete.

15. Definíció. Az α és β formulák *logikailag ekvivalensek*, ha igazságértékük bármely struktúrán, bármely individuumváltozó-értékelésre megegyezik.

Igaz a következő két, logikai ekvivalenciákkal kapcsolatos egyszerű állítás:

- α és β logikailag ekvivalensek akkor és csak akkor, ha az $\alpha \leftrightarrow \beta$ formula logikailag érvényes ($\vDash \alpha \leftrightarrow \beta$).
- Ha egy formula bármely részformuláját vele logikailag ekvivalens formulával cseréljük ki, akkor az eredeti formulával logikailag ekvivalens formulát kapunk.

Először az *állításműveletekkel* kapcsolatban ismertetünk néhány fontos logikai ekvivalenciát:

16. Tétel. A következő formulapárok, rendre *logikailag ekvivalensek*:

a) α és $\neg\neg\alpha$
(kettős tagadás)

b) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ és $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
(disztributivitás a $\vee$-ra nézve)

c) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ és $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
(disztributivitás a $\wedge$-ra nézve)

d) $\neg(\alpha \vee \beta)$ és $\neg\alpha \wedge \neg\beta$
(de Morgan-szabály a $\vee$-ra nézve)

e) $\neg(\alpha \wedge \beta)$ és $\neg\alpha \vee \neg\beta$
(de Morgan-szabály a $\wedge$-ra nézve)

f) $\neg(\alpha \to \beta)$ és $\alpha \wedge \neg\beta$
(negált impikáció kiküszöbölése)

g) $\alpha \to \beta$ és $\neg\alpha \vee \beta$
(implikáció kiküszöbölése)

h) $\alpha \to \beta$ és $\neg\beta \to \neg\alpha$
(kontrapozíció)

i) $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ és $\alpha \to \beta \to \gamma$
(előtagból konjunkció kiküszöbölése)

j) $\alpha \leftrightarrow \beta$ és $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
(ekvivalencia kiküszöbölése)

Bizonyítás. A formulapárok igazságtábláiról mutatjuk meg, hogy megegyeznek. Legyen σ tetszőleges individuumváltozó-értékelés.

b) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ pontosan akkor igaz, ha $\alpha^\sigma = \uparrow$ és $(\beta \vee \gamma)^\sigma = \uparrow$.
$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ pontosan akkor igaz, ha $(\alpha \wedge \beta)^\sigma = \uparrow$ vagy $(\alpha \wedge \gamma)^\sigma = \uparrow$, azaz $\alpha^\sigma = \uparrow$ és $(\beta \vee \gamma)^\sigma = \uparrow$.

f) $\neg(\alpha \to \beta)$ pontosan akkor igaz, ha $(\alpha \to \beta)^\sigma = \downarrow$, azaz $\alpha^\sigma = \uparrow$ és $(\neg\beta)^\sigma = \uparrow$, azaz $(\alpha \wedge \neg\beta)^\sigma = \uparrow$.

i) $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ pontosan akkor hamis, ha $(\alpha \wedge \beta)^\sigma = \uparrow$ és $\gamma^\sigma = \downarrow$, azaz $\alpha^\sigma = \uparrow$, $\beta^\sigma = \uparrow$, $\gamma^\sigma = \downarrow$.
$\alpha \to \beta \to \gamma$ pontosan akkor hamis, ha $\alpha^\sigma = \uparrow$ és $(\beta \to \gamma)^\sigma = \downarrow$, utóbbi pedig akkor teljesül, ha $\beta^\sigma = \uparrow$ és $\gamma^\sigma = \downarrow$.

A többi állítás igazolása hasonlóan történhet.

■

Felhívjuk a figyelmet, hogy a *$\wedge$-ra nézve vett disztributivitás (c) tulajdonság) szokatlan tulajdonság* a hagyományos aritmetikára gondolva (azonban a Boole-algebrákra már jellemző az összefüggés).

A *tételbeli tulajdonságokon túlmenően* például nyilvánvaló, hogy a $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ műveletek kommutatívak, tehát például $\alpha \wedge \beta$ ekvivalens $\beta \wedge \alpha$-val stb., továbbá asszociatívak, tehát például $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ ekvivalens $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$-val stb. Viszont az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív.

A következő logikai ekvivalenciák kvantoros formulákra vonatkoznak.

17. Tétel. A következő formulapárok rendre *logikailag ekvivalensek*:

a) $\neg\exists x\alpha$ és $\forall x \neg\alpha$,
$\neg\forall x\alpha$ és $\exists x \neg\alpha$.

b) $\forall x \forall y\, \alpha$ és $\forall y \forall x\, \alpha$,
$\exists x \exists y\, \alpha$ és $\exists y \exists x\, \alpha$.

c) α és $\exists x\, \alpha$, ha x nem szabad α-ban,
α és $\forall x\, \alpha$, ha x nem szabad α-ban.

d) $\exists x\, \alpha$ és $\exists y\, \alpha(x/y)$, ha y nem szabad α-ban,
$\forall x\, \alpha$ és $\forall y\, \alpha(x/y)$, ha y nem szabad α-ban.

e) $\exists x(\alpha \vee \beta)$ és $\exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta$,
$\forall x(\alpha \wedge \beta)$ és $\forall x\, \alpha \wedge \forall x\, \beta$.

f) $\exists x(\alpha \wedge \beta)$ és $\exists x\, \alpha \wedge \beta$, ha x nem szabad β-ban,
$\forall x(\alpha \vee \beta)$ és $\forall x\, \alpha \vee \beta$, ha x nem szabad β-ban.

g) $\exists x(\alpha \to \beta)$ és $\forall x\, \alpha \to \exists x\, \beta$,

h) $\forall x(\alpha \to \beta)$ és $\exists x\alpha \to \beta$, ha x nem szabad β-ban.

Még a bizonyítás előtt megjegyezzük, hogy egy logikai következmény helyességének, érvényességnek, logikai ekvivalenciának szemantikai bizonyítása történhet

- *igazsághalmazok alkalmazásával* (beleértve az igazsághalmazokra vonatkozó 2.1-beli tétel alkalmazását, és az igazságértékelés definícióját),
- már bizonyított tulajdonságokra (ekvivalenciákra) visszavezetéssel *alkalmazva azt az elvet*, hogy *részformulákat logikailag ekvivalens formulákkal helyettesítve logikailag ekvivalens formulát kapunk*,
- *az első két módszer együttes alkalmazásával*.

Bizonyítás. Az ekvivalenciapárok közül csak az elsőket bizonyítjuk, a másik igazolása hasonlóan történhet.

Először az első módszert, az *igazsághalmazok módszerét* alkalmazzuk. Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra A alaphalmazzal, és σ tetszőleges értékelés.

a) Egyrészt $\sigma \in [\neg\exists x\alpha]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma \in \sim[\exists x\alpha]$, utóbbi pontosan akkor, ha $\sigma \notin [\exists x\alpha]$.

Másrészt $\sigma \in [\forall x \neg\alpha]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_a^x \in [\neg\alpha]$ tetszőleges $a \in A$-ra, azaz ha $\sigma_a^x \in \sim[\alpha]$. Ez utóbbi pontosan akkor, ha $\sigma_a^x \notin [\alpha]$ tetszőleges $a \in A$-ra, azaz ha $\sigma \notin [\exists x\alpha]$.

c) $\sigma \in [\alpha]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_a^x \in [\alpha]$ minden $a \in A$-ra (mivel α-ban x nem szabad), azaz ha $\sigma \in [\exists x\alpha]$. A *c)*-beli második tulajdonság igazolása hasonló.

d) Egyrészt $\sigma \in [\exists x\alpha]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_a^x \in [\alpha]$ valamely $a \in A$-ra. Utóbbi akkor és csak akkor, ha $\sigma_a^y \in [\alpha(x/y)]$ valamely $a \in A$-ra (itt kihasználtuk a feltételt y-ra), azaz ha $\sigma \in [\exists y\alpha(x/y)]$.

e) $\sigma \in [\exists x(\alpha \vee \beta)]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_a^x \in [\alpha \vee \beta] = [\alpha] \cup [\beta]$ valamely $a \in A$-ra, azaz ha $\sigma_a^x \in [\alpha]$ vagy $\sigma_a^x \in [\beta]$ valamely $a \in A$-ra. Utóbbiak pontosan akkor, ha $\sigma \in [\exists x\alpha]$ vagy $\sigma \in [\exists x\beta]$, vagyis ha $\sigma \in [\exists x\alpha] \cup [\exists x\beta] = [\exists x\alpha \vee \exists x\beta]$.

f) Egyrészt $\sigma \in [\exists x(\alpha \wedge \beta)]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_a^x \in [\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cap [\beta]$ valamely $a \in A$-ra, azaz ha $\sigma_a^x \in [\alpha]$ és $\sigma_a^x \in [\beta]$. Utóbbiak pontosan akkor, ha $\sigma_a^x \in [\alpha]$ és $\sigma \in [\beta]$, mivel x nem szabad β-ban.

Másrészt $\sigma \in [\exists x\alpha \wedge \beta] = [\exists x\alpha] \cap [\beta]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_a^x \in [\alpha]$ valamely $a \in A$-ra és $\sigma \in [\beta]$.

A *b)*, *g)* és *h)* tulajdonságok igazolása hasonló a fentiekhez.

Ezután *e)*-t és *g)*-t a második módszerrel is bizonyítjuk, azaz *visszavezetünk már bizonyított ekvivalenciákra* úgy, hogy részformulák helyett ekvivalens formulákat alkalmazunk:

e)-nek csak a második részét igazoljuk úgy, hogy első részének igazságát már kihasználjuk. A negáltak ekvivalenciáját látjuk be. A következő logikailag érvényes:
$\neg\forall x(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \exists x\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \exists x(\neg\alpha \vee \neg\beta) \leftrightarrow \exists x\neg\alpha \vee \exists x\neg\beta \leftrightarrow \neg\forall x\alpha \vee \neg\forall x\beta \leftrightarrow \neg(\forall x\alpha \wedge \forall x\beta)$.

g) A következő logikailag érvényes:
$\exists x(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \exists x(\neg\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \exists x\neg\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \neg\forall x\alpha \vee \exists x\beta \leftrightarrow \forall x\alpha \to \exists x\beta$.

■

- A *c)* tulajdonság következménye, hogy például $\exists x\forall x\alpha$ ekvivalens $\forall x\alpha$-val, $\forall x\forall x\alpha$-val, vagy $\forall x\exists x\alpha$ ekvivalens $\exists x\alpha$ vagy $\exists x\exists x\alpha$-val stb. Tehát *ha ugyanazon változót többször egymás után kvantáljuk, akkor bár szintaktikailag ez megengedett, mégis „hatástalan", csupán a legbelső kvantor számít.*
- A *d)* tulajdonság annak a sejtésünknek az igazolása, hogy változók cseréjénél csupán „*átjelölés*" történik, tehát logikailag ekvivalens formulát kapunk.
- Az *e)–h)* tulajdonságokat a kvantorok *kiemelési tulajdonságainak* nevezzük. Például *e)*-nél $\forall x\,\alpha \wedge \forall x\,\beta$-ból feltétel nélkül „kiemelhetjük" a $\forall x$ kvantort, és ezt kapjuk: $\forall x(\alpha \wedge \beta)$. Az implikációra *g)* és *h)* szerint csak egy bonyolultabb kiemelési szabály érvényes.

Hangsúlyozzuk, hogy **a következő formulapárok nem ekvivalensek**:

$\forall x\exists y\alpha$ és $\exists y\forall x\alpha$,
$\exists x(\alpha \wedge \beta)$ és $\exists x\alpha \wedge \exists x\beta$,
$\forall x(\alpha \vee \beta)$ és $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$,
$\exists x(\alpha \to \beta)$ és $\exists x\alpha \to \exists x\beta$,
$\forall x(\alpha \to \beta)$ és $\forall x\alpha \to \forall x\beta$.

A 16. és 17. Tételből kapjuk a következőt:

Következmény. A negáció és konjunkció (vagy negáció és diszjunkció) segítségével *kifejezhető* a többi állításművelet, az egzisztenciális kvantor segítségével pedig *kifejezhető* az univerzális kvantor (vagy fordítva).

Hiszen a 16. Tétel *j)* része szerint az ekvivalencia kifejezhető implikációval és konjunkcióval, tehát

$\alpha \leftrightarrow \beta$ kifejezhető $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \leftarrow \beta)$-val,

a 16. Tétel *g)* része szerint az implikáció kifejezhető diszjunkcióval és negációval, tehát

$\alpha \rightarrow \beta$ kifejezhető $\neg\alpha \vee \beta$-val,

a 16. Tétel *d)* része szerint a diszjunkció kifejezhető konjunkcióval és negációval, tehát

$\alpha \vee \beta$ kifejezhető $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$-val,

a 17. Tétel *a)* része szerint az univerzális kvantor kifejezhető az egzisztenciális kvantorral, tehát

$\forall x\alpha$ kifejezhető $\neg\exists x\neg\alpha$-val.

Ezután *példákat* mutatunk, először a logikai következménnyel történő modellezésre.

1. Példa. *Ha Σ a csoportaxiómák, és α azt jelenti, hogy a bal inverz megegyezik a jobb inverzzel, tehát α a $\forall z\forall x\forall y\,(x+z=0 \wedge z+y=0 \rightarrow x=y)$ formula, ekkor mint ismert, $\Sigma \vDash \alpha$ (azaz α tétele a csoportelméletnek).*

Tehát $\Sigma \vDash \alpha$ jelentése nem az, hogy egy konkrét csoporton a bal inverz megegyezik a jobb inverzzel, hanem az, hogy *minden* csoporton teljesül ez a tulajdonság.

2. Példa. *Nyilvánvaló, hogy igazak a következők:*

$$\varphi \vDash \varphi \vee \psi,\ \varphi \wedge \psi \vDash \varphi,\ \forall x\varphi \vDash \varphi,\ \varphi \vDash \exists x\varphi \ \textit{stb.}$$

3. Példa. *Logikai következménye-e annak, hogy* „egy kislány hat vagy hét éves”*, az hogy* „hat éves”*?*

Természetesen nem, hiszen a hat éves kislányok esetén teljesül a konklúzió, míg a hét éves kislányok esetén nem.

Formálisan, a következőképpen válaszolhatjuk meg a kérdést. Formalizáljuk a szóban forgó állításokat, és vizsgáljuk ezekre a logikai következmény fogalmát. Az „egy kislány 6 éves vagy 7 éves” formalizálása: $L_6 \vee L_7$, az „egy kislány 6 éves” formalizálása: L_6. A kérdés, hogy helyes-e az $L_6 \vee L_7 \vDash L_6$ következtetés? Tehát itt már nem játszik szerepet $L_6 \vee L_7$ vagy L_6 eredeti jelentése, csak a formulák állításszerkezete. Mivel lehetséges az, hogy $\overline{L_6 \vee L_7} = \uparrow$, de $\overline{L_6} = \downarrow$ (például ha $\overline{L_6} = \downarrow$ és $\overline{L_7} = \uparrow$), ezért az eredeti következtetés hamis.

Vegyük észre, hogy az $L_6 \vee L_7 \to L_6$ *implikáció* modelltől függően, lehet hamis, és lehet igaz is. Ez is mutatja a következményfogalom és az implikációművelet közötti különbséget.

4. Példa. *Logikai következménye-e annak, hogy* „bármely két különböző ponton át fektethető egyenes”*, az, hogy* „bármely két ponton át legfeljebb csak egy egyenes fektethető”*?*

Formalizáljuk először a szereplő két állítást. Feleljenek meg a nyelvben a P és E egyargumentumú relációszimbólumok rendre a pont-, illetve egyenestulajdonságoknak, I pedig az illeszkedésrelációnak.
A „bármely két különböző ponton át fektethető egyenes” formalizálása:

$$\forall x \forall y (Px \wedge Py \wedge x \neq y \to \exists z (Ez \wedge Ixz \wedge Iyz))$$

Jelölje e formulát α.
A „bármely két ponton át legfeljebb csak egy egyenes fektethető” formalizálása:

$$\forall x \forall y \forall u \forall z (Px \wedge Py \wedge x \neq y \wedge Eu \wedge Ixu \wedge Iyu \wedge Ez \wedge Ixz \wedge Iyz \to u = z)$$

Jelölje e formulát β.
A szokásos geometriai interpretáció mellett α igaz, és β is igaz.
Most tekintsünk egy másik interpretációt. Az alaphalmaz legyen az emberek összessége. Legyen P interpretációja az, hogy valaki „fiú”, E interpretációja az, hogy valaki „lány”, I interpretációja pedig az, hogy „nem ismerik egymást”.
Ezen interpretáció mellett α igaznak tekinthető („bármely két fiúhoz van olyan lány, hogy a lányt a két fiú közül egyik sem ismeri”), és β hamis („bármely két fiúhoz legfeljebb egy olyan lány van, hogy a lányt a két fiú közül egyik sem ismeri”). Tehát definíció szerint az $\alpha \vDash \beta$ (általános) következmény nem lehet helyes.

5. Példa. *Mutassa meg, hogy a következő következtetés helyes, bár a konklúzió hamis!* „Ha egy állat úszni tud, akkor hal. A Bodri kutya tud úszni. A Bodri egy állat. Tehát Bodri kutya egy hal.”

Formalizáljuk először a következtetést:
$\{\forall x (Ax \wedge Ux \to Hx), Ab \wedge Ub\} \vDash Hb$,
ahol A, U, H és b szándékolt interpretációi rendre, például az élőlények halmazán, az „állat”, „úszni tud”, „hal” relációk és „Bodri”.
Jelölje b interpretációját b'.
Helyes következtetést kaptunk, hiszen, ha egy struktúrán a premisszák igazak lennének, de $Hb' = \downarrow$ lenne, akkor $(Ab' \wedge Ub' \to Hb') = \uparrow$ és $(Ab' \wedge Ub') = \uparrow$ miatt ellentmondást kapnánk.
Vegyük észre, hogy a következtetés ugyan helyes, de „alkalmazhatatlan” mindazon esetekben, amikor egy állat ugyan tud úszni, de nem hal, ellentétben az első premisszával.

6. Példa. *a) Mutassa meg, hogy az alábbi következtetés helytelen, bár konklúziója igaz!*

„Minden hal tud úszni. A vidra tud úszni. Tehát a vidra nem hal.”

b) Mutassa meg, hogy az alábbi következtetés helytelen, bár premisszája és konklúziója is igaz!

„Minden hal tud úszni. A ponty tud úszni. Tehát a ponty hal.”

a) A következtetés formalizálása:
$\{\forall x(Hx \to Ux), \forall x(Vx \to Ux)\} \vDash \forall x(Vx \to \neg Hx)$,
ahol a H, U, V relációjelek rendre megfelelnek a „hal”, „úszni tud” és „vidrának lenni” tulajdonságoknak.
A következtetés helytelen, ugyanis ha valamely 1 elemű struktúrán az a elemre $Va = Ha = \uparrow$ és $Ua = \uparrow$, akkor a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.
b) A következtetés formalizálása:
$\{\forall x(Hx \to Ux), \forall x(Px \to Ux)\} \vDash \forall x(Px \to Hx)$,
ahol a H, U, P relációjelek rendre megfelelnek a „hal”, „úszni tud” és „pontynak lenni” tulajdonságoknak.
Tekintsünk egy egyelemű struktúrát, ahol az a elemre $Pa = \uparrow$, $Ha = \downarrow$ és $Ua = \uparrow$, akkor a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.

7. Példa. „Van olyan nő, aki minden férfinak tetszik”.

a) Formalizálja az állítást az $\mathcal{L}$ nyelven, ahol $\mathcal{L}$ nemlogikai konstansai az N, F és T, rendre 1, 1, 2 *változós relációjelek!*

b) Adja meg az a)-beli formulának egy a szándékolttól eltérő, de igaz interpretációját!

a) $\exists x(Nx \wedge \forall y(Fy \to Txy))$. Ennek a φ formulának szándékolt interpretációja az a struktúra, amelynek alaphalmaza az „emberek” halmaza, N, F és T interpretációi pedig rendre a „nő”, „férfi”, „tetszik” relációk.
b) A következő, „igaz”-nak tekinthető „hétköznapi állítások” logikai szerkezete megegyezik az eredeti állítás szerkezetével (formalizálásuk φ), és kézenfekvően rendelhetünk hozzájuk φ-t kielégítő interpretációkat:
„Van olyan nő, aki egyetlen férfinek sem tetszik.”
„Van olyan pénz, amely mindenkit megbolondít.”
„Van olyan profi sakkozó, aki minden amatőrt meg tud verni.”
Példák a matematikából:
„Van olyan páratlan szám, amely minden pozitív páros számnál kisebb.”
„Van olyan ponthármas, amelyre nem illeszkedik egyenes.” stb.
Például az első állításhoz rendelhető interpretáció csak abban különbözik az *a)*-belitől, hogy T interpretációja a „nem tetszik” tulajdonság.
Az utolsó állításhoz tartozó interpretáció az, amelynek alaphalmaza a sík részhalmazainak halmaza, N, F és T interpretációi pedig rendre a „ponthármas”, „egyenes” és „nem illeszkedik” relációk.

A következőkben példákat látunk logikai ekvivalenciák, logikai következmények bizonyítására:

8. Példa. *Igazoljuk, hogy*

$$\forall x(\alpha \to \beta) \vDash \forall x\alpha \to \forall x\beta.$$

$\forall x(\alpha \to \beta)$ ekvivalens $\forall x(\neg\alpha \vee \beta)$-val, $\forall x\alpha \to \forall x\beta$ pedig ekvivalens $\exists x\neg\alpha \vee \forall x\beta$-val. Megmutatjuk, hogy $\forall x(\neg\alpha \vee \beta) \vDash \exists x\neg\alpha \vee \forall x\beta$, vagyis azt, hogy

$$[\forall x(\neg\alpha \vee \beta)] \subseteq [\exists x\neg\alpha \vee \forall x\beta]$$

fennáll tetszőleges, megfelelő típusú $\mathcal{A}$ struktúra esetén.
$\sigma \in [\forall x(\neg\alpha \vee \beta)]$ pontosan akkor, ha $\sigma_a^x \in [\neg\alpha \vee \beta] = [\neg\alpha] \cup [\beta]$ minden $a \in A$-ra. Ha van olyan $a \in A$, hogy $\sigma_a^x \in [\neg\alpha]$, akkor $\sigma \in [\exists x\neg\alpha]$, ha pedig nincs ilyen $a \in A$, akkor $\sigma_a^x \in [\beta]$ minden $a \in A$-ra, azaz $\sigma \in [\forall x\beta]$.
Tehát $\sigma \in [\exists x\neg\alpha] \cup [\forall x\beta] = [\exists x\neg\alpha \vee \forall x\beta]$, és ezt kellett bizonyítani.

9. Példa. *Igaz-e, hogy $\forall x(\alpha \vee \beta)$ és $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$ logikailag ekvivalensek?*

I. Megoldás: Egyrészt tetszőleges $\mathcal{A}$ struktúrán és σ értékelésre $\sigma \in [\forall x(\alpha \vee \beta)]$ ekvivalens azzal, hogy minden $a \in A$-ra $\sigma_a^x \in [\alpha \vee \beta] = [\alpha] \cup [\beta]$. Utóbbi ekvivalens a következővel:

$$\text{minden egyes } a \in A\text{-ra } \sigma_a^x \in [\alpha] \text{ vagy } \sigma_a^x \in [\beta]. \tag{A}$$

Másrészt $\sigma \in [(\forall x\alpha \vee \forall x\beta)] = [\forall x\alpha] \cup [\forall x\beta]$. Ez ekvivalens a következővel:

$$\sigma_a^x \in [\alpha] \text{ minden } a \in A\text{-ra vagy } \sigma_a^x \in [\beta] \text{ minden } a \in A\text{-ra.} \tag{B}$$

Nyilván (B) implikálja (A)-t, de fordítva nem.

II. Megoldás: Megadunk egy struktúrát, ahol nem ugyanaz a két formula igazságértéke. Például a struktúra alaphalmaza legyen a természetes számok halmaza, az α és β relációk pedig a páros, illetve páratlan tulajdonság. Ekkor $\forall x(\alpha \vee \beta)$ igaz, de $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$ hamis.

10. Példa. *Igazolja igazsághalmazokkal, hogy $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ és $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$ logikailag ekvivalensek!*

Egyrészt tetszőleges $\mathcal{A}$ struktúrára és σ értékelésre $\sigma \in [\forall x(\alpha \wedge \beta)]$ ekvivalens azzal, hogy minden $a \in A$-ra $\sigma_a^x \in [\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cap [\beta]$.
Másrészt $\sigma \in [(\forall x\alpha \wedge \forall x\beta)] = [\forall x\alpha] \cap [\forall x\beta]$ ekvivalens azzal, hogy $\sigma_a^x \in [\alpha]$ minden $a \in A$-ra és $\sigma_a^x \in [\beta]$ minden $a \in A$-ra, azaz $\sigma_a^x \in [\alpha] \cap [\beta]$ minden $a \in A$-ra.

2.3 Normálformák

A következőkben olyan átalakításokat vizsgálunk, amelyek áttekinthetőbbé teszik a formulák szerkezetét. Mint látni fogjuk, minden formula (logikailag) ekvivalens egy alkalmas, speciális alakú formulával. A normálformájú formulák *könnyebben kezelhetők*, mint általában a formulák, és *sok szempontból elegendő az ilyen alakú formulákra szorítkozni*.

Fontos, hogy az általunk ismertetett normálformák esetén **létezik algoritmus a normálformára hozásra**, amely számítógépre is implementálható. A normálformák ezért fontos szerepet játszanak az automatikus tételbizonyításban, vagy például a logikai programozásban. *Kézi számolásoknál azonban általában nem algoritmusokat, hanem „kvázialgoritmusokat" vagy egyéb eljárásokat használunk.* Ilyen eljárásokat ismertetünk ezen alfejezet végén.

Rögzítsünk egy tetszőleges *elsőrendű* $\mathcal{L}$ nyelvet.

1. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy formula *konjunktív* formájú, ha klózok konjunkciója.

2. Tétel. (Konjunktív normálforma tétel.) Tetszőleges *kvantormentes* formula logikailag ekvivalens alkalmas klózok konjunkciójával, azaz a formula konjunktív formára hozható.

Bizonyítás. A formulák definíciója szerinti indukcióval bizonyítunk. Emlékeztetünk arra, hogy a *kvantormentes* formulákat a formulák tanult definíciója szerint képezzük, kivéve, hogy az utolsó, a kvantálásra vonatkozó lépést nem használjuk.

Az állítás igaz atomi formulákra, hiszen az atomi formula is klóz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az α és β formulákra, és tegyük fel, hogy α $K_1 \wedge \ldots \wedge K_n$-nel, β pedig $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$-mel ekvivalens, ahol $K_1, \ldots K_n$, $C_1, \ldots C_m$ klózok. Elegendő megmutatni, hogy $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ is konjunktív formára hozható. Kihasználjuk majd formuláknak azt az előző részben már említett tulajdonságát, hogy ha részformulákat ekvivalens formulákra cserélünk, akkor az egész formula is ekvivalens marad az eredetivel.

A tétel állítása $\alpha \wedge \beta$-ra nyilvánvalóan igaz.

Az állítás $\alpha \vee \beta$-ra is igaz, ugyanis $(K_1 \wedge \ldots \wedge K_n) \vee (C_1 \wedge \ldots \wedge C_m)$ a disztributivitást használó átalakítás miatt ekvivalens a $\bigwedge_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (K_i \vee C_j)$ formulával, és ez szintén klózok konjunkciója.

Megjegyezzük, hogy ez a gondolatmenet nyilván általánosítható kettőről véges sok $\alpha_1, \ldots \alpha_j$ formula diszjunkciójára is.

A $\neg\alpha$ formula a de Morgan-szabályok miatt ekvivalens a $\neg K_1 \vee \ldots \vee \neg K_n$ formulával. Ismét a de Morgan-átalakításokat használva, most a $\neg K_i$ tagokra, ezek literálok konjunkciói lesznek, azaz egyenként konjunktív normálformájúak. Viszont az előzőek szerint, véges sok, konjunktív normálformára hozható formula diszjunkciója is konjunktív normálformára hozható.

$\alpha \to \beta$ alakú formulákra az állítás igaz, hiszen $\alpha \to \beta$ ekvivalens $\neg\alpha \vee \beta$-val, és külön $\neg\alpha$-ra, valamint diszjunkcióra már igazoltuk az átalakíthatóságot.

$\alpha \leftrightarrow \beta$ alakú formulára az $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ átalakítást használva bizonyíthatjuk állításunkat.

■

A tételben garantált valamely konjunkciót a formula egy *konjunktív normálformájának* hívjuk. A konjunktív normálformára hozás általában **nem egyértelmű**. Nem foglalkozunk most a konjunktív normálforma fogalmának olyan módosításaival, amelyek esetén egy formula normálformája már egyértelmű.

A konjunktív normálformához hasonló a vele „duális" *diszjunktív normálforma*, amely *literálok konjunkcióinak diszjunkciója*. A 2. Tételhez analóg állítás bizonyítható diszjunktív normálformákra is. Nyilvánvaló, hogy a de Morgan-átalakításokat alkalmazva egy formula konjunktív normálformájából közvetlenül megkapjuk negáltjának diszjunktív normálformáját.

A konjunktív normálformát kvantormentes formulákra definiáltuk, ezért *a konjunktív normálformák eredete az állításlogika*. Nyilván lehet konjunktív normálformát csak az állításlogikára definiálni.

* * *

3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy α formula *prenex* formájú, ha $Q_1x_1 \ldots Q_kx_k\,\gamma$ alakú, ahol γ kvantormentes formula, a $Q_1, \ldots Q_k$-k tetszőlegesen jelölhetnek univerzális vagy egzisztenciális kvantorokat, az $x_1, \ldots x_k$-k pedig a nyelv tetszőleges individuumváltozói lehetnek. γ-ról azt mondjuk, hogy a *formula magja*, a $Q_1x_1, \ldots Q_kx_k$ sorozatról pedig azt mondjuk, hogy a formula *prefixuma* és hosszúsága k.

4. Tétel. (Prenex normálforma tétel.) A nyelv bármely formulájához létezik vele *logikailag ekvivalens prenex formájú formula*, azaz bármely formula prenex formára hozható.

Bizonyítás. A tétel a formulák definíciója szerinti indukcióval igazolható.

Az állítás igaz atomi formulákra, hiszen az atomi formulák nyilván prenex alakúak, nulla hosszúságú prefixummal.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz az α és β formulákra, és tegyük fel, hogy a velük ekvivalens prenex alakú formulák rendre α' és β', ahol $\alpha' = Q_1x_1 \dots Q_kx_k\gamma$ és $\beta' = P_1y_1 \dots P_my_m\delta$. Elegendő megmutatni, hogy az $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\exists x\alpha$, $\forall x\alpha$ alakú formulák is prenex alakra hozhatók. Ismét kihasználjuk majd azt, hogy ha részformulákat ekvivalens formulákra cserélünk, akkor az egész formula is ekvivalens marad az eredetivel.

$\neg\alpha$ és $\neg\alpha'$ ekvivalensek, azaz a $\neg Q_1x_1...Q_kx_k\gamma$ formula ekvivalens $\overline{Q_1}x_1...\overline{Q_k}x_k\neg\gamma$-val, ahol $\overline{Q_j} = \forall$, ha $Q_j = \exists$ és $\overline{Q_j} = \exists$, ha $Q_j = \forall$ $(j = 1,\dots k)$. Alkalmazhatjuk ugyanis azt az átalakítást, hogy negációt és kvantort felcserélve, univerzális kvantor egzisztenciálissá, egzisztenciális pedig univerzálissá válik. $\neg\alpha$ tehát prenex alakra hozható.

Tekintsük ezután az $\alpha \wedge \beta$ formulát, majd helyette az $\alpha' \wedge \beta'$ formulát. Feltehetjük, hogy az α'-ben kötött $x_1,\dots x_k$ változók nem fordulnak elő sem kötve, sem szabadon β'-ben, és fordítva, hogy a β'-ben kötött $y_1,\dots y_m$ változók nem fordulnak elő sem kötve, sem szabadon α'-ben, hiszen mindez a kötött változók alkalmas előzetes *cseréjével* elérhető. Ezután a $Q_1x_1 \dots Q_kx_k\gamma \wedge P_1y_1 \dots P_my_m\delta$ formulából lépésenként „kiemelhetjük” a kvantorokat, alkalmazva a 2.2 rész 17. Tételbeli *e)* és *f)* ekvivalenciákat.

Tehát $\alpha \wedge \beta$ ekvivalens például a $Q_1x_1(Q_2x_2 \dots Q_kx_k\gamma \wedge P_1y_1 \dots P_my_m\delta)$ (vagy például a $P_1y_1(Q_1x_1 \dots Q_kx_k\gamma \wedge P_2y_2 \dots P_my_m\delta)$) formulával.

Ez ismét ekvivalens például a $Q_1x_1P_1y_1(Q_2x_2 \dots Q_kx_k\gamma \wedge P_2y_2 \dots P_my_m\delta)$ (vagy például a $Q_1x_1Q_2x_2(Q_3x_3 \dots Q_kx_k\gamma \wedge P_1y_1 \dots P_my_m\delta)$) formulával, és így tovább.

Ezért $\alpha' \wedge \beta'$ ekvivalens például az $Q_1x_1 \dots Q_kx_kP_1y_1 \dots P_my_m(\gamma \wedge \delta)$ formulával. Tehát $\alpha \wedge \beta$ prenex alakra hozható.

Az $\alpha \wedge \beta$ esethez hasonló gondolatmenet alkalmazható az $\alpha \vee \beta$ formula esetére.

$\alpha \to \beta$, illetve $\alpha \leftrightarrow \beta$ prenex alakra hozásánál a $\neg\alpha \vee \beta$, illetve $(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$ átalakításokat használhatjuk, majd alkalmazzuk lépésenként a $\neg$-ra, $\wedge$-ra és $\vee$-ra a fenti gondolatmeneteket.

Ha a formula $\exists x\alpha$ vagy $\forall x\beta$ alakú, akkor az állítás triviális.

■

Mint a bizonyításból kiderül, **formulák prenex alakra hozása sem egyértelmű**. Például amikor két prenex alakú formula konjunkcióját hozzuk prenex alakra, akkor a kvantorokat többféle sorrendben is „kiemelhetjük”. Sőt ilyenkor még a prefixum hossza sem egyértelmű, hiszen bizonyos kvantorokat módunkban áll a formulapárból „szimultán” is kiemelni, a 2.2 rész 17. Tétel *e)*-beli tulajdonságokat alkalmazva.

A tételben garantált valamely prenex formát a formula egy *prenex normálformájának* hívjuk.

* * *

5. Definíció. Egy prenex alakú formula *Skolem-alakú*, ha prefixumában csak *univerzális* kvantorok fordulnak elő.

Legyen $\varphi = Q_1x_1 \dots Q_kx_k\gamma$ az $\mathcal{L}$ nyelv adott prenex alakú zárt formulája (ahol $x_1, \dots x_k$ tetszőleges individuumváltozók). A következőkben **bővítjük az $\mathcal{L}$ nyelvet egy $\mathcal{L}'$ nyelvvé, és az új nyelvben definiálunk φ-hez egy φ_s Skolem-alakot**, indukcióval:

Tegyük fel, hogy φ

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m \exists x_{m+1} Q_{m+2}x_{m+2} \dots Q_kx_k\gamma(x_1, \dots x_k) \tag{1}$$

alakú, ahol $Q_{m+2}, \dots Q_k$ tetszőlegesen jelölhetnek univerzális vagy egzisztenciális kvantorokat, és $m=0$ is megengedett (tehát φ egy m hosszúságú univerzális blokkal kezdődik).

Ha $m=0$, akkor bővítsük az $\mathcal{L}$ nyelvet egy c konstanssal, és rendeljük φ-hez a $Q_2x_2 \dots Q_kx_k\gamma(x_1/c, \dots x_k)$ formulát.

Ha m pozitív, akkor bővítsük az $\mathcal{L}$ nyelvet az X_{m+1} m változós függvényjellel, és rendeljük φ-hez a

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m Q_{m+2}x_{m+2} \dots Q_kx_k\gamma(x_1, \dots x_{m+1}/X_{m+1}(x_1, \dots x_m) \dots x_k)$$

φ_1-gyel jelölt formulát. φ-ben tehát elimináltuk az első egzisztenciális kvantort.

φ_1 ismét (1) alakú, m helyett valamely $m+k$-ra, és így ismételhetjük a fenti eljárást.

Általában, ha egy prenex alakú formula prefixumában balról jobbra az első egzisztenciális kvantort s darab univerzális kvantor előzi meg, akkor bővítsük a nyelvet egy s változós új X függvényjellel ($s=0$ esetén egy új konstanssal). Ezután a szóban forgó egzisztenciális kvantort elhagyjuk a prefixumból, és a kvantált változójának előfordulásai helyébe X-et helyettesítjük úgy, hogy X argumentumaiba az s darab már univerzálisan kvantált változót helyettesítjük.

Az eljárást annyiszor ismételjük, ahány egzisztenciális kvantor van φ prefixumában, tehát p darab egzisztenciális kvantor esetén, p darab új konstans-, illetve függvényjellel bővítjük a nyelvet.

Az így végeredményként nyert φ_s *formula lesz a φ-hez rendelt Skolem-alak. φ-hez φ_s hozzárendelése egyértelmű.*

Vegyük észre, hogy φ_s definíciója egyúttal *algoritmusnak is tekinthető* meghatározására (ellentétben a konjunktív és prenex formákra adott definíciókkal).

6. Definíció. A fentiek szerint meghatározott φ_s-et a φ prenex alakú formula *Skolem-normálformájának* nevezzük.

A definiált φ_s Skolem-alak a következő értelemben „helyettesíti” az eredeti formulát:

7. Tétel. (Skolem-normálforma tétel.) Legyen φ egy $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv zárt prenex alakú formulája, φ_S φ-nek Skolem-normálformája, és $\mathcal{L}'$ a φ_S-hez definiált elsőrendű nyelv. Ekkor minden $\mathcal{L}$ típusú $\mathcal{A}$ modellnek van olyan $\mathcal{A}'$ bővítése konkrét függvényekkel ugyanazon alaphalmazú $\mathcal{L}'$ típusú modellé, hogy

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathcal{A}' \vDash \varphi_S.$$

Bizonyítás. A bizonyítás φ_S definíciójának megfelelően történik. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \vDash \varphi$.
Legyen φ

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \exists x_{m+1} Q_{m+2} x_{m+2} \ldots Q_k x_k \gamma(x_1, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_k) \tag{2}$$

alakú. Tekintsük a $\exists x_{m+1} Q_{m+2} x_{m+2} \ldots Q_k x_k\ \gamma(x_1, \ldots x_m,\ x_{m+1}, \ldots x_k)$ részformulát. Ennek igazságértéke általában *függ* az $x_1, \ldots x_m$ szabad változók értékeinek választásától. Most azonban az $\mathcal{A} \vDash \varphi$ feltétel szerint e formula az $x_1, \ldots x_m$ változók minden $x_1^0, \ldots x_m^0 \in A$ értékére igaz. Például rögzített $x_1^0, \ldots x_m^0 \in A$ értékekhez, az igazságértékelés definíciója szerint, *van olyan* $X_{m+1}^0 \in A$ érték, jelöljünk egy ilyen értéket $X_{m+1}^0(x_1^0, \ldots x_m^0)$-val, hogy

$$Q_{m+2} x_{m+2} \ldots Q_k x_k \gamma(x_1^0, \ldots x_m^0,\ X_{m+1}^0(x_1^0, \ldots x_m^0),\ x_{m+2}, \ldots x_k)$$

igaz $\mathcal{A}$-n. Vegyük észre, hogy X_{m+1}^0 értéke (jelöléseinknek megfelelően) függ az $x_1^0, \ldots x_m^0$ értékektől, azaz egy m változós $X_{m+1}^0(x_1^0, \ldots x_m^0)$ függvény.
Legyen a φ_S definíciójában szereplő, $\mathcal{L}'$-beli X_{m+1} függvényjel interpretációja A-n az iménti $X_{m+1}^0(x_1^0, \ldots x_m^0)$ függvény ($m = 0$ esetén az X_1^0 konstans). $X_{m+1}^0(x_1^0, \ldots x_m^0)$ választása ugyan nem egyértelmű, de választását rögzítsük.
φ_S definíciója szerint ezután képezzük φ_1-et, ahol φ_1-et megint tekinthetjük (2) alakúnak valamely m-re, ahol a formula magja már a bővített nyelvből kerül ki. Elismételve a gondolatmenetet erre a formulára, majd újabb formulákra addig, ameddig találunk még egzisztenciális kvantort a prefixumban, azt kapjuk, hogy valóban léteznek az új függvényjeleknek interpretációi $\mathcal{A}$-n úgy, hogy ezen interpretációkat hozzávéve az $\mathcal{A}$ modellhez, a kapott $\mathcal{A}'$ modellre és a φ_S formulára $\mathcal{A}' \vDash \varphi_S$.

Fordítva, ha az $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{A}$ struktúrák alaphalmaza megegyezik, és $\mathcal{A}'$ $\mathcal{A}$-nak olyan $\mathcal{L}'$ típusú bővítése, hogy $\mathcal{A}' \vDash \varphi_S$, akkor kihasználjuk, hogy a *fenti gondolatmenet megfordítható*. Ugyanis most „belülről kifelé” haladunk, először a kvantorblokkban utoljára eliminált egzisztenciális kvantort állítjuk vissza, tehát a bevezetett függvényjel (Skolem-függvény) helyébe új változót vezetünk be, és beszúrunk a kvantorblokkba egy rá vonatkozó egzisztenciális kvantort. Ezt tovább ismételjük, és végül nyilván azt kapjuk, hogy az eredeti φ formulára $\mathcal{A} \vDash \varphi$.

■

Beszélhetünk egy *tetszőleges* (tehát nem prenex alakú) *formula Skolem-normálformájáról* is abban az értelemben, hogy *valamely* prenex formájához tartozó φ_S alakot tekintjük. Természetesen a hozzárendelés ehhez *nem* egyértelmű, hiszen a Skolem-forma függ a formula prenex alakjától.

Vigyázzunk, hogy φ és φ_S a bővített nyelvben *logikailag nem ekvivalensek*, hiszen igazságuk nem minden modellen, csak bizonyos modelleken esik egybe, a Skolem-függvények értékeit nem választhatjuk meg tetszőlegesen. φ és φ_S a *kielégíthetőség* szempontjából ekvivalensek, tehát egy *gyengébb értelemben ekvivalensek*, mint a logikai ekvivalencia, ugyanis igaz a következő:

Következmény. Tetszőleges $\mathcal{L}$ nyelv zárt φ formulájához van a nyelvnek olyan $\mathcal{L}'$ bővítése véges sok függvényjellel, hogy igaz a következő: *φ kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a φ-hez rendelt φ_S Skolem-formula kielégíthetetlen.*

8. Definíció. Egy Skolem-forma *erős Skolem-forma*, ha a prenex formula magja konjunktív normálformájú.

Az erős Skolem-forma tehát a Skolem-forma és a konjunktív forma összevonása. Előnyös, hogy a Skolem-forma prefixuma „bevihető” a mag konjunkciós klózai elé az univerzális kvantorok és a konjunkcióra vonatkozó 2.2 rész 17. Tételbeli *e)* összefüggés miatt, tehát igaz a következő:

Ha a formula $\forall(K_1 \wedge \ldots \wedge K_m)$ erős Skolem-alakú, akkor ekvivalens a $\forall K_1 \wedge \ldots \wedge \forall K_m$ formulával.

A formula *kielégíthetősége* tehát ekvivalens a klózok univerzális lezártjaiból álló $\{\forall K_1, \ldots \forall K_m\}$ formulahalmaz *kielégíthetőségével*.

* * *

A következőkben a normálformára hozás technikájával foglalkozunk, amennyiben **kézi számolásra alkalmas eljárásokat mutatunk be** (ezek könnyen továbbfejleszthetők algoritmusokká).

Konjunktív normálformára hozásnál általában a következő könnyen algoritmizálható „*kiküszöbölési eljárást*” követjük:

- Kiküszöböljük az $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ műveleteket a $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ és a $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg\psi \vee \varphi)$ ekvivalenciák segítségével.
- Kiküszöböljük a negációt a *nem atomi* részformulákból, például elimináljuk az összes $\neg(\varphi \vee \psi)$, illetve $\neg(\varphi \wedge \psi)$ alakú részformulákat, helyettük $\neg\varphi \wedge \neg\psi$-t, illetve $\neg\varphi \vee \neg\psi$-t írva.
- Alkalmazzuk a disztributív tulajdonságokat, például a $\varphi \vee (\psi \wedge \delta)$ alakú részformulákat átalakítjuk $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \delta)$ alakúvá.
- Egyszerűsítési lépés: Ha egy literál többször fordul elő egy klózban, akkor csak egyetlen előfordulását tartjuk meg. Ha egy klózban literál és negáltja egyszerre fordul elő (identitásklóz), akkor a klózt elhagyjuk, kivéve ha ez az egyetlen klóz.

Könnyű belátni, hogy a fentieket alkalmazva, eljutunk a konjunktív formához.

A következő példákban A, B és C tetszőleges állítások konstansok lehetnek.

1. Példa. *Hozzuk konjunktív normálformára!*

$$\neg(A \wedge (B \vee C)) \to (A \wedge B) \vee C$$

Eliminálva az implikációt, ezt kapjuk: $(A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge B) \vee C$.
$(A \wedge B) \vee C$ ekvivalens $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$-vel. Ha az utóbbi formulát D-vel jelöljük, akkor az eredeti $(A \wedge (B \vee C)) \vee D$ ekvivalens $(A \vee D) \wedge (B \vee C \vee D)$-vel. Részletezve a D formulát, és ismét használva a $\vee$-nak a $\wedge$-ra vonatkozó disztributivitását:
$(A \vee D) \wedge (B \vee C \vee D) =$
$= (A \vee ((A \vee C) \wedge (B \vee C))) \wedge (B \vee C \vee ((A \vee C) \wedge (B \vee C))) =$
$= (A \vee A \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee A \vee C) \wedge (B \vee C \vee B \vee C) =$
$= (A \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C)$-t kapjuk, tehát kaptunk már egy normálformát: $(A \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)$.
Ez tovább egyszerűsíthető, ha kihasználjuk, hogy például $(A \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$ ekvivalens $A \vee C$-vel, a disztributivitás miatt (hasonló igaz $(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C)$ és $B \vee C$-re is). Ezért az egyszerűsített normál forma: $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

2. Példa. *Hozzuk konjunktív normálformára!*

$$(C \to A) \to ((B \vee C) \to A)$$

Kiküszöbölve az implikációkat, a formula ekvivalens $\neg(\neg C \vee A) \vee (\neg(B \vee C) \vee A)$-val, ez pedig a de Morgan-szabályokat használva $(C \wedge \neg A) \vee ((\neg B \wedge \neg C) \vee A)$-val. Innen $(\neg B \wedge \neg C) \vee A$ a disztributív szabály miatt ekvivalens $(\neg B \vee A) \wedge (\neg C \vee A)$-val, majd $(C \wedge \neg A) \vee ((\neg B \vee A) \wedge (\neg C \vee A))$ ekvivalens $(C \vee \neg B \vee A) \wedge (C \vee \neg C \vee A) \wedge$ $\wedge (\neg A \vee \neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee A)$-val. Utóbbi három az identitásklóz, ezért a normálforma: $C \vee \neg B \vee A$.

A **prenex normálformára** hozásnál általában a következő *kiküszöbölési eljárást* alkalmazhatjuk.

- Kiküszöböljük az $\to$ és $\leftrightarrow$ műveleteket $\wedge$, $\vee$ és $\neg$ segítségével.
- Kiküszöböljük a negált részformulákat a literálok kivételével, használva a de Morgan-szabályokat és a $\neg \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \neg \varphi$, valamint $\neg \exists x \varphi \leftrightarrow \forall x \neg \varphi$ ekvivalenciákat.
- Lépésenként, a kvantált változók előzetes cseréjével elérjük, hogy a konjunkciókból, illetve diszjunkciókból „ki tudjuk emelni” a kvantorokat, alkalmazva a 2.2 alfejezet 17. Tétel *e)* és *f)* pontját.

A Skolem-normálformára hozásra a Skolem-forma definíciója már szolgáltat egy algoritmust.

3. Példa. *Hozzuk prenex alakra!*

$$\forall x(\exists y(Sxy \wedge My \to \exists y(Iy \wedge Exy)))$$

A formula rendre ekvivalens a következőkkel:
$\forall x \exists y(\neg Sxy \vee \neg My \vee \exists y(Iy \wedge Exy))$,
$\forall x \exists y(\neg Sxy \vee \neg My \vee \exists z(Iz \wedge Exz))$ (a belső y-t kicseréltük z-re),
$\forall x \exists y \exists z(\neg Sxy \vee \neg My \vee (Iz \wedge Exz))$.
Ez a formula egyik prenex alakja.

4. Példa. *Hozzuk prenex alakra!*

$$\exists x \forall y \neg Axy \to \forall y \exists x Bxy$$

A következő formulák ekvivalensek:
$\neg\exists x \forall y \neg Axy \vee \forall y \exists x Bxy$,
$\forall x \exists y Axy \vee \forall y \exists x Bxy$.
Cserékkel diszjunkttá téve a diszjunkciós tagok individuumváltozó halmazait, azt kapjuk, hogy:
$\forall x \exists y Axy \vee \forall u \exists v Buv$.
Kiemelve rendre a kvantorokat:
$\forall x \exists y \forall u \exists v(Axy \vee Buv)$.

5. Példa. *Hozzuk Skolem-normálformára!*

$$\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v \forall s \exists t P(x, y, z, u, v, s, t)$$

A megoldás a
$\forall y \forall z \forall s P(X, y, z, U(y, z), V(y, z), s, T(y, z, s))$
formula, ahol a nyelvet az X individuumkonstanssal és az U, V és T függvényjelekkel bővítettük.

6. Példa. *Hozzuk Skolem-formára!*

$$\forall x Pxa \wedge \exists y \neg(Qy \to Pbc) \to \forall x Pax \to Rba$$

Elimináljuk az implikációt:
$\neg(\forall x Pxa \wedge \exists y \neg(\neg Qy \vee Pbc)) \vee (\neg\forall x Pax \vee Rba)$.
Elimináljuk a negációkat (kivéve a literáloknál):
$\exists x \neg Pxa \vee \forall y(\neg Qy \vee Pbc) \vee \exists x \neg Pax \vee Rba$
Lecseréljük az egyik x változót:
$\exists s \neg Psa \vee \forall y(\neg Qy \vee Pbc) \vee \exists x \neg Pax \vee Rba$
Kiemeljük valamilyen sorrendben a kvantorokat, ezzel egy prenex normálformát kapunk:
$\exists s \forall y \exists x(\neg Psa \vee (\neg Qy \vee Pbc) \vee \neg Pax \vee Rba)$

Bővítjük a nyelvet annak érdekében, hogy Skolem-normálformát nyerjünk. Az új szimbólumok: az S konstans és X egyváltozós függvényszimbólum:
$\forall y(\neg PSa \vee \neg Qy \vee Pbc \vee \neg PaXy \vee Rba)$

7. Példa. *Hozzuk a 3. Példa eredményét erős Skolem-alakra.*

A Skolem-alak:
$\forall x(\neg Sx\,Yx \vee \neg M\,Yx \vee (IZx \wedge Ex\,Zx)$,
ahol a nyelvet két egyváltozós függvényszimbólummal, Y-nal és Z-vel bővítettük.
Az erős Skolem-alak:
$\forall x((\neg Sx\,Yx \vee \neg M\,Yx \vee IZx) \wedge (\neg Sx\,Yx \vee \neg M\,Yx \vee Ex\,Zx))$

2.4 Redukciós tételek

Jelen részben háromféle „redukcióval” (és ezek következményeivel) foglalkozunk. A kompaktsági tétel egy „*végesítési*” tétel, és egyszerűsége ellenére központi szerepet tölt be a logikában (szoros köze van a matematika más ágaiban, például a topológiában jelentős szerepet játszó „kompaktság” fogalmához, de ezt a kapcsolatot csak a 4.4 részben részletezzük). A kompaktsági tétel következményeit még majd 4.2-ben is tárgyaljuk. A Gödel–Bernays–Church-tétel az *elsőrendű* logikának *állításlogikára* történő redukciójával foglalkozik, míg a Herbrand-tétel az utóbbi és a kompaktsági tétel összevonása. Végül olyan redukcióval foglalkozunk, melynek segítségével visszavezethetjük egy formulahalmaz kielégíthetőségét bizonyos *adott modellosztályokon kielégíthetőségre*, például a „Herbrand-modellek” osztályára. Idetartozik a Löwenheim–Skolem-tétel is, azaz a kielégíthetőség redukciója bizonyos számosságnál kisebb számosságú modellek osztályára.

2.4.1 Kompaktsági tétel

Legyen Σ elsőrendű formulák egy tetszőleges halmaza.

1. Tétel. (Kompaktsági tétel, szemantikai változat.)

> Formulák egy Σ halmaza kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha Σ-nak van véges, kielégíthetetlen részhalmaza.

Következmény. (Kompaktsági tétel, kielégíthetőségre vonatkozó változat):

> Formulák egy Σ halmaza kielégíthető akkor és csak akkor, ha Σ bármely véges részhalmaza kielégíthető.

E következmény nyilván a tétel „negált” alakja. Először példát mutatunk a kompaktsági tétel (utóbbi változatának) alkalmazására.

Példa. *Mutassuk meg, hogy a „végesnek lenni” tulajdonság nem elsőrendű tulajdonság, azaz elsőrendű nyelven nincs olyan formula, amelynek jelentése az, hogy „végesnek lenni”.*

Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges, egyenlőséget tartalmazó nyelv. Indirekt tegyük fel, hogy α a végességet kifejező tulajdonság, azaz α-nak pontosan a véges alaphalmazú struktúrák a modelljei. Legyen φ_n az a formula, amelyik azt fejezi ki, hogy az „alaphalmaz legalább n elemű”, tehát legyen φ_n a

$$\exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_n (v_1 \neq v_2 \wedge v_1 \neq v_3 \wedge \ldots \wedge v_1 \neq v_n \wedge v_2 \neq v_3 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \neq v_n) \qquad (1)$$

formula.

Tekintsük a $\Sigma = \{\varphi_n : n \in \omega\} \cup \{\alpha\}$ formulahalmazt, és alkalmazzuk rá a kompaktsági tételt. Σ minden véges részének nyilván van modellje, tehát a kompaktsági tétel miatt Σ-nak is van modellje. E modell minden n-re kielégíti φ_n-et, ezért alaphalmaza végtelen. Másrészt e modell α-nak is modellje, ellentmondásban feltevésünkkel.

Vegyük észre, hogy a „végesnek lenni” tulajdonságot egy *mondathalmazzal* sem lehet leírni (abban az értelemben, hogy létezik olyan Δ mondathalmaz, hogy modelljei pontosan a véges modellek). A fenti gondolatmenet ugyanis elismételhető α helyett egy ilyen feltételezett Δ mondathalmazra is. A „végesnek lenni” tulajdonság a hagyományos értelemben tehát nem formalizálható sem véges, sem végtelen mondathalmazzal.

Nyilvánvaló, hogy a „*végtelennek lenni*” tulajdonság sem elsőrendű tulajdonság, hiszen ha az lenne, akkor negációja is az lenne. Vegyük azonban észre, hogy megszámlálható sok formulával már tudjuk jellemezni a „végtelennek lenni” tulajdonságot. Legyen ugyanis ez a formulahalmaz: $\Sigma = \{\varphi_n : n = 1, 2, \ldots\}$, ahol φ_n az (1)-ben leírt formula. A Σ formulahalmazt kielégítő modell valóban végtelen alaphalmazú, és fordítva egy végtelen alaphalmazú modell kielégíti Σ-t.

Ezután **a kompaktsági tétel fenti következményét igazoljuk az állításlogika esetére**, azaz a kompaktsági tétel kielégíthetőségére vonatkozó változatát az állításlogika esetére. Az elsőrendű eset bizonyításával majd 3.1-ben és 4.3-ban foglalkozunk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a nyelv csak a $\neg$ és $\wedge$ logikai műveleteket tartalmazza. Nevezzünk egy formulahalmazt *végesen kielégíthetőnek*, ha minden véges része kielégíthető. Σ tehát végesen kielégíthető.

Vegyük észre, ha egy Λ formulahalmaz végesen kielégíthető, akkor minden φ formulára vagy $\Lambda \cup \{\varphi\}$, vagy $\Lambda \cup \{\neg\varphi\}$ végesen kielégíthető. Hiszen ha egyik sem lenne ilyen tulajdonságú, akkor a Σ formulahalmaznak valamely véges Λ_1 és Λ_2 részeire $\Lambda_1 \cup \{\varphi\}$ és $\Lambda_2 \cup \{\neg\varphi\}$ sem kielégíthetők. Ezért $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \{\varphi\}$ és $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \{\neg\varphi\}$ sem kielégíthető. $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ viszont kielégíthető, mivel Σ végesen kielégíthető. Legyen $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ egy modellje $\mathcal{A}$. Itt φ vagy $\neg\varphi$ biztosan igaz, tehát $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \{\varphi\}$ vagy $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \{\neg\varphi\}$ igaz, és ez ellentmondás.

Az eredeti állítás egyik irányban triviális, ezért elegendő azt igazolni, hogy amennyiben Σ bármely véges része kielégíthető, akkor Σ is kielégíthető.

Rendezzük sorozatba a nyelv formuláit, ez megtehető, hiszen a nyelv megszámlálható. Jelölje e sorozatot $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Definiálunk e sorozathoz formulák halmazának egy $\langle \Sigma_k : k = 0, 1, 2, \ldots \rangle$ sorozatát a következőképpen. Legyen

$\Sigma_0 = \Sigma$, ahol Σ a tételben adott formulahalmaz,
$\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\beta_1\}$, ha $\Sigma \cup \{\beta_1\}$ végesen kielégíthető,
$\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\neg\beta_1\}$, ha $\Sigma \cup \{\neg\beta_1\}$ végesen kielégíthető.
stb.

Legyen $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Sigma_k$. A fent mondottak értelmében a definíció értelmes. Nyilván igazak Γ-ra a következő tulajdonságok:

a) $\Sigma \subseteq \Gamma$.
b) Minden α formulára, α és $\neg\alpha$ közül pontosan az egyik eleme Γ-nak.
c) Γ végesen kielégíthető.

Azt állítjuk, hogy Γ kielégíthető, következésképpen az a) tulajdonság miatt Σ is az. Megmutatjuk, hogy a következő értékelés kielégíti Γ-t:
$\overline{P} = \uparrow$, ha $P \in \Gamma$,
$\overline{P} = \downarrow$, ha $P \notin \Gamma$,
ahol P tetszőleges állításszimbólum, és $\overline{P}$ jelöli P igazságértékét egy adott interpretációnál.

Mivel minden P-re P vagy $\neg P$ eleme Γ-nak, ezért valóban egy igazságértékelést definiáltunk. Azt állítjuk, hogy ez az értékelés a következő tulajdonságú:

$$\text{Tetszőleges } \alpha \text{ formulára } \overline{\alpha} = \uparrow \text{ akkor és csak akkor, ha } \alpha \in \Gamma. \qquad (2)$$

Ebből már valóban következik $\Sigma \subseteq \Gamma$ miatt, hogy az adott értékelés kielégíti Σ-t. A (2) tulajdonságot formulaindukcióval igazoljuk.
Primformulákra a (2) tulajdonság definíció szerint igaz.
Tegyük fel, hogy (2) igaz a φ és ψ formulákra.
Legyen α a $\neg\varphi$ formula. Igazolandó, hogy $\overline{\neg\varphi} = \uparrow$ pontosan akkor, ha $\neg\varphi \in \Gamma$. Azonban egyrészt $\overline{\neg\varphi} = \uparrow$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\varphi} = \downarrow$. Az indukciós feltevés miatt $\overline{\varphi} = \downarrow$ akkor és csak akkor, ha $\varphi \notin \Gamma$, ami a b) tulajdonság miatt ekvivalens $\neg\varphi \in \Gamma$-val.
Legyen α a $\varphi \wedge \psi$ formula. Igazolandó, hogy $\overline{\varphi \wedge \psi} = \uparrow$ pontosan akkor, ha $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$. De egyrészt $\overline{\varphi \wedge \psi} = \uparrow$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\varphi} = \uparrow$ és $\overline{\psi} = \uparrow$. Az indukciós feltétel miatt $\overline{\varphi} = \uparrow$ ekvivalens $\varphi \in \Gamma$-val, és $\overline{\psi} = \uparrow$ ekvivalens $\psi \in \Gamma$-val. Ha indirekt feltesszük, hogy $\varphi \wedge \psi \notin \Gamma$, akkor (b) miatt $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, tehát a $\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi)\}$ formulahalmaz kielégíthető lenne, és ez ellentmondás.

■

A kompaktsági tételnek sok érdekes alkalmazása van, e könyvben is sokszor fogjuk alkalmazni, többek között fontos alkalmazása a nemstandard analízis (lásd 6.3).

2.4.2 Herbrand-tétel és változatai

Szükségünk lesz egy fontos szemantikai fogalomra, a *részstruktúra (vagy részmodell)* fogalmára.

2. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy $\mathcal{B}$ struktúra *részstruktúrája* az $\mathcal{A}$ struktúrának (vagy részmodellje, jelölésben $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$), ha $B \subseteq A$, azaz $\mathcal{B}$ alaphalmaza részhalmaza $\mathcal{A}$ alaphalmazának, továbbá $\mathcal{B}$ relációi és függvényei $\mathcal{B}$-re korlátozva, megegyeznek $\mathcal{A}$ relációival és függvényeivel (következésképpen a B halmaz zárt $\mathcal{A}$ függvényeire, azaz utóbbiak $\mathcal{B}$-re vett korlátozásainak értékkészlete része B-nek). Azt is mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ kiterjesztése a $\mathcal{B}$ struktúrának.

Az algebrából jól ismert részstruktúra-fogalmak például: lineáris algebrában az *altér*, csoportelméletben a *részcsoport*, Boole-algebrában a *Boole-részalgebra stb.* Könnyű meggondolni, hogy akárhány részstruktúra metszete is részstruktúra.

Legyen $\mathcal{L}$ individuumkonstanst tartalmazó elsőrendű nyelv.

3. Definíció. Az $\mathcal{L}$ nyelvhez tartozó *Herbrand-univerzumon* értjük $\mathcal{L}$ összes szabad változó nélküli termjeinek halmazát.

Például ha a nyelv csupán egyetlen a konstanst és egyetlen függvényszimbólumot tartalmaz, amelyik egyváltozós, akkor a Herbrand-univerzum:

$$\{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\} \tag{3}$$

4. Definíció. Ha φ kvantormentes formula, akkor φ összes szabad változóját szabad változó nélküli termekkel (azaz a Herbrand-univerzum elemeivel) helyettesítve, az így nyert helyettesítés eredménye φ egy *alapelőfordulása*.

Például ha $\mathcal{L}$ olyan, hogy a Herbrand-univerzum a (3)-beli, és φ 1 darab szabad változós, kvantormentes, nyílt formula, akkor φ alapelőfordulásai:

$$\{\varphi(a), \varphi(f(a)), \varphi(f(f(a))), \varphi(f(f(f(a)))), \dots\}$$

Az „alapelőfordulások” **állításlogikai formuláknak tekinthetők**, mint kvantor- és változómentes formulák, tehát például kielégíthetetlenségük is értelmezhető az állításlogikában. Azaz tekintjük az $\mathcal{L}$ nyelv szabad változót nem tartalmazó *atomi formuláinak* halmazát, S^*-ot, és definiálunk egy olyan $\mathcal{L}'$ állításnyelvet, amelynek állításszimbólumai pontosan ezek a formulák. Tehát például a $P(a,b,c)$ atomi formulát egy (a,b,c) sorozattal indexezett állításszimbólumnak tekinthetjük, jelölése például $P^{(a,b,c)}$ lehet. Mivel S^* változómentes, ezért az elsőrendű modelleken formuláinak igazságértéke nem függ az univerzum pontjaitól, így S^* minden elsőrendű modelljéhez hozzárendelhetjük egy állításmodelljét, sőt ilyen módon minden állításmodelljét megkapjuk. Ezért S^* minden állításmodellje felfogható egy elsőrendű modelljének is.

Legyen ψ zárt, *Skolem-normálformájú* formula, azaz $\psi \quad \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ alakú valamely φ-re, ahol φ kvantormentes. Tekintsük φ összes alapelőfordulásait:

$$S = \{S_r \varphi : r \in R\}, \tag{4}$$

ahol $S_r \varphi$ jelöli egy konkrét helyettesítés eredményét, az R indexhalmaz pedig a lehetséges helyettesítések összességét reprezentálja.

5. Tétel. (Gödel–Bernays–Church-tétel.)

A $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ mondat kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a (4)-beli S mint állításlogikai formulahalmaz kielégíthetetlen az állításlogikában.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy S kielégíthetetlen. Indirekt bizonyítunk. Ha $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ nem lenne kielégíthetetlen, akkor valamely $\mathcal{A}$ modellen $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ *igaz* lenne. Ugyanezt a modellt S állításmodelljének tekintve S nem teljesül, tehát $S_i \varphi$ *hamis* valamely i-re. Ez viszont ellentmond a $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ *igaz* feltevésnek.

A megfordítást is indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy S-nek van modellje (ez lehet bővebb, mint a Herbrand-univerzum). A fent mondottak értelmében ez a modell felfogható úgy, mint S-nek egy elsőrendű $\mathcal{A}$ modellje. Tekintsük $\mathcal{L}$ szabad változó nélküli termjeinek (a „Herbrand-univerzum” elemeinek) lehetséges *értékeit* $\mathcal{A}$-n, legyen ezek összessége B. A B halmaz *zárt a függvényekre* (hiszen a termek értékei is B-ben vannak), ezért tekinthetjük $\mathcal{A}$-nak a B alaphalmazú *részstruktúráját*, legyen ez $\mathcal{B}$. Nyilván $\mathcal{B}$ is modellje S-nek, hiszen S-ben csak változómentes formulák találhatók (tehát állításformulák).

Mivel $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ kielégíthetetlen, ezért $\mathcal{B}$-n is hamis, mivel $\mathcal{B}$ is egy $\mathcal{L}$ típusú modell. Ezért találhatóak $\mathcal{B}$-ben olyan $b_1, b_2, \ldots b_n$ elemek, hogy az $x_1 = b_1, \ldots x_n = = b_n$ individuumváltozó-értékelésre $(b_1, b_2, \ldots b_n \in B)$ $\varphi(b_1, \ldots b_n) = \downarrow$ $\mathcal{B}$-n. A B halmaz definíciója szerint viszont léteznek olyan $t_1, \ldots t_n$ szabad változó nélküli termek $\mathcal{L}$-ben, hogy *interpretációikra* $b_1 = t_1^{\mathcal{B}}, \ldots b_n = t_n^{\mathcal{B}}$. $\varphi(t_1^{\mathcal{B}}, \ldots t_n^{\mathcal{B}}) = \downarrow$ $\mathcal{B}$-n, ha $x_1 = t_1^{\mathcal{B}}, \ldots x_n = t_n^{\mathcal{B}}$, vagyis $\varphi(x_1/t_1, \ldots x_n/t_n) = \downarrow$ $\mathcal{B}$-n, azaz valamely j-re az $S_j \varphi$ formula hamis $\mathcal{B}$-n. Tehát egy S-beli formula hamis $\mathcal{B}$-n, ellentmondásban azzal, hogy $\mathcal{B}$ modellje S-nek.

■

Vegyük észre, hogy a fenti bizonyítás elemi abban az értelemben, hogy nem használ eredményt az elsőrendű logikából, csupán fogalmakat.

A következő tétel a Gödel–Bernays–Church-tételnek és az állításlogika kompaktsági tételének egyszerű következménye:

6. Tétel. (Herbrand-tétel a) változat.)

> A $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ mondat kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a (4)-beli S-nek van olyan véges részhalmaza, amely kielégíthetetlen.

Ugyanis a kompaktsági tétel miatt S kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha S valamely véges része kielégíthetetlen.

Legyen Δ Skolem-normálformájú formulák, tehát $\forall\varphi_i$ alakú formulák egy *tetszőleges* halmaza, ahol φ_i kvantormentes, $i \in I$. Jelölje S a φ_i formulák összes alapelőfordulásainak összességét ($i \in I$), S formulái tehát tekinthetők állításformuláknak. Könnyen általánosítható a 6. Tétel Skolem-normálformájú mondatok *végtelen* halmazára is.

7. Tétel. Skolem-normálformájú mondatok egy Δ halmaza kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha a Δ-beli formulák magjainak alapelőfordulásaiból képzett S valamely véges része kielégíthetetlen az állításlogikában.

A bizonyítás a Gödel–Bernays–Church-tétel bizonyításának egyszerű módosításával adódik a kompaktsági tétel felhasználásával.

Speciálisan, legyen a Herbrand-tétel a) változatbeli $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ formula egy zárt, *erős Skolem-normálformájú formula*, tehát $\forall x_1 \ldots \forall x_n (C_1 \wedge \ldots \wedge C_m)$ alakú, ahol $C_1, \ldots C_m$ klózok. Helyettesítsük a $C_1, \ldots C_m$ klózokba a nyelv szabad változó nélküli termjeit minden lehetséges módon, azaz képezzük a $C_1, \ldots C_m$ *klózhalmaz alapelőfordulásainak* halmazát.

Legyen ezen helyettesítések eredménye az $S = \{S_r C_i : r \in R,\ i = 1, \ldots m\}$ állításklózhalmaz.

Akkor mondjuk, hogy *elsőrendű klózok halmazának egy lezárása kielégíthetetlen*, ha az egyes klózok univerzális lezártjaiknak összessége mint formulahalmaz kielégíthetetlen. Elsőrendű klózok egy halmazáról akkor mondjuk, hogy kielégíthető, ha nem kielégíthetetlen.

A 7. Tétel következő esetét majd később, 3.3-ban, a rezolúcióelméletnél gyakran alkalmazzuk.

8. Tétel. (Herbrand-tétel b) változat.) A véges Λ elsőrendű *klózhalmaz lezártja kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha Λ alapelőfordulásainak van olyan véges részhalmaza, amelyik *kielégíthetetlen az állításlogikában*.

Megfogalmazhatók a fenti tételek „pozitív” változatai is. Például a Herbrand-tétel a) változatának másik alakja a következő: *A* $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ *mondatnak van modellje* *akkor és csak akkor, ha a (4)-beli S minden véges részhalmazának van modellje mint állításlogikai formulahalmaznak.*

Ezután két megjegyzést fűzünk a fenti tételekhez.

- A Gödel–Bernays–Church- és a Herbrand-tételek az elsőrendű logika kielégíthetőség (és következmény) problémájának a megfelelő állításlogikai problémára történő redukálhatóságára vonatkoznak. A tételek alapján mondhatjuk, hogy az elsőrendű kielégíthetőség problémája tulajdonképpen nem más, mint az állításlogika (a nulladrendű logika) hasonló problémájának a „*beemelése*” (vagy „*emelése*”, „*lifting*”-je) az elsőrendű logikába.
- Nagy különbség van véges Σ-ra az állításlogika és az elsőrendű logika kielégíthetőség problémája között a tekintetben, hogy amíg az elsőrendű logika esetében a probléma „*nem eldönthető*” (lásd majd a 3.4-et), addig az állításlogika hasonló problémája „*eldönthető*” (például igazságtáblázat segítségével). A Herbrand-tétel *nem ad döntési eljárást* az elsőrendű logika kielégíthetőség problémájára, mert ez a tétel szerint végtelen sok formula vizsgálatát igényli, valamint nem tudhatjuk előre, hogy melyik az a véges sok „alapelőfordulás”, amelynek vizsgálni kell a kielégíthetőségét.

A Herbrand-tétel a Gödel–Bernays–Church-tételnek élesítése, hiszen „végesítési” állítást is tartalmaz, ezért már az állításlogikai visszavezetés *módjára* is támpontot nyújt. A Herbrand-tétel ha nem is ad alapot döntési eljárásra, de biztosítékot jelent arra nézve, hogy egy értelmes keresési eljárást („félig döntési eljárást”) fogalmazhassunk meg. Ez azt jelenti, hogy amennyiben Λ állításformulák egy végtelen halmaza (például a prenex mag „alapelőfordulásainak” halmaza vagy a klózok „alapelőfordulásainak” halmaza stb.), és kielégíthetetlen, akkor ezt a tényt az eljárás véges sok lépésben igazolja. Azonban, ha Λ kielégíthető, akkor nem kapunk az eljárástól választ.

Konkrét keresési eljárás például a *Davis–Putnam-módszer*. A módszer abban áll, hogy Λ formuláit sorozatba rendezzük, majd képezzük e sorozat kezdőszeleteit, és rendre vizsgáljuk e szeletek, mint véges formulahalmazok, kielégíthetőségét.

Az eljárás azonban nagyon kevéssé hatékony. Például egy Skolem-forma magjának „alapelőfordulásaira” gondolva, számos alapelőfordulást feleslegesen generálunk. Például ha a nyelvben adott a $<$ reláció és individuumkonstansok egy végtelen $c_1, c_2, \ldots$ sorozata, akkor a $c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_3$, $c_2 < c_3 \wedge c_3 < c_4$, $c_3 < c_4 \wedge c_4 < c_5$ stb. formulák kielégíthetőségét külön vizsgáljuk, holott nyilvánvaló, hogy szerkezetük azonos. Elegendő lenne helyettük a szerkezetüket tükröző $x < y \wedge y < z$ nyílt, elsőrendű formula kielégíthetőségét vizsgálni. Az úgynevezett *helyettesítéses módszer* abban áll, hogy az eredeti elsőrendű nyelv kvantormentes *nyílt* formuláit is bevonjuk a kielégíthetőség-vizsgálatba, és kihasználjuk azt, hogy egy-egy ilyen nyílt formula feleslegessé teszi minden olyan formula vizsgálatát, amely az elsőrendű nyílt formulából helyettesítéssel keletkezik. E módszerek tárgyalására majd a rezolúcióelméletnél, a 3.3-ban térünk vissza.

2.4.3 Herbrand-modellek, Löwenheim–Skolem-tétel

A következő tételek adott formulákat (formulahalmazokat) kielégítő összes modellek osztályának bizonyos szűkítéseire vonatkoznak.

Legyen $\mathcal{L}$ *egyenlőségmentes, legalább egy darab konstanst tartalmazó* elsőrendű nyelv. Tekintsünk az $\mathcal{L}$ nyelvhez tartozó Herbrand-univerzumot, H-t. Bevezetjük az úgynevezett *Herbrand-modellek* fogalmát. A fogalom a *Herbrand-univerzumnak* az előző részben már bevezetett fogalmához kapcsolódik.

9. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy $\mathcal{L}$ típusú $\mathcal{H}$ modell *Herbrand-modell*, ha alaphalmaza az $\mathcal{L}$ nyelvhez tartozó H Herbrand-univerzum, és a függvények $f^{\mathcal{H}}$ interpretációira

$$f^{\mathcal{H}} t_1 \dots t_n = f t_1 \dots t_n,$$

azaz a termeket önmagukkal interpretáljuk, ahol $t_1, \dots t_n$ tetszőleges termek, és a $\mathcal{H}$ felső index, a szokásos módon, a $\mathcal{H}$-n vett interpretációt jelöli.

Speciálisan, $c^{\mathcal{H}} = c$. $\mathcal{H}$ bizonyos értelemben egy „szabad” struktúra. Megjegyezzük, hogy a nyelv *relációinak* interpretációira nem tettünk kikötést, ezek tetszőlegesen interpretálhatók, ezért egy nyelvhez *sok* Herbrand-modell tartozhat. Beszélhetünk természetesen egy *formula vagy formulahalmaz Herbrand-modelljéről* is, ez az illető formulát vagy formulahalmazt kielégítő Herbrand-modell. *Klózhalmaz* Herbrand-modelljén a klózhalmaz *lezárásának* Herbrand-modelljét értjük (lásd még 2.4.2).

A következő tétel a Herbrand-modellek kitüntetett szerepét mutatja. Legyen $\mathcal{L}$ *egyenlőségmentes* nyelv, legalább egy darab konstansszimbólummal. Legyen Δ $\mathcal{L}$ Skolem-normálformájú mondatainak egy halmaza.

10. Tétel.

A Skolem-normálformájú mondatok Δ halmazának van modellje akkor és csak akkor, ha Δ-nak van Herbrand-modellje.

Bizonyítás. Az egyik irány triviális, hiszen ha Δ-nak van Herbrand-modellje, akkor van modellje. Fordítva, tegyük fel, hogy Δ-nak van modellje, jelölje ezt $\mathcal{A}$. Igazolandó, hogy Δ-nak van Herbrand-modellje is.

Tekintsük az $\mathcal{L}$ nyelvhez tartozó Herbrand-univerzumot, H-t. Megadunk H-n egy Δ-t kielégítő interpretációt, kihasználva az $\mathcal{A}$ modellt.
A Herbrand-modell definíciójából adódik, hogy a függvények interpretációi definiáltak, de a relációjeleké nem. Ha P egy tetszőleges relációjel, akkor interpretációja legyen olyan, hogy

$$\mathcal{H} \vDash P(t_1, \dots t_n) \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathcal{A} \vDash P^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}}). \tag{5}$$

Ezután formulaindukcióval igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathcal{L}$-beli Skolem-normálformájú γ formulára is

$$\mathcal{H} \vDash \gamma(t_1, \dots t_n), \text{ ha } \mathcal{A} \vDash \gamma(t_1^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}}), \tag{6}$$

ebből már következik, hogy Δ teljesül $\mathcal{H}$-n.
Feltehetjük, hogy γ *erős Skolem-alakú*, azaz magja konjunktív normálformájú. Ez nem jelenti az általánosság korlátozását, mert minden Skolem-formájú formula logikailag ekvivalens egy erős Skolem-formájú formulával.

1. Atomi formulákra (5) miatt igaz a (6) állítás.
2. Tegyük fel, hogy (6) teljesül az $\alpha(t_1, \dots t_n)$, illetve a $\beta(t_1, \dots t_n)$ rögzített formulákra. Igazoljuk, hogy teljesül az $\alpha \wedge \beta$ formulára.

Igazolandó például, hogy $\mathcal{H} \vDash (\alpha \wedge \beta)(t_1, \dots t_n)$ teljesül, ha $\mathcal{A} \vDash (\alpha \wedge \beta)(t_1^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}})$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \vDash (\alpha \wedge \beta)(t_1^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}})$. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{A} \vDash \alpha(t_1^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}})$ és $\mathcal{A} \vDash \beta(t_1^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}})$. Utóbbiak az indukciós feltétel miatt egyenként implikálják, hogy $\mathcal{H} \vDash \alpha(t_1, \dots t_n)$ és $\mathcal{H} \vDash \beta(t_1, \dots t_n)$.
Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy $\mathcal{H} \vDash (\alpha \wedge \beta)(t_1, \dots t_n)$, mint azt igazolni kellett.

Hasonlóan látható be az $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\neg\alpha$ eset is.

3. Tegyük fel, hogy (6) teljesül $\alpha(t_1, \dots t_n)$-re tetszőleges $t_1, \dots t_n$ szabad változó nélküli termekre. Megmutatjuk, hogy (6) a $\forall x \alpha(x, t_2, \dots t_n)$ formulára is teljesül.

Ha $\mathcal{A} \vDash \forall x(x, t_2^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}})$ teljesül, akkor az univerzális kvantor miatt következik, hogy $\mathcal{A} \vDash \alpha(x/t_1^{\mathcal{A}}, t_2^{\mathcal{A}}, \dots t_n^{\mathcal{A}})$ *minden* H-beli t_1 zárt termre. Az indukciós feltevés miatt ekkor $\mathcal{H} \vDash \gamma(t_1, \dots t_n)$ is következik tetszőleges t_1 zárt termre. Utóbbi viszont azt jelenti, hogy $\mathcal{H} \vDash \forall x(x, t_2, \dots t_n)$, mint azt igazolni kellett.
Az egzisztenciális kvantor esetét nem kell vizsgálnunk, mivel γ a feltétel szerint Skolem-normálformájú.

■

A tétel szerint Δ kielégíthetőségét *elegendő* csak Herbrand-modelleken vizsgálni. A Skolem-normálforma feltétel lényeges, hiszen erősen kihasználtuk, hogy nincs egzisztenciális kvantor a formulában. Általánosítható viszont a tétel egyenlőséget tartalmazó nyelvekre is.

A tétel „negált” alakja a következő: *A Skolem-normálformájú mondatok Δ halmaza kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha Δ minden Herbrand-modellen kielégíthetetlen.*

Gyakran alkalmazzuk a tételnek azt az esetét, amikor a Δ formulahalmaz egy Λ elsőrendű klózhalmaz lezártja.

Következmény. A Λ elsőrendű klózhalmaz lezárásának van modellje akkor és csak akkor, ha Λ lezárásának van Herbrand-modellje.

A következő tétel a logika egyik „klasszikus tétele”. Megengedünk egy megszámlálhatónál nagyobb számosságú $\mathcal{L}$ nyelvet.

11. Tétel. (Löwenheim–Skolem-tétel.)

> Legyen Σ zárt formulák halmaza egy η számosságú nyelven. Amennyiben Σ-nak van modellje, akkor van legfeljebb η számoságú modellje is.

Bizonyítás.
Tekintsük Σ-nak egy $\mathcal{A}$ modelljét. Készítsük el valamennyi Σ-ban szereplő φ mondathoz a φ_S Skolem-formáját, és $\mathcal{L}'$ legyen az $\mathcal{L}$ alapnyelvnek az egyes Σ-beli φ-khez tartozó Skolem-bővítéseknek az uniója. Utóbbinál vigyázzunk arra, hogy ne szerepeljen ugyanaz a szimbólum két különböző formulához tartozó bővítésnél.
Összesen legfeljebb η szimbólummal bővítettük az $\mathcal{L}$ nyelvet, mert Σ legfeljebb η sok formulát tartalmaz, és egy formulához $\mathcal{L}$-nek csak egy véges bővítése tartozik. A Skolem-normálforma tétel szerint (2.3 rész 7. Tétel) az $\mathcal{A}$ modell bővíthető egy $\mathcal{L}'$ típusú $\mathcal{A}'$ modellé úgy, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$ alaphalmaza megegyezik, és $\mathcal{A}'$ kielégíti a $\Delta = \{\varphi_S : \varphi \in \Sigma\}$ formulahalmazt.
Ezután alkalmazzuk ugyanazt az ötletet, mint a Gödel–Bernays–Church-tétel bizonyításánál: tekintsük $\mathcal{A}'$-nek az $\mathcal{L}'$ szabad változó nélküli termjei értékei által generált $\mathcal{B}$ részstruktúrát (utóbbinak B alaphalmaza tehát az $\mathcal{L}'$-beli zárt termek értékei interpretációinak összessége). B legfeljebb η számosságú, hiszen az összes $\mathcal{L}'$-beli term is legfeljebb η számosságú. Mivel a Δ-beli formulák univerzálisak, így $\mathcal{A}'$-nek $\mathcal{B}$ részmodelljére is igazak maradnak. Ismét alkalmazzuk a Skolem-normálforma tételt, de a másik irányban, és a $\mathcal{B}$ modellre. Eszerint minden Δ-t kielégítő $\mathcal{L}'$ típusú modellhez, tehát $\mathcal{B}$-hez is van olyan modell, amelynek alaphalmaza ugyanaz, mint a Δ-t kielégítő modellé, tehát B, és e modell $\mathcal{L}$ típusú, és kielégíti Σ-t. A szóban forgó modell nyilván teljesíti a tétel feltételeit.

■

A Löwenheim–Skolem-tételnek érdekes és sokszor *paradoxonnak* tűnő következményei is vannak. Például alkalmazva a halmazelmélet vagy a valós számok egy elsőrendű axiómarendszerére, azt kapjuk, hogy ezen axiómarendszereknek *van megszámlálható modellje is* (ugyanakkor például a halmazelmélet megszámlálható modelljén is igaz az, hogy van kontinuum számosságú halmaz!). Sőt alkalmazhatjuk a Löwenheim–Skolem-tételt egy struktúra egész elméletére is (tehát ekkor $\Sigma = \mathrm{Th}\,\mathcal{A}$), speciálisan például a valós számok elméletére, és ekkor látszik, hogy *egy struktúra elmélete nem feltétlenül határozza meg a struktúrát*. Lehetséges tehát az, hogy pontosan ugyanazok az elsőrendű állítások igazak két különböző („nem izomorf") struktúrára.

Ez az észrevétel átvezet egy érdekes témakörhöz, a „nemstandard" modellek vizsgálatához (lásd 4.2).

3. FEJEZET

A BIZONYÍTÁSELMÉLETRŐL

Rövid *előzetes áttekintést* adunk néhány a jelen fejezetben szereplő fontos fogalomról és eredményről. Az Olvasó, ha kívánja, kezdheti a fejezet olvasását közvetlenül a 3.1.1 résszel, és visszatérhet jelen bevezetésre a fejezet elolvasása után is, e bevezetést összefoglalásként használva.

Láttuk már, hogy az igazságértékelés szemantikai definíciója általában nem, vagy csak nehézkesen alkalmazható arra, hogy formulák igazságértékeit meghatározzuk, vagy egy szemantikai következmény ($\Sigma \models \alpha$) helyességét vizsgáljuk. A logikának létezik egy másik felépítése, amelyik a logika fontos problémáit másfelől közelíti meg, mint a szemantika, eszközrendszerét tekintve függetlennek tekinthető az eddigi, szemantikai felépítéstől, hátterét illetően viszont szorosan összefonódik vele. Ez a másik terület *a bizonyításelmélet.*

A bizonyításelmélet, hasonlóan a szemantikához, *a nyelv fogalmára épül*, tehát jelen fejezet közvetlenül támaszkodik az 1. fejezetre.

A bizonyításelmélet a klasszikus *axiomatikus módszer* általánosításának tekinthető. Ha az Olvasó jártas egy kissé a matematikában, akkor van képe az axiomatikus módszerről. Az axiomatikus módszer egyik változata az, hogy rögzítünk egy formális nyelvet, felteszünk úgynevezett „szakmai axiómákat”, és implicite felteszünk bizonyos „logikai alapigazságokat”, másképpen „logikai axiómákat”, és bizonyos általános érvényű következtetési szabályok segítségével tételeket bizonyítunk (például a geometriát tekintve, a nyelv a geometria nyelve, a szakmai axiómák pedig a geometria axiómái). Mint tudjuk, a bizonyítási eljárás *véges*.

Általánosan, ha pontosan megadjuk a nyelvet, és felsoroljuk azt, hogy mely következtetési szabályokat, mely logikai axiómákat és milyen bizonyításfogalmat használunk, akkor a klasszikus axiomatikus módszernek az imént körülírt változatát „*levezetési (vagy dedukciós) rendszernek* nevezzük.

Az *indirekt bizonyítás* az axiomatikus módszer egy másik változata, amikor is feltesszük a bizonyítandó állítás ellenkezőjét (azaz ez utóbbit is axiómának tekintjük), és úgy bizonyítunk, hogy az előbb említett logikai apparátus alkalmazásával, erről a tagadásról megmutatjuk, hogy lehetetlen. Indirekt bizonyítás esetén *elegendő tehát csak azt definiálni*, hogy hogyan vezetünk le az axiómákból ellentmondást, tehát a logikai apparátus közvetlenül most nem egy rögzített állítás, hanem egy ellentmondás igazolására szolgál. Az axiomatikus módszer ezen változatát „*cáfolati rendszernek*” is hívjuk. A levezetési és cáfolati rendszereket együttesen *„bizonyítási rendszereknek*” (vagy „*kalkulusoknak*”) nevezzük.

A bizonyításelmélet a különböző „bizonyítási rendszerekkel”, másképpen „kalkulusokkal” foglalkozik. E fejezetben három bizonyítási rendszerrel, a Hilbert-félével, az analitikus fákkal és a rezolúcióval (ezen belül az SLD-rezolúcióval) fogunk foglalkozni, ezek közül a Hilbert-féle egy levezetési rendszer, az analitikus fák és a rezolúció pedig cáfolati rendszer. Nem célunk, hogy a bizonyítási rendszereket és magát a bizonyításelméletet teljes általánosságban tárgyaljuk. Megállapíthatjuk azonban, hogy a bizonyítás véges természetű, és a szabályok és a logikai axiómák is algoritmikusan kezelhetők.

Egy P bizonyítási rendszer egy $\vdash_P$ „*bizonyítási relációt*” definiál az adott nyelven. Tehát adott Σ axiómák („szakmai axiómák”) és adott α formula esetén vagy $\Sigma \vdash_P \alpha$, vagy $\Sigma \nvdash_P \alpha$ teljesül. Ha P *levezetési rendszer*, akkor a $\vdash_P$ relációt „*levezetési relációnak*” is szoktuk nevezni, $\vdash_P$ függ Σ-tól és α-tól. Azon zárt α formulák összességét, amelyek bizonyíthatók Σ-ból, $\mathrm{Ded}_P(\Sigma)$-val, vagy röviden $\mathrm{Ded}(\Sigma)$-val fogjuk jelölni. Amennyiben P *cáfolati rendszer*, akkor a $\vdash_P$ relációt „*cáfolati relációnak*” is nevezzük. $\vdash_P$ tehát nem függ α-tól, csak Σ-tól. Adott Σ esetén $\vdash_P$ szintén teljesül, vagy nem teljesül.

Megjegyezzük, hogy *a levezetési és cáfolati rendszerek egymásra kölcsönösen visszavezethetők*. Hiszen egy levezetési rendszer alkalmas minden formula levezetésének vizsgálatára, így többek között az ellentmondást jelentő $\alpha \wedge \neg\alpha$ (α tetszőleges) formula levezethetőségének vizsgálatára is (vagy ha a nyelvben létezik $\perp$ „hamis” szimbólum, annak levezetésére is). Fordítva, egy cáfolati rendszerben a $\vdash_P$ cáfolati reláció segítségével úgy definiálhatunk levezetési relációt, hogy Σ-ból akkor következik α, ha a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmazból $\vdash_P$ szerint bizonyítható az ellentmondás.

Fontos megjegyezni, hogy csakúgy, mint a klasszikus axiomatikus módszernél, egy adott P levezetési rendszer esetén nincs megadva egy eljárás $\vdash_P$ „*kiszámítására*”, azaz nincs egy eleve definiált döntési eljárás $\Sigma \vdash_P \alpha$ helyességét vagy helytelenségét illetően. Viszonylag könnyű ellenőrizni egy adott bizonyítást, de **nem könnyű megtalálni egy bizonyítást. Sőt az is lehetséges, hogy nem is létezik bizonyítás** sem α-ra, sem $\neg\alpha$-ra. Egy levezetési rendszer tehát csupán *keretet* biztosít a bizonyításokhoz. Definiálva van az, hogy **mit lehet** csinálni annak érdekében, hogy egy tételt igazoljunk, de általában nincs meghatározva, hogy **mit kell** csinálni ehhez. Nagy eltérések léteznek az egyes bizonyítási rendszerek között a tekintetben, hogy mennyire

„algoritmus közeliek”, könnyen fejleszthető-e tovább a rendszer algoritmussá (például az általunk tárgyalt rendszerek közül „algoritmus közeliek” az analitikus fák vagy az SLD-rezolúció, az ellenkezőjére pedig példa a Hilbert-rendszer).

A bizonyítások során végső sorban az történik, hogy egy formális nyelvben a jelekkel *véges* sok manipulációt (operációt) hajtunk végre (szemben a szemantikával, ahol általában *végtelen halmazokkal* foglalkozunk). Ez a folyamat könnyen megvalósítható számítógép segítségével. A bizonyításelmélet létezésének egyik jelentősége, hogy közel hozza a logikát a számítógéphez (és a számítógépet a logikához), és ezért a logika valóságról alkotott modellje számítógéppel vizsgálható. Többek között ez nyújt alapot az „automatikus tételbizonyítás” tevékenységéhez.

Említettük már, hogy sok híres matematikusnak volt álma (például Leibniznek, majd a 20. században Hilbertnek), hogy olyan algoritmust találjon, amelyik alkalmas arra, hogy tetszőleges matematikai állítás helyességét *eldöntse*, *gépesítse a matematikai bizonyítás folyamatát*. Úgy is megközelíthetjük ezt a problémát, hogy létezik-e olyan számítógépes program, amely alkalmas arra, hogy a számára megfogalmazható tételek helyességét eldöntse. Azonban sejthető volt, hogy egy ilyen univerzális tételbizonyító (gép), amelyik bármely Σ axiómarendszer és α állítás esetén megmondja, hogy α tétele-e a Σ axiómarendszernek, kissé utópisztikus elképzelés. Ilyen eljárás létezésének problémáját az *elsőrendű logika eldöntésproblémájának* hívjuk. A 20. század matematikájának egyik jelentős eredménye, hogy sikerült is bebizonyítani, hogy ilyen univerzális eljárás nem létezik (lásd majd a II. Church-tétel következményeit).

Ha univerzális bizonyítási eljárás nincs is, de *kereshetünk módszeresen* bizonyításokat. A bizonyítási rendszerek kibővíthetők egy keresési stratégiával, majd egy keresési algoritmussal, amelyek többek között egy-egy bizonyítás minél gyorsabb megtalálását célozzák, *feltéve, hogy létezik egyáltalán bizonyítás*. E vizsgálatok már átvezetnek az *automatikus tételbizonyítás* és *logikai programozás* témákhoz, ez utóbbiról 3.5-ben lesz szó. 3.6-ban a lambda-kalkulust vizsgáljuk.

* * *

Levezetési rendszerekkel összefüggésben többek között a következő fontos kérdések vetődnek fel:

Viszonylag könnyű újabb és újabb helyes levezetési szabályokat és alapigazságokat hozzávenni egy rendszerhez, de vajon mikor érdemes ezt a tevékenységet befejezni, mikor lehetünk „elégedettek” a szabályokkal. A másik kézenfekvő kérdés az, hogy mi a kapcsolata a $\vdash_P$ bizonyítási relációnak és a $\vDash$ következményfogalomnak.

A fenti két kérdés szorosan összefügg. Könnyű lesz majd belátni, hogy ha $\Sigma \vdash_P \alpha$, azaz Σ-ból α bizonyítható P szerint, akkor $\Sigma \vDash \alpha$ is teljesül. Erre a tulajdonságra azt mondjuk majd, hogy a $\vdash_P$ reláció (vagy a P levezetési rendszer) *helyes*. Ilyen esetben a $\vDash$ reláció nyilván kiterjesztése $\vdash_P$-nek. A helyesség, bizonyos értelemben, egy minimális követelmény a levezetési relációval szemben. Arra a kérdésre, hogy mikor nem feltétlenül szükséges már újabb következtetési szabályokkal és logikai axiómákkal bővíteni a rendszert, azt válaszolhatjuk majd, hogy akkor, ha $\vDash$ nemcsak kiterjesztése $\vdash_P$-nek, hanem egybe is esik vele. Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy a $\vdash_P$ reláció (vagy a P levezetési rendszer) *teljes* (kényelmi szempontból is szokták bővíteni az axiómarendszert, most ezzel a kérdéssel nem foglalkozunk). Mindezzel természetesen már a második kérdést is megválaszoltuk, hiszen teljesség esetén $\Sigma \vDash \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash_P \alpha$. Teljes levezetési rendszer esetén tehát a levezetési reláció úgy tekinthető, mint amellyel a $\vDash$ szemantikai következményrelációt *szimulálni tudjuk*. Ez visszaigazolás arra a 2. fejezetbeli észrevételre, hogy $\Sigma \vDash \alpha$ teljesülése csak a benne szereplő formulák szerkezetétől függ, hiszen a $\vDash$ relációval ekvivalens $\vdash_P$ definíciójánál *csak a formulák szerkezetét használjuk*. Más-más *teljes* levezetési rendszerek és a hozzájuk tartozó levezetési relációk esetén a levezetési relációk egybeesnek, mivel a teljesség miatt valamennyi egybeesik $\vDash$ relációval.

A $\vDash$ következményreláció szempontjából *elsődleges kérdés, hogy* létezik-e *hozzá egyáltalán teljes bizonyítási rendszer* (más kérdés, hogy teljes rendszer létezését általában úgy szokták igazolni, hogy megadnak egy konkrét ilyen rendszert, azonban ez nem törvényszerű).

Mint látni fogjuk, egy P levezetési rendszer *ereje* elsősorban a teljességi tételben rejlik, tehát abban, hogy a $\vDash$ relációt lehetséges szimulálni a levezetési relációval. Fontos következménye a teljességi tételnek, hogy a levezetési és a következményrelációk egybeesése miatt a bizonyításelmélet és a szemantika egymás *kontrolljának* tekinthető. A teljességi tétel következménye lesz többek között, hogy $\mathrm{Cons}(\Sigma) = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ miatt a 2.2-ben felvetett $\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Cons}(\Sigma)$ probléma visszavezethető a

$$\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Ded}(\Sigma) \tag{1}$$

problémára, ahol $\mathcal{A}$ most is tetszőleges rögzített struktúra, Σ egy alkalmas axiómarendszer (rekurzív mondathalmaz), $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ pedig a Σ-ból egy adott levezetési rendszerben bizonyítható mondatok halmaza. Az (1) probléma egyszerűbb $\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Cons}(\Sigma)$-nál annyiban, hogy a Ded reláció könnyebben kezelhető, mint a Cons reláció.

Paradoxonnak tűnik, de az is a bizonyításelmélet erejét mutatja, hogy a logika és matematika korlátait segítségével sikerült feltérképezni. Például, mint látni fogjuk (Gödel inkomplettségi tételei), ha (1)-ben a $\mathrm{Th}\mathcal{A}$ elmélet „elég erős”, akkor nem létezik olyan Σ axiómarendszer, amelyre (1) teljesül, tehát $\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Ded}(\Sigma)$. Ez azt jelenti, hogy „elég erős” elméletek esetén létezik $\mathrm{Th}\mathcal{A}$-hoz tartozó, de az axiómáktól „független” állítás (sem az állítás, sem negáltja nem bizonyítható). A $\vDash$ következményreláció (és a $\vdash_P$-reláció) eldönthetetlenségére gondolva, tehát ha egy bizonyítást keresünk a C levezetési rendszerben, és nem találjuk az n-edik lépésig, annak az is oka lehet, hogy egyáltalán *nincs is bizonyítás* (hasonló igaz lehet az állítás negáltjára is). Egy bizonyításkeresési eljárás tehát általában egy „félig döntési eljárás”, vagyis ha létezik bizonyítás, akkor az eljárás azt véges lépésben megtalálja, de ha nem, akkor nem jutunk el a döntésig (másképpen $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ nem *rekurzív*, hanem *rekurzív felsorolható* halmaz).

A logika korlátairól, azok következményeiről és ismeretelméleti vonatkozásairól 3.4-ben lesz szó.

A bizonyítási rendszereket többféleképpen lehet osztályozni. Különbségek lehetnek közöttük például a feltételezett következtetési szabályok, illetve a feltételezett logikai axiómák számának arányát illetően (az is előfordulhat, hogy egy bizonyítási rendszer egyáltalán nem használ logikai axiómát). Mint már említettük, egy másik lehetséges osztályozás az, hogy léteznek *levezetési* rendszerek és *cáfolati* rendszerek.

Megjegyezzük, hogy az irodalom nem egységes néhány bizonyításelméleti terminológiát illetően, például a „bizonyítási rendszer”, „levezetési rendszer”, „kalkulus”, „szintaktika” használatában. Például *szintaktikán* egyesek csak a formális nyelvet értik, mások viszont a nyelv és valamely bizonyítási eljárás párosát.

A bizonyításelmélet igen szerteágazó területe a logikának. Nem tudunk kitérni a bizonyítás „konstruktivista” fogalmára, ezzel kapcsolatban pedig a bizonyítás intuicionista fogalmára. Nem tárgyaljuk bizonyítások normálalakjait, azaz az adott kalkuluson belül megadható, tovább lényegesen már nem egyszerűsíthető bizonyítás fogalmát stb.

Először a bizonyításelmélet önálló felépítését fogjuk hangsúlyozni (3.1.1), később a *kapcsolatát a szemantikával* (3.1.2), a könyv számos fejezetében pedig *szimultán* tárgyaljuk a két megközelítést. 3.1-ben a *bizonyításelmélet alapjaival* ismerkedünk az általában csupán elméleti célokra használt Hilbert-féle levezetési rendszer keretében. A 3.2-ben és a 3.3-ban már az alkalmazásoknál is fontos szerepet játszó *cáfolati rendszerekkel*, az analitikus fákkal és a rezolúcióval ismerkedünk. 3.4-ben a logika már említett *korlátait* tárgyaljuk. 3.5-ben a bizonyításelmélet egy *alkalmazásáról*, a logikai programozásról lesz szó. 3.6-ban a lambda-kalkulust vizsgáljuk.

3.1 Alapfogalmak. A Hilbert-féle levezetési rendszer

3.1.1 Alapfogalmak

Jelen részben a bizonyításelmélet számos fogalmát vezetjük be az úgynevezett Hilbert-féle levezetési rendszerből kiindulva. Az itt ismertetett fogalmak megfelelői más „bizonyítási rendszereknél” is megtalálhatók. Számos fogalom (például ellentmondástalanság, függetlenség stb.) független lesz a bizonyítási rendszertől, legalábbis „valamirevaló” bizonyítási rendszerek esetén.

A Hilbert-féle levezetési rendszer (Hilbert-kalkulus) a következő elemekből áll:
- logikai axiómák,
- következtetési szabályok,
- bizonyításfogalom.

A következőkben sorra vesszük a fenti fogalmakat. Rögzítsünk egy tetszőleges elsőrendű nyelvet.

Először a **logikai axiómákat** adjuk meg. A Hilbert-rendszer logikai axiómáit véges *formulasémákkal* szokás definiálni.
A formulaséma fogalma ugyanúgy indukcióval definiálható az úgynevezett reláció- (vagy formula-) és függvény- (vagy term-) *változók* segítségével, mint maguk a formulák a reláció- és függvénykonstansok segítségével. A sémák egyenként végtelen sok formulát jelentenek. Amikor egy sémába konkrét formulát és termeket helyettesítünk, azt mondjuk, hogy a séma egy *példányát* képezzük. A következő definíció *véges* sok axiómasémát, de *végtelen* sok axiómát tartalmaz (a sémákat is szoktuk röviden logikai axiómáknak nevezni).

α, β és γ legyenek a nyelv tetszőleges formulái, t, $t_1, \dots t_{2n}$ pedig tetszőleges termek.

1. Definíció. (Logikai axiómák.)

(i) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(ii) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$

(iii) $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$

(iv) $\forall x(\alpha \to \beta) \to \forall x\alpha \to \forall x\beta$

(v) $\alpha \to \forall x\alpha$ feltéve, hogy x nem fordul elő szabadon α-ban

(vi) $\forall x\alpha \to \alpha(x/t)$

(vii) $t = t$

(viii) $t_1 = t_{n+1} \to \ldots \to t_n = t_{2n} \to f(t_1, \ldots t_n) = f(t_{n+1}, \ldots t_{2n})$

(ix) $t_1 = t_{n+1} \to \ldots \to t_n = t_{2n} \to R(t_1, \ldots t_n) = R(t_{n+1}, \ldots t_{2n})$

(x) az (i)–(ix)-ben foglalt sémák példányainak összes lehetséges *általánosításai*, ahol egy α séma egy lehetséges általánosításán vagy *generalizációján* értjük a $\forall x \alpha$ sémát, ahol x tetszőleges individuumváltozó.

Vegyük észre, hogy a logikai axiómák összessége *rekurzív* (azaz *eldönthető*) halmaz. A logikai axiómák érvényes (azonosan igaz) formulák a szemantikai értelemben, mint azt többről közülük már beláttuk.

A Hilbert-féle bizonyítási rendszer egyetlen **következtetési szabálya** a következő:

2. Definíció. (Modus ponens következtetési szabály.) Az α és az $\alpha \to \beta$ formulák bizonyíthatóságából következik a β formula bizonyíthatósága.

A szabályt így is jelöljük: $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$. A modus ponens is egy *séma*, pontos *szemantikai* megfelelőjét már tárgyaltuk a 2.2-ben.

Ezután megfogalmazzuk a **bizonyíthatóság** fogalmát. Legyen Σ formulák egy tetszőleges halmaza, és β tetszőleges formula.

3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a β *formula bizonyítható (levezethető)* a Σ formulahalmazból, ha van olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n = \beta$ véges formulasorozat, hogy a sorozat egyes tagjai vagy logikai axiómák, vagy Σ-hoz tartoznak, vagy a sorozat két, az adott formulát megelőző tagjából modus ponens szerint következnek. A bizonyíthatóság jelölése $\Sigma \vdash_H \beta$ (ahol H arra utal, hogy a Hilbert-rendszerben dolgozunk), vagy egyszerűen $\Sigma \vdash \beta$.

A bizonyíthatóságfogalom két fontos tulajdonsága:

- a **bizonyíthatóság ténye csak a Σ-ban és β-ban előforduló formulák szerkezetétől függ**,
- Ha Σ rekurzív, akkor **konkrét formulasorozatról eldönthető, hogy bizonyítás-e (levezetés-e) vagy sem**, hiszen a logikai axiómák összessége is rekurzív halmaz.

Néhány, a bizonyíthatóság definíciójával kapcsolatos terminológia és jelölés:

A 3. Definícióbeli β-ról azt mondjuk, hogy Σ-nak **tétele**. *Az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n = \beta$ sorozatról azt mondjuk, hogy β egy* **bizonyítása** *(levezetése) Σ-ból. Megengedett a $\Sigma = \emptyset$ eset is, ekkor azt is mondjuk, hogy β a logikai axiómákból bizonyítható, $\emptyset \vdash_H \beta$ jelölése egyszerűen $\vdash_H \beta$ vagy $\vdash \beta$.*

Ha a Σ formulahalmaz rekurzív (eldönthető), akkor Σ-t **axiómarendszernek**, *Σ tagjait* **axiómáknak** *(vagy szakmai axiómáknak) is szokás nevezni* (például szakmai axiómák a csoportaxiómák, a geometriai axiómák, a Boole-algebra axiómák, lásd majd a 4. fejezetet).

Konkrét Σ és β esetén $\Sigma \vdash_H \beta$ vagy helyes, vagy helytelen (fennáll vagy nem áll fenn), ezért $\vdash_H$-t tekinthetjük a formulahalmazok és a formulák között definiált relációnak:

4. Definíció. A $\vdash_H$ relációt (Hilbert-féle) *levezetési relációnak* (vagy *bizonyítási relációnak*) nevezzük.

Ha $\Sigma \vdash_H \beta$ nem áll fenn, azt így jelöljük: $\Sigma \nvdash_H \beta$. *Megállapodunk abban, hogy jelen rész további részében a $\vdash_H$ relációt sokszor csak $\vdash$-val jelöljük.*

A Hilbert-levezetési rendszer más verziói is ismeretesek, a logikai axiómák és következtetési szabályok a fentiektől kissé eltérhetnek. A logikai axiómák kijelölése, mint a legtöbb axiómarendszernél, önkényesnek tűnhet, választásuk célszerűségét majd e rész végén szereplő „teljességi tétel” támasztja alá. **Állításlogika** esetén úgy definiálhatunk egy Hilbert-féle bizonyítási rendszert, hogy logikai axiómaként csak az első három axiómasémát tartjuk meg. A modus ponens következtetési szabály és a bizonyíthatóság definíciója változatlan.

Két, bizonyíthatósággal kapcsolatos példát mutatunk, az első állításlogikai:

1. Példa. *Vezessük le $\alpha_0 \to \alpha_0$-t az axiómákból, ahol α_0 tetszőleges konkrét formula.*

A levezetés a következő:
$\varphi_1 = \alpha_0 \to (\alpha_0 \to \alpha_0) \to \alpha_0$,
amely az (i) axióma $\beta = \alpha_0 \to \alpha_0$ választással,
$\varphi_2 = (\alpha_0 \to (\alpha_0 \to \alpha_0) \to \alpha_0) \to (\alpha_0 \to (\alpha_0 \to \alpha_0)) \to \alpha_0 \to \alpha_0$,
ahol a (ii) axiómát használtuk a $\gamma = \alpha_0$, $\beta = \alpha_0 \to \alpha_0$ választással,
$\varphi_3 = (\alpha_0 \to (\alpha_0 \to \alpha_0)) \to \alpha_0 \to \alpha_0$,
ezt φ_1 és φ_2-ből kapjuk modus ponens-szel,
$\varphi_4 = \alpha_0 \to \alpha_0 \to \alpha_0$,
az (i) axiómából kaptuk $\beta = \alpha_0$ választással,
$\varphi_5 = \alpha_0 \to \alpha_0$,
φ_3-ból és φ_4-ből kapjuk modus ponens-szel.

2. Példa. *Mutassuk meg, hogy $\Sigma \vdash \beta$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash \forall x\beta$, ahol Σ zárt formulák tetszőleges halmaza.*

$\Sigma \vdash \forall x\beta$-ból következik $\Sigma \vdash \beta$, ugyanis $\forall x\beta$ levezetéséhez hozzá kell venni a (vi) axiómaséma megfelelő példányát, és alkalmazni kell a modus ponenst.

Fordítva, a bizonyítás hossza szerinti indukciót használunk. Ha β bizonyítása (Σ-ból) egyetlen lépésből áll, azaz $\beta \in \Sigma$, vagy β logikai axióma, akkor amennyiben β logikai axióma, akkor az állítás a (x) axiómaséma szerint következik, ha pedig $\beta \in \Sigma$, akkor β zárt, így az állítás az (v) axióma és modus ponens szerint következik.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz k-nál rövidebb bizonyításokra. Megmutatjuk, hogy igaz k hosszúságúakra is. Ha $\alpha_1, \dots \alpha_k$ (ahol $\alpha_k = \beta$) β-nak egy bizonyítása Σ-ból, akkor a β logikai axióma és $\beta \in \Sigma$ esetekben hasonló gondolatmenet alkalmazható, mint a már tárgyalt egyetlen bizonyítási lépés esetében. Ha α_k-t a bizonyításban két őt megelőző formulából, az α_i és $\alpha_i \to \alpha_k$ formulákból kapjuk modus ponensszel, akkor az indukciós feltevés miatt $\forall x \alpha_i$ és $\forall x(\alpha_i \to \alpha_k)$ is levezethető Σ-ból. A (iv) axiómaséma szerint $\vdash \forall x(\alpha_i \to \alpha_k) \to \forall x \alpha_i \to \forall x \alpha_k$. Kétszer alkalmazva a modus ponenst kapjuk, hogy $\vdash \forall x \alpha_k$, tehát valóban $\forall x \alpha_k$ is levezethető.

* * *

Ezután kimondunk néhány, a bizonyíthatóság fogalmához kapcsolódó definíciót. Ezen definíciók szemantikai változatai már szerepeltek 2.2-ben, és formailag igen hasonlóak az ottani definíciókhoz. Ezért, ha szükséges, akkor használni szoktuk az alábbi fogalmakra a „bizonyításelméleti értelemben definiált” vagy „szintaktikai értelemben” vett megkülönböztetéseket (például mondhatjuk, hogy „szemantikai értelemben definiált elmélet”, vagy „bizonyításelméleti értelemben definiált elmélet”). Hamarosan be tudjuk majd bizonyítani, hogy a szemantikai és a jelen bizonyításelméleti változatok ekvivalensek.

Legyen Σ formulák egy tetszőleges halmaza.

5. Definíció. A Σ formulahalmazból a $\vdash_H$ reláció szerint bizonyítható *zárt* formulák halmazát $\mathrm{Ded}_H(\Sigma)$-val jelöljük (a „Dedukció” rövidítéseként), tehát

$$\mathrm{Ded}_H(\Sigma) = \Big\{\beta : \Sigma \vdash_H \beta, \beta \text{ zárt}\Big\}.$$

$\mathrm{Ded}_H(\Sigma)$ nyilván *zárt* a $\vdash_H$ relációra abban az értelemben, hogy ha $\mathrm{Ded}_H(\Sigma) \vdash \alpha$, és α zárt, akkor $\alpha \in \mathrm{Ded}_H(\Sigma)$. Hiszen ha $\mathrm{Ded}_H(\Sigma) \vdash \alpha$ valamely α zárt formulára, akkor a bizonyítás definíciója szerint nyilván $\Sigma \vdash \alpha$ is teljesül, tehát valóban $\alpha \in \mathrm{Ded}_H(\Sigma)$.

Ha félreértés nem lehetséges, akkor $\mathrm{Ded}_H(\Sigma)$-t röviden $\mathrm{Ded}(\Sigma)$-val jelöljük, *ez utóbbi jelölést használjuk ezen alfejezet hátralévő részében.*

6. Definíció. Zárt formulák egy Γ halmaza *elmélet*, ha Γ zárt a Ded operátorra, tehát ha $\Gamma \vdash \alpha$, és α zárt, akkor $\alpha \in \Gamma$, azaz $\Gamma = \mathrm{Ded}(\Gamma)$.

7. Definíció. Egy Γ elmélet *axiomatizálható*, ha zárt formulák valamely *rekurzív* Σ halmazára $\Gamma = \mathrm{Ded}(\Sigma)$. A Γ elmélet *végesen axiomatizálható*, ha zárt formulák valamely *véges* Σ halmazára $\Gamma = \mathrm{Ded}(\Sigma)$.

Mint azt a hasonló szemantikai definíciónál már megjegyeztük, ha a Γ elmélet axiomatizálható, akkor Γ általában már *nem rekurzív*, csupán *rekurzív felsorolható*. Az alábbi definíció értelmében akkor mondjuk, hogy Γ eldönthető, ha Γ rekurzív.

8. Definíció. Egy Γ elmélet *eldönthető*, ha Γ *rekurzív halmaz* a formulák összességén. Γ *eldönthetetlen*, ha nem eldönthető. A Γ elméletre vonatkoztatott $\vdash$ bizonyítási reláció (tehát $\Gamma \vdash$) eldönthető, ha a Γ elmélet eldönthető.

9. Definíció. Egy Σ formulahalmaz *ellentmondásos (inkonzisztens)*, ha valamely β formulára $\Sigma \vdash \beta$ és $\Sigma \vdash \neg\beta$ egyidejűleg. Ha egy formulahalmaz nem ellentmondásos, akkor azt mondjuk, hogy *ellentmondástalan (konzisztens)*.

Inkonzisztens formulahalmazból közvetlenül levezethető az „ellentmondás”, azaz $\Sigma \vdash \beta \wedge \neg\beta$ tetszőleges β formulára, amint ezt megmutatjuk a 17. Tételben.

10. Definíció. Egy β formula *független* a Σ formulahalmaztól, ha

$\Sigma \vdash \beta$ és $\Sigma \vdash \neg\beta$ egyike sem teljesül.

Az ellentmondástalanság és függetlenség fogalmának fontos esetei, amikor egy *elméletre* vonatkoznak (tehát Σ egy elmélet).

11. Definíció. Egy Γ elmélet *komplett*, ha bármely zárt β formulára vagy $\beta \in \Gamma$, vagy $\neg\beta \in \Gamma$, azaz nincs Γ-tól független zárt formula.

Ezután megmutatjuk, hogy $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ egy elmélet.

12. Tétel. A $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ mondathalmaz egy *elmélet*.

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ zárt a levezetésre, azaz ha $\mathrm{Ded}(\Sigma) \vdash \alpha$, akkor $\alpha \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$.
α-nak minden $\mathrm{Ded}(\Sigma)$-ból történő $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n = \alpha$ levezetéséhez könnyen hozzárendelhető egy Σ-ból történő levezetés úgy, hogy ha α_k axióma, akkor hagyjuk változatlanul, ha $\alpha_k \in \mathrm{Ded}(\Sigma)$, akkor helyettesítsük α_k-t egy Σ-ból történő levezetésével, és ha α_k-t modus ponens-szel nyertük, akkor is hagyjuk változatlanul (premisszái az új levezetésben már megtalálhatók). Így nyilvánvalóan egy levezetést kapunk Σ-ból, $\alpha_n = \alpha$ miatt éppen α levezetését.

∎

Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra, és $\mathcal{A}$ elmélete Th$\mathcal{A}$, tehát Th$\mathcal{A} = \{\alpha : \mathcal{A} \vDash \alpha, \alpha$ zárt$\}$. A következő tétel szerint Th$\mathcal{A}$ a fenti bizonyításelméleti értelemben is egy elmélet.

13. Tétel. Th$\mathcal{A}$ *elmélet* a 6. Definícióbeli értelemben is. Th$\mathcal{A}$ konzisztens és komplett.

Bizonyítás. Igazolandó, hogy Th$\mathcal{A}$ zárt a levezetésre, azaz ha Th$\mathcal{A} \vdash \alpha$, akkor $\alpha \in$ Th$\mathcal{A}$. Tekintsük α-nak egy α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_n = \alpha$ levezetését Th$\mathcal{A}$-ból. A levezetés n hossza szerinti indukcióval bizonyítunk.
$n = 1$-re az állítás nyilvánvaló, hiszen ha α axióma, akkor minden modellen, így Th $\mathcal{A}$-n is igaz, ha pedig $\alpha \in$ Th$\mathcal{A}$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy az állítás igaz k-nál kisebb vagy k-val egyenlő hosszú levezetésekre. Igazoljuk, hogy igaz $k+1$ hosszúakra is. Ha α_{k+1} axióma vagy tétel, akkor ugyanúgy okoskodhatunk, mint az $n = 1$ esetben. Ha α_{k+1}-et modus ponens-szel nyerjük α_i és $\alpha_i \to \alpha_{k+1}$-ből, akkor az indukciós feltétel miatt közvetve már tudjuk, hogy α_i és $\alpha_i \to \alpha_{k+1}$ igazak az $\mathcal{A}$ modellen. Ezért az implikáció definíciója miatt α_{k+1} is igaz, azaz $\alpha_{k+1} \in$ Th$\mathcal{A}$, mint azt állítottuk.
Th$\mathcal{A}$ konzisztenciája és komplettsége nyilvánvaló.

■

A bizonyításelméleti felépítés esetén is aktuális a 2.1-ben felvetett probléma:

Probléma: *Adott* $\mathcal{A}$ *struktúra esetén axiomatizálható-e, illetve eldönthető-e a* Th$\mathcal{A}$ *elmélet?*

Most az axiomatizálhatóságot bizonyításelméleti értelemben értjük, tehát a kérdés az, hogy létezik-e olyan zárt formulákból álló rekurzív Σ formulahalmaz, hogy

$$\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Ded}(\Sigma), \tag{2}$$

illetve maga a Th$\mathcal{A}$ formulahalmaz rekurzív-e? A problémára 3.4-ben térünk vissza.

Legyen $\mathcal{K}$ adott típusú struktúrák egy nem üres osztálya. Th$\mathcal{K}$-t 2.1-ben definiáltuk.

14. Tétel. Th$\mathcal{K}$ egy *elmélet* a 6. Definícióbeli értelemben is, és ez az elmélet konzisztens.

A tétel bizonyítását az Olvasóra bízzuk.

Fontos speciális eset, amikor $\mathcal{K} = \mathcal{M}$, ahol $\mathcal{M}$ adott típusú összes modellek osztálya. Tehát Th$\mathcal{M}$ a logikai axiómákból bizonyítható zárt formulák elmélete.

A (2) probléma általánosítható *struktúraosztály* elméletére is: *axiomatizálható-e, illetve eldönthető-e a* Th$\mathcal{K}$ *elmélet*? Tehát létezik-e olyan zárt formulákból álló rekurzív Σ formulahalmaz, hogy

$$\mathrm{Th}\mathcal{K} = \mathrm{Ded}(\Sigma),$$

illetve maga Th$\mathcal{K}$ rekurzív formulahalmaz-e (itt ismét fontos eset a $\mathcal{K} = \mathcal{M}$)?

* * *

Példaként axiómarendszerre, megfogalmazzuk az aritmetika egy nevezetes axiómarendszerét, a Peano-féle axiómarendszert.
Legyen az $\mathcal{L}$ nyelv a következő: $+$, $\cdot$, S, 0, $<$ (tehát a nyelv típusa $\langle 2, 2, 1, 0;\ 2\rangle$). Jelölje $\leq$ a szokásos „kisebb vagy egyenlő” relációt (ahol $x \leq y$ pontosan akkor, ha $x < y \lor x = y$).
Az axiómarendszer:

(i) $\forall x (Sx \neq 0)$
(ii) $\forall x \forall y (Sx = Sy \to x = y)$
(iii) $\forall x (x + 0 = x)$
(iv) $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$
(v) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$
(vi) $\forall x \forall y (x \cdot Sy = x \cdot y + x)$
(vii) $\forall x (x \leq 0 \to x = 0)$
(viii) $\forall x \forall y (x \leq Sy \to x \leq y \lor x = Sy)$
(ix) $\forall x \forall y (x \leq y \lor y \leq x)$
(x) az $\alpha(0) \to (\forall x (\alpha(x) \to \alpha(Sx))) \to \forall x \alpha(x)$ séma *példányai*, ahol α $\mathcal{L}$-nek tetszőleges, egyetlen szabad változót tartalmazó formulája.

Itt (x) a teljes indukció sémája.

15. Definíció. Az aritmetika *Peano-axiómarendszere* a fenti (i)–(x) axiómák együttese, ezen axiómarendszer jelölése Π'_P, a Π'_P által generált elméletet jelölje Π_P. Az (i)–(ix) axiómák által generált elméletet *végesen axiomatizált aritmetikának* nevezzük, jelölése Π.

Megjegyezzük, hogy az aritmetika kevésbé elemien, szemantikailag is megalapozható, erősen a halmazelméletre építve. Ekkor a természetes számok a „véges rendszámok”.

3.1.2 Elemi tételek

Noha az alábbi tételeket a $\vdash_H$ bizonyítási relációra (röviden $\vdash$-re) fogalmazzuk meg, de e tételek általánosan érvényesek, a levezetési reláció általános tulajdonságaival kapcsolatosak.

Az alábbi tétel szemantikai változatát a 2.4-ben már megismertük. A mostani változat a levezetés „véges természetét” mutatja.

16. Tétel. (Szintaktikai kompaktsági tétel.) $\Sigma \vdash \beta$ akkor és csak akkor, ha Σ valamely véges Σ' részére $\Sigma' \vdash \beta$.

Bizonyítás. Ha van olyan véges $\Sigma' \subseteq \Sigma$, hogy $\Sigma' \vdash \beta$, akkor $\Sigma \vdash \beta$ nyilvánvaló. Fordítva, ha $\Sigma \vdash \beta$, akkor van β-nak véges $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ levezetése. Ekkor a levezetés definíciója szerint a $\Sigma' = \Sigma \cap \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ véges formulahalmaznak is következménye β.

■

A következő tétel azt mutatja, hogy az ellentmondásos elméletek „használhatatlanok”.

17. Tétel. Ha a Σ formulahalmaz ellentmondásos, akkor bármely α formula levezethető belőle, tehát $\Sigma \vdash \alpha$ bármely α formulára.

Bizonyítás. Ha Σ ellentmondásos, akkor van olyan β, hogy $\Sigma \vdash \beta$ és $\Sigma \vdash \neg\beta$ egyidejűleg. Ekkor a tetszőleges α formula egy levezetése a következő:

(1)	β	feltétel
(2)	$\beta \to \neg\alpha \to \beta$	I. axióma
(3)	$\neg\alpha \to \beta$	modus ponens
(4)	$(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$	III. axióma
(5)	$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$	modus ponens
(6)	$\neg\beta$	feltétel
(7)	$\neg\beta \to \neg\alpha \to \neg\beta$	I. axióma
(8)	$\neg\alpha \to \neg\beta$	modus ponens
(9)	α	modus ponens

■

A 2.2-ben már tárgyalt Dedukció tétel bizonyításelméleti változatát mondjuk ki és bizonyítjuk:

18. Tétel. (Dedukció tétel, szintaktikai változat.)

$$\boxed{\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \Sigma \vdash \beta \to \alpha.}$$

Speciálisan, ha $\Sigma = \emptyset$, akkor

$$\beta \vdash \alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \vdash \beta \to \alpha \tag{3}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$. Az α levezetésének n hossza szerinti indukcióval bizonyítunk.

Ha $n = 1$, akkor α vagy logikai axióma, vagy $\alpha \in \Sigma \cup \{\beta\}$. Amennyiben α logikai axióma vagy $\alpha \in \Sigma$, akkor az $\alpha \to \beta \to \alpha$ (i) axiómát és a modus ponenst használva megkapjuk, hogy $\beta \to \alpha$ valóban tétel.

Az $\alpha = \beta$ esettel már foglalkoztunk a fenti 1. Példában.

Ha $n = k > 1$, akkor két eset van:

1. α_k logikai axióma, vagy $\alpha_k \in \Sigma \cup \{\beta\}$, ekkor hasonlóan gondolkodhatunk, mint az $n = 1$ esetben.

2. α_k-t modus ponens-szel nyerjük két, a bizonyításban őt megelőző formulából, azaz létezik i és $j < k$ olyan, hogy $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_k$, valamint α_i-re és α_j-re már igaz a tétel állítása, azaz $\Sigma \vdash \beta \to \alpha_i$ és $\Sigma \vdash \beta \to \alpha_i \to \alpha_k$ már teljesül. Tekintsük a következő levezetést:

$\beta \to \alpha_i$

$\beta \to \alpha_i \to \alpha_k$

$(\beta \to \alpha_i \to \alpha_k) \to (\beta \to \alpha_i) \to \beta \to \alpha_k$ (ii) axióma

$(\beta \to \alpha_i) \to \beta \to \alpha_k$ modus ponens

$\beta \to \alpha_k$ modus ponens

Tehát $\Sigma \vdash \beta \to \alpha_k$ valóban következik, mint azt bizonyítani kellett.

A tétel másik iránya triviálisan következik szintén a modus ponens szabály segítségével.

■

Vegyük észre, hogy a fenti bizonyításban csupán az (i)–(iii) állításaxiómákat használtuk ki, a tétel tehát igen általános érvényű. Látni fogjuk, hogy „valamirevaló” bizonyítási rendszerek esetén a Dedukció tétel szemantikai és bizonyításelméleti változatai ekvivalensek, valamint igazak a szemantikai változat már említett következményeinek bizonyításelméleti megfelelői is.

19. Tétel. $\Sigma \vdash \alpha$ akkor és csak akkor, ha a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaz *ellentmondásos*.

Bizonyítás. Ha $\Sigma \vdash \alpha$, akkor definíció szerint a Σ-nál bővebb $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmazra: $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$ és $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$. Tehát $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ valóban ellentmondásos.

Fordítva, ha $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ ellentmondásos, akkor van olyan β formula, hogy $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ és $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$. A Dedukció tétel miatt $\Sigma \vdash \neg\alpha \to \beta$ és $\Sigma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$. A (iii) axióma miatt $\vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$. Kétszer alkalmazva a modus ponenst kapjuk, hogy $\Sigma \vdash \alpha$ valóban.

■

A tétel annak a megfelelője a szintaktikában, hogy a $\Sigma \vDash \alpha$ fennállása ekvivalens azzal, hogy $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ kielégíthetetlen. Tekinthető az állítás az indirekt okoskodás egy bizonyításelméleti változatának, amelyet a későbbiekben sokszor alkalmazunk.

* * *

E rész végén, a bizonyításelmélet egyszerű alkalmazásaként, részben azzal foglalkozunk, hogy hogyan vezetünk be a nyelv már létező formuláira, illetve termjeire új neveket, azaz hogyan bővítjük ilyen értelemben a nyelvet új reláció- és függvényszimbólumokkal. Ez a folyamat igen gyakori a matematikában. Másrészt, azzal a lehetőséggel foglalkozunk, hogy éppen ellenkezőleg, hogyan küszöbölhetjük ki a nyelvből az egyenlőséget, vagy a függvényszimbólumokat. Ezen utóbbi lehetőségeknek inkább elvi jelentősége van.

Kezdjük az új jelölések bevezetésével. Gyakori, hogy (nem elemi) formulákra, függvényekre új jelöléseket vezetünk be. Ezzel párhuzamosan azonban az új nyelven, az új szimbólumokat „értelmező” axiómákat is be kell vezetnünk. Ha például az alapnyelv $\alpha(x,y,z)$ formulájára kívánunk egy A 3 változós reláció jelet bevezetni, akkor szükséges felvennünk a $\forall x \forall y \forall z(\alpha(x,y,z) \leftrightarrow A(x,y,z))$ axiómát. Vagy, ha van egy függvénynek tekinthető $\varphi(y,y,z)$ relációnk, azaz egy alap axiómarendszerben $\vdash \forall x \forall y \exists! z \varphi(x,y,z)$, és e függvényre az $F(x,y)$ jelölést kívánjuk bevezetni, akkor a nyelvet az F kétváltozós függvényszimbólummal bővítjük és az axiómákhoz hozzávesszük a $\forall x \forall y \varphi(x,y,F(x,y))$ axiómát (ha a nyelvben van =, akkor egyszerűbb megoldás is létezik).

Például, ha a halmazelmélet úgynevezett ZF (Zermelo–Fraenkel) axiómáinak nyelvét (lásd a 6.4-t), az egyetlen nem-logikai relációjelet az $\in$-t tartalmazó nyelvet, a $\subset$ tartalmazás jellel kívánjuk bővíteni, akkor a ZFC axiómákhoz a $\forall x \forall y(\forall u(u \in x \to u \in y) \leftrightarrow x \subset y)$ axiómát szükséges hozzávenni, Vagy, ha például ezután az egyváltozós $P(x)$, hatványhalmazképzés függvényjelet kívánjuk bevezetni, akkor a ZFC-ben $\vdash \forall x \exists! z(\forall u(u \in z \leftrightarrow u \subset x))$, ezért a $\forall x(\forall u(u \in P(x) \leftrightarrow u \subset x))$ axiómával bővítjük a ZFC-t.

Megjegyezzük, hogy a fenti eljárásokat axióma rendszerek *konzervatív bővítéseinek* nevezzük:

Egy Σ axiómarendszernek a $\Sigma \subset \Sigma'$ axiómarendszer konzervatív bővítése, *ha Σ tagjai formulái az $\mathcal{L}$ alapnyelvnek, a Σ' tagjai pedig formulái egy $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ bővített nyelvnek, és*

(i) $\Sigma' \vdash \varphi$*-ből* $\Sigma \vdash \varphi$ *következik bármely $\mathcal{L}$-beli φ formulára,*

(ii) *bármely $\mathcal{L}'$-beli φ' formulához létezik $\mathcal{L}$-beli φ formula, hogy* $\Sigma' \vdash \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Ezután rátérünk az egyenlőség, illetve függvények kiküszöbölésére nyelvekből. Csupán a kiküszöbölés *egzisztenciájával* foglalkozunk, és nem a konkrét kiküszöbölési eljárással.

Az = jelnek mint *logikai jelnek* kezelése sokszor kényelmetlen, mert kissé eltér a nemlogikai relációk kezelésétől. Az egyenlőségjel *kiküszöbölhető* a nyelvből a következőképpen:

Vegyünk fel a nyelvben egy E, új kétváltozós relációjelet. Tegyük fel rá a szimmetria, tranzitivitás tulajdonságokat, azaz egészítsük ki e tulajdonságok formalizálásaival a logikai axiómákat. Jelölje az így kapott bizonyítási rendszert H'. Cseréljük ki a nyelv valamennyi formulájában az = előfordulásait az E relációjelre, beleértve a logikai axiómákat is. Jelölje az α formulához így rendelt formulát $\widetilde{\alpha}$, a Γ elmélethez így rendelt formulahalmazt pedig $\widetilde{\Gamma}$. Megmutatható, hogy igaz ekkor a következő:

$$\Gamma \vdash_H \alpha \quad \text{akkor és csak akkor, ha } \widetilde{\Gamma} \vdash_{H'} \widetilde{\alpha}.$$

Tudjuk, hogy a *struktúrákból* „kiküszöbölhetőek” a függvények, hiszen minden n változós függvény tekinthető mint grafikonjának relációja, azaz tekinthetőek mint egy $n+1$ változós reláció. Ez a tulajdonság arra is alkalmas, hogy a *nyelvekből*, amennyiben kívánjuk, *kiküszöbölhessük* a függvényjeleket, a következőképpen:

Minden n argumentumú f függvényjelet rendre cseréljünk le egy új $n+1$ argumentumú F relációjelre. Egészítsük ki a logikai axiómákat a következő axiómákkal:

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \exists ! x_{n+1} F(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}), \tag{4}$$

ahol ! jelentése „létezik egy és csak egy” (ami egyenlőséges nyelvben könnyen formalizálható).

Ekkor belátható, hogy az eredeti nyelv bármely α formulájához létezik az új nyelvnek olyan $\widehat{\alpha}$ formulája, „fordítása”, amelyik formula tehát függvényjelet már nem tartalmaz, és *tetszőleges* Γ elméletre és α formulára *igaz a következő*:

$$\Gamma \vdash_H \alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \widehat{\Gamma} \vdash_{H'} \widehat{\alpha},$$

utóbbi az új, függvénymentes nyelvben, ahol $\widehat{\Gamma}$ a Γ-beli formuláknak megfelelő függvénymentes formulákat tartalmazza, és H'-t úgy nyerjük a Hilbert-rendszerből, hogy logikai axiómáknak a nekik megfelelő függvénymentes formulákat tekintjük, kiegészítve az axiómákat a (4)-beli formulákkal.

Megjegyezzük, hogy noha elméleti szempontból egyszerűbb függvényjelmentes, illetve egyenlőségmentes nyelvekkel dolgozni, azonban ez nem mindig természetes, továbbá a konkrét „fordítás” ilyen nyelvekre kissé nehézkes az alkalmazások szempontjából.

3.1.3 A teljességi tétel és következményei

Tudjuk, hogy a logikai axiómák szemantikailag *érvényes formulák*. A modus ponens bizonyításelméleti változatának pedig a modus ponens *helyes következmény* felel meg. Ez utóbbi összefüggés átvihető az egész $\vdash_H$ (röviden $\vdash$) bizonyítási relációra is, amennyiben igazoljuk, hogy egy bizonyítás egyes lépéseinél a $\models$ következményreláció megőrződik, vagyis a bizonyítási eljárás *megőrzi* a $\Sigma \models$ *logikai következmény helyességét*.

Az alábbi tétel a bizonyítási rendszerünk **helyességét** állítja. A helyességet úgy tekintjük, mint a minimálisan elvárható követelményt egy logikai kalkulussal szemben.

20. Tétel. (Helyességi tétel.) Ha $\Sigma \vdash \alpha$, akkor $\Sigma \vDash \alpha$.

Bizonyítás. A levezetés k hossza szerinti indukcióval bizonyítunk.
Ha $k = 1$, akkor α logikai axióma, vagy Σ-hoz tartozik, ezért a tétel igaz.
Tegyük fel, hogy az állítás igaz k-nál kisebb hosszúságú bizonyításokra. Igazoljuk, hogy igaz k hosszúságú bizonyításokra is.
Ha α_k logikai axióma, vagy Σ-hoz tartozik, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy α_k két, a levezetésben k-nál kisebb indexű formulából, α_i-ből és $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_k$-ből adódik modus ponens-szel. α_i és $\alpha_i \to \alpha_k$ bizonyításai Σ-ból, a feltétel szerint rövidebbek k-nál, ezért az indukciós feltevés szerint $\Sigma \vDash \alpha_i$ és $\Sigma \vDash \alpha_i \to \alpha_k$. A modus ponens szemantikai változata szerint $\Sigma \vDash \alpha_k$ valóban következik, mint azt bizonyítani kellett.

■

A helyességi tételnél több is igaz a Hilbert-féle kalkulusra. *Igaz a tétel megfordítása is*, azaz ha $\Sigma \vDash \alpha$, akkor $\Sigma \vdash \alpha$. Ez a kalkulus úgynevezett **teljességi** tulajdonsága (megjegyezzük, hogy gyakori az, hogy a teljességterminológiába már a helyességet is beleértik).
Könnyű megadni teljes, de nem helyes rendszereket, triviálisan ilyen az, ha például az összes formulát logikai axiómának tekintjük. Igazán persze az az érdekes, hogyan lehet egy helyes rendszert úgy bővíteni, hogy helyes és teljes rendszert is kapjunk (vagy az összes formulákból álló teljes rendszert úgy szűkíteni, hogy teljes és helyes ellentmondástalan rendszert kapjunk).
A teljességi tételek a logika talán legfontosabb tételei. A következő, Gödeltől származó teljességi tétel a Hilbert-féle levezetési rendszer helyességét és teljességét együtt fogalmazza meg.

Legyen Σ formulák tetszőleges halmaza, és α tetszőleges formula.

21. Tétel. (Gödel-teljességi tétel a) változat.)

$$\boxed{\Sigma \vdash \alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \Sigma \vDash \alpha} \tag{5}$$

A Tételnek egy másik, c) változatát fogjuk bizonyítani (24. Tétel), majd a 27. Tételnél a két változat ekvivalenciáját.

Felsoroljuk a 21. Tétel néhány fontos következményét:

Következmények:

- Tetszőleges Σ formulahalmazra
$$\mathrm{Cons}(\Sigma) = \mathrm{Ded}(\Sigma), \tag{6}$$
ahol $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ a $\mathrm{Ded}_H(\Sigma)$ operátort rövidíti.

- A (6) összefüggés értelmében tehát teljes kalkulusok esetén, a szemantikai és bizonyításelméleti értelemben definiált elméletfogalmak **egybeesnek**. Hasonlóan, az elméletek szemantikai, illetve bizonyításelméleti úton definiált következő tulajdonságai, teljes kalkulusok esetén, **ekvivalensek**: *axiomatizálhatóság, eldönthetőség, ellentmondástalanság, komplettség* stb.
  Tehát például egy elmélet komplett a szemantikai értelemben akkor és csak akkor, ha az elmélet komplett a bizonyításelméleti értelemben. E tulajdonságok **teljes kalkulusok esetén nem függenek kalkulustól** sem, hiszen ekkor minden egyes tulajdonság ekvivalens a megfelelő szemantikai tulajdonsággal.
- (6)-ból következik, hogy a 2.2.1-beli $\mathrm{Th}\,\mathcal{A} = \mathrm{Cons}(\Sigma)$ és az (1)-beli $\mathrm{Th}\,\mathcal{A} = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ problémák ekvivalensek, következésképpen például az első visszavezethető a másodikra. Hasonlóan, az általánosabb $\mathrm{Th}\,\mathcal{K} = \mathrm{Cons}(\Sigma)$ és $\mathrm{Th}\,\mathcal{K} = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ problémák is ekvivalensek, ahol $\mathcal{K}$ tetszőleges struktúraosztály.

A teljességi tétel jelentőségét nehéz túlbecsülni, hiszen *a teljességi tétel a matematika logikájának, az elsőrendű logikának* erejét *bizonyítja, amennyiben azt állítja, hogy a szemantikai logikai következmény és a bizonyításelméleti levezethetőség bizonyos értelemben ekvivalens*. Igazolja azt a sejtést, hogy $\Sigma \models \alpha$ helyességének vizsgálata történhet csupán a formális nyelvet és a következtetésben előforduló formulák szerkezetét felhasználva „formális manipulációkkal”. Különösen az nem nyilvánvaló, hogy lehetséges úgy megválasztani a logikai axiómákat és a következtetési szabályt, hogy az így nyert levezetési eljárással *tetszőleges* helyes $\Sigma \models \alpha$ következmény igazolható legyen, vagy speciálisan, minden $\models \alpha$ tulajdonságú, azaz érvényes formula, levezethető is legyen.

Másképpen, a teljességi tétel azt állítja, hogy ha egy következmény helyes, akkor erre mindig *létezik* bizonyítás is.

22. Definíció. A Gödel-teljességi tétel a) változatban szereplő (5) tulajdonságot *erős teljességnek* nevezzük, *véges teljességnek* hívjuk, ha Σ-ra végességet feltételezünk, *gyenge teljességnek* hívjuk, ha benne $\Sigma = \emptyset$.

Megjegyezzük, hogy léteznek bizonyítási rendszerek és logikák, amelyek nem teljesek, de gyengén teljesek.

Ezután kimondjuk a teljességi tétel *három fontos ekvivalensét*:

23. Tétel. (Gödel-teljességi tétel b) változat.)

$$\boxed{\Sigma \text{ ellentmondástalan akkor és csak akkor, ha } \Sigma\text{-nak van modellje.}}$$

A Gödel-tétel b) verziójának „fizikai” mondanivalója: egy elmélet logikai ellentmondástalanságának bizonyításelméleti fogalma ekvivalens azzal, hogy az elmélet „*megvalósul*”.

A tétel az ellentmondástalanság bizonyításelméleti fogalmának szemantikai jellemzése. Ezen az állításon nyugszik, többek között, a 4.1 részben tárgyalandó „**modellmódszer**”, amikor is bizonyításelméleti fogalmak bizonyos szemantikai jellemzéseit alkalmazzuk.

A teljességi tétel fenti változata lényeges szerepet játszik a cáfolati kalkulusoknál is.

Fontos következménye a fenti 23. Tételnek a következő:

Következmény (Lindenbaum): *Zárt formulák tetszőleges ellentmondástalan* Σ *halmaza kiterjeszthető* komplett *elméletté*.

A szóban forgó komplett elmélet nyilván Σ bármely modelljének elmélete. Az iménti állítást szokták *Lindenbaum-tételnek* is nevezni.

A teljességi tétel következő változatában szereplő *gyenge teljesség* nyilvánvaló következménye a teljességi tétel a) változatának, de mint az igazolható, ekvivalens is vele. Legyen α tetszőleges formula.

24. Tétel. (Gödel-teljességi tétel c) változat.)

$$\boxed{\vdash \alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \vDash \alpha.} \tag{7}$$

Bizonyítás. A tétel helyességi része következik a 20. Tételből.

A fordított irányú állítás igazolásához tekintsük $\neg\alpha$-t, amely a feltétel szerint kielégíthetetlen. Írjuk fel $\neg\alpha$ Skolem-alakját, $\forall\psi$-t, a nyelv megfelelő bővítésével egyidejűleg. A Skolem-normálforma tétel egyik következménye szerint $\forall\psi$ és $\neg\alpha$ kielégíthetetlensége ekvivalens. Alkalmazzuk $\forall\psi$-re a *Herbrand-tételt*. Ennek értelmében $\forall\psi$ kielégíthetetlensége ekvivalens a magjai alapelőfordulásaiból nyert valamely véges sok *állítás* konjunkciójának β-nak a kielégíthetetlenségével.

Igazolni fogjuk, hogy β *kielégíthetetlensége maga után vonja* $\overset{0}{\vdash}_H \neg\beta$-t, ahol $\overset{0}{\vdash}_H$ a Hilbert-kalkulus állításlogikai változatának levezetési relációja.

Az alábbiakban $\overset{0}{\vdash}_H \neg\beta$ fennállása helyett általánosabban, jelen tétel teljességi részének *állításlogikai változatát igazoljuk*, tehát azt, hogy ha φ tetszőleges állításformula, amelyre $\vDash\varphi$ teljesül az állításlogikában, akkor $\overset{0}{\vdash}_H \varphi$, röviden $\vdash\varphi$, teljesül.

A bizonyításban a szemantikát valamilyen értelemben „lefordítjuk” a bizonyításelméletre.

Legyen φ az állításlogika tetszőleges formulája, legyenek a φ-ben szereplő állításjelek P_1, $P_2 \dots P_k$, és ezek egy tetszőleges, de rögzített értékelése egy állításmodellen ε_1,

$\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$, továbbá ezen értékelésre φ igazságértéke ε (ahol az ε_i-k és ε az $\uparrow$ vagy $\downarrow$ értékeket jelölik). *Igazoljuk a következő állítást:*

$$\left\{P_1^{\varepsilon_1}, P_2^{\varepsilon_2}, \ldots P_k^{\varepsilon_k}\right\} \vdash_H \varphi^{\varepsilon}, \tag{8}$$

ahol $P_i^{\varepsilon_i}$ jelölje P_i-t, ha $\varepsilon_i =\uparrow$ és $\neg P_i$-t, ha $\varepsilon_i =\downarrow$. Hasonlóan értelmezzük φ^{ε}-t is, tehát φ^{ε} jelölje φ-t, ha φ igaz és $\neg\varphi$-t, ha φ hamis az adott $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ értékelésnél.

Vegyük észre, hogy (8)-ból az állításlogika teljessége már következik. Ugyanis egyrészt, mivel φ tautológia, ezért (8)-ban φ^{ε} mindig φ-vel egyenlő.
Másrészt (8) szerint $\varepsilon_k =\uparrow$-ra $\left\{P_1^{\varepsilon_1}, P_2^{\varepsilon_2}, \ldots P_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}, P_k\right\} \vdash_H \varphi$, azaz a Dedukció tétel szerint $\left\{P_1^{\varepsilon_1}, P_2^{\varepsilon_2}, \ldots P_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}\right\} \vdash_H P_k \to \varphi$, tehát

$$\left\{P_1^{\varepsilon_1}, P_2^{\varepsilon_2}, \ldots P_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}\right\} \vdash_H \neg P_k \vee \varphi. \tag{9}$$

Hasonlóan, $\varepsilon_k =\downarrow$-ra $\left\{P_1^{\varepsilon_1}, P_2^{\varepsilon_2}, \ldots P_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}, \neg P_k\right\} \vdash_H \varphi$, így az előző esethez hasonlóan, $\left\{P_1^{\varepsilon_1}, P_2^{\varepsilon_2}, \ldots P_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}\right\} \vdash_H P_k \vee \varphi$ is következik, ezért utóbbit (9)-cel összevetve, $\left\{P_1^{\varepsilon_1}, P_2^{\varepsilon_2}, \ldots P_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}\right\} \vdash_H \varphi$ is igaz a rezolúciós következtetési szabály szintaktikai változata szerint. Folytatva ezt a redukciót azt kapjuk, hogy $\vdash_H \neg P_1 \vee \varphi$ és $\vdash_H P_1 \vee \varphi$, azaz valóban $\vdash_H \varphi$ (a rezolúciós következtetés relativizált szintaktikai változata könnyen nyerhető a Hilbert-rendszerben, a (iii) Hilbert-axiómát és a modus ponenst, valamint Dedukció tételt használva).

Tehát igazolni kívánjuk (8)-at. Tegyük fel, hogy a nyelv csak a $\neg$ és $\to$ műveleteket tartalmazza. Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ rögzített értékek, β és γ pedig tetszőleges állításformulák. Megmutatjuk, hogy igazak a következők:

$$\beta^{\varepsilon} \vdash_H (\neg\beta)^{\varepsilon} \qquad\qquad \{\beta^{\varepsilon}, \gamma^{\varepsilon}\} \vdash_H (\beta \to \gamma)^{\varepsilon}, \tag{10}$$

ahol β^{ε} és γ^{ε} jelentése hasonló a (8)-beli φ^{ε}-hoz, tehát például β^{ε} jelölje β-t, illetve $\neg\beta$-t attól függően, hogy az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ értékelésnél β igaz, vagy β hamis.
(10)-ből a (8) formulaindukcióval következik. Ugyanis (8) igaz, ha φ atomi formula. Tegyük fel, hogy (10) igaz tetszőleges β és γ állításformulákra. (10) miatt és a $\vdash_H$ tranzitivitása miatt ekkor (8) nyilván igaz $(\varphi =)\neg\beta$-ra és $\beta \to \gamma$-ra is. Innen formulaindukcióval már következik (8).
Rátérve (10) igazolására, tekintsük először az első összefüggést. Két eset van: β igaz, vagy β hamis. Tehát azt kell igazolni, hogy $\beta \vdash \neg\neg\beta$, illetve $\neg\beta \vdash \neg\beta$. Azonban az 1. Példa szerint ezek helyes következtetések.
Tekintsük most a (10)-beli második összefüggést. Az implikáció igazságtáblája szerint négy eset lehetséges:

$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\beta \to \gamma}$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

Az *első* sor *fordítása*: $\{\beta, \gamma\} \vdash \beta \rightarrow \gamma$. Az (i) axióma szerint $\vdash \gamma \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$. Alkalmazva a modus ponenst erre a formulára és γ-ra, megkapjuk a kívánt levezetést.
A *második* sor *fordítása*: $\{\beta, \neg\gamma\} \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$. A 19. Tétel szerint, elég azt megmutatni, hogy $\{\beta, \neg\gamma, \beta \rightarrow \gamma\}$ ellentmondásos. Azonban β és $\beta \rightarrow \gamma$-ból modus ponens szerint következik γ, ezért valóban ellentmondást kaptunk.
A *harmadik* sor *fordítása*: $\{\neg\beta, \neg\gamma\} \vdash \beta \rightarrow \gamma$. Utóbbi akkor és csak akkor igaz, ha $\{\neg\beta, \neg\gamma, \beta\} \vdash \gamma$, a Dedukció tétel miatt. Ez utóbbi viszont igaz, mert tudjuk, hogy ellentmondásos axiómarendszerből bármi levezethető (itt például kihasználtuk a (iii) axiómát).
A *negyedik* sor *fordítása*: $\{\neg\beta, \gamma\} \vdash \beta \rightarrow \gamma$. A (ii) axióma szerint $\vdash \gamma \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$. Alkalmazva erre és γ-ra a modus ponenst, kapjuk, hogy $\vdash \beta \rightarrow \gamma$ valóban.

Ezzel (10)-et, és a fentiek szerint az eredeti állítást is beláttuk. Tehát az is következik, hogy β kielégíthetetlensége maga után vonja $\overset{0}{\vdash}_H \neg\beta$-t.

Ebből már következik az eredeti α levezethetősége a következők szerint (az egyes lépéseket itt már nem részletezzük):
$\neg\beta$-ra alkalmazva a de Morgan-szabályt egy diszjunkciót kapunk, amelynek tagjai $\neg\psi(x/t_i)$ alakúak, ahol t_i szabad változó mentes term. Ezért $\overset{0}{\vdash}_H \neg\beta$ implikálja, hogy $\vdash_H \exists\neg\psi$. $\exists\neg\psi$-t $\neg\forall\psi$ alakba írva és kihasználva, hogy $\forall\psi$ a $\neg\alpha$ formulának Skolem-alakja, tehát vele ekvivalens, kapjuk, hogy $\vdash \alpha$ valóban. Ellenőrizhető, hogy az utóbbi következtetéseknél ki kell használni az elsőrendű Hilbert-axiómákat is (például akkor, amikor $\forall\psi$ és $\neg\alpha$ ekvivalenciáját kell a Hilbert-rendszerben igazolni). ■

Legyen $\mathcal{M}$ az összes, adott típusú modellek összessége. A fenti 24. Tételből következik a következő tulajdonság:

Következmény:

> Az érvényes zárt formulákból álló elmélet (Th$\mathcal{M}$) *axiomatizálható*, ahol a szakmai axiómák halmaza az üres halmaz.

Erre a tulajdonságra röviden azt is mondjuk, hogy az *elsőrendű logika axiomatizálható*. Ugyanis (7) miatt minden érvényes formula bizonyítható az axiómákból, tehát Th$\mathcal{M}$ = Ded(Σ), ahol Σ a logikai axiómák halmaza (tehát egy rekurzív, azaz eldönthető formulahalmaz).

A teljességi tétel következő változata a Hilbert-rendszer *véges teljességét* állítja:

25. Tétel. (Gödel-teljességi tétel d) változat.) Tetszőleges *véges* Σ formulahalmazra és α formulára

$$\boxed{\Sigma \vdash \alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \Sigma \vDash \alpha.} \tag{11}$$

Erős teljesség helyett gyakran elég csak véges teljességet használni, többek között ez adja a tétel jelentőségét.

Látni fogjuk (27. Tétel), hogy *a véges és a gyenge teljesség ekvivalenciája a Dedukció tételen múlik, míg a véges és erős teljesség ekvivalenciája a kompaktsági tételen (de az utóbbinál szükség van a kompaktsági tétel úgynevezett „szemantikai” változatára is)*.

A következő tétel az eddig kimondott két kompaktsági tétel kapcsolatára vonatkozik:

26. Tétel. A kompaktsági tétel szemantikai és szintaktikai változatai ekvivalensek.

Bizonyítás.
Tegyük fel először, hogy igaz a szintaktikai változat, azaz ha Λ tetszőleges formulahalmaz és φ formula, akkor $\Lambda \vdash \varphi$ akkor és csak akkor, ha Λ valamely véges Λ' részére $\Lambda' \vdash \varphi$. Igazoljuk a szemantikai változatot, tehát azt, hogy egy Σ formulahalmaz kielégíthető akkor és csak akkor, ha Σ bármely véges része kielégíthető.

Az állítás egyik irányban triviális. Fordítva, tegyük fel, hogy Σ bármely véges része kielégíthető. Indirekt tegyük fel, hogy Σ nem kielégíthető. Ekkor a Gödel-tétel b) változata szerint (23. Tétel) Σ ellentmondásos. Ezért van olyan α formula, hogy $\Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg\alpha$ egyidejűleg. A kompaktsági tétel szintaktikai változata szerint α levezethető Σ egy véges Σ' részéből, $\neg\alpha$ pedig Σ-nak egy véges Σ'' részéből. Ekkor $\Sigma' \cup \Sigma''$-ből nyilván α és $\neg\alpha$ is levezethető. Ezért $\Sigma' \cup \Sigma''$ is ellentmondásos. $\Sigma' \cup \Sigma''$ is véges része Σ-nak, továbbá ellentmondásos, ezért ismét alkalmazva a Gödel-tétel fenti b) változatát, $\Sigma' \cup \Sigma''$ nem kielégíthető, ellentmondásban a feltétellel.

Fordítva, tegyük fel, hogy igaz a kompaktsági tétel szemantikai változata. $\Sigma \vdash \alpha$ a 19. Tétel és a 23. Tétel miatt ekvivalens azzal, hogy $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ nem kielégíthető. A kompaktsági tétel szemantikai változata miatt ekkor $\Sigma' \cup \{\neg\alpha\}$ sem kielégíthető valamely véges Σ'-re. Megint a 19. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy $\Sigma' \vdash \alpha$, mint azt állítottuk. A szintaktikai kompaktsági tétel másik iránya triviális.

■

Vegyük észre, hogy a fenti tételnek, közvetve a Gödel-teljességi tételnek, és a szintaktikai kompaktsági tételnek **következménye a szemantikai kompaktsági tétel** (melyet eddig csak az állításesetre igazoltunk 2.4-ben).

Mivel a kompaktsági tétel szemantikai változatának állítása nem tartalmaz bizonyításelméleti fogalmat, ezért sejthető, hogy a bizonyításelmélettől független bizonyítás is adható rá (csakúgy, mint az az állításlogikai esetben is történt). Valóban, a 4.3-ban *adunk majd a tételre egy csak szemantikai bizonyítást*. E bizonyításnak a következménye, hogy a *kompaktsági tételt jogos felhasználni arra, hogy az erős teljességet bizonyítsuk a gyenge teljességből*, mint az az alábbi tétel bizonyításában történik.

Legyen Σ egy elsőrendű nyelv tetszőleges formulahalmaza, és φ tetszőleges formula. Bebizonyítjuk, hogy a Gödel-tétel fenti változatai ekvivalensek:

27. Tétel. A Gödel-teljességi tétel a), b), c) és d) változatai ekvivalensek.

Bizonyítás.
A c) és d) változatok, tehát a gyenge és a véges teljesség ekvivalenciája a *Dedukció tétel* egyszerű következménye. Legyen ugyanis $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\}$. Ekkor $\Sigma \vdash \alpha$ a Dedukció tétel szintaktikai változata miatt ekvivalens azzal, hogy $\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \alpha$. Ez utóbbi (7) szerint akkor és csak akkor, ha $\vDash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \alpha$. Utóbbi viszont a Dedukció tétel szemantikai változatának egyik következménye szerint ekvivalens $\Sigma \vDash \alpha$-val.

Az a) és d) változatok, azaz az általános következményfogalomra vonatkozó és a véges teljességre vonatkozó teljességi tételek ekvivalenciájához elég azt megmutatni, hogy d) implikálja a)-t. a) helyességi részét már igazoltuk. A fordított állítás bizonyítása a kompaktsági tétel szemantikai változatán múlik. Tegyük fel, hogy $\Sigma \vDash \alpha$ egy tetszőleges Σ formulahalmazra. Ez pontosan azt jelenti, hogy a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen. A kompaktsági tétel szemantikai változata szerint ekkor valamely véges Σ'-re $\Sigma' \cup \{\neg\alpha\}$ szintén kielégíthetetlen, vagyis $\Sigma' \vDash \alpha$. A véges teljességből $\Sigma' \vdash \alpha$ is következik, tehát $\Sigma \vdash \alpha$ is, mint azt igazolni kellett.

Megmutatjuk, hogy az a) és b) változatok, azaz az általános következményfogalomra, illetve az ellentmondástalanságra vonatkozó teljességi tételek, ekvivalensek. Tegyük fel először, hogy a teljességi tétel a) változata igaz, azaz $\Sigma \vDash \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vdash \varphi$. Megmutatjuk, hogy ekkor a b) változat is igaz, azaz a Σ formulahalmaz ellentmondástalan akkor és csak akkor, ha Σ-nak van modellje.

Először tegyük fel, hogy Σ-nak van egy $\mathcal{A}$ modellje. Indirekt bizonyítunk. Ha Σ ellentmondásos lenne, akkor valamely α formulára $\Sigma \vdash \varphi$ és $\Sigma \vdash \neg\varphi$ egyidejűleg teljesülne. A Gödel-teljességi tétel a) szerint, ez viszont ekvivalens $\Sigma \vDash \varphi$ és $\Sigma \vDash \neg\varphi$-vel. Ezért Σ minden modelljén, tehát a feltételben garantált $\mathcal{A}$ modellen is, φ és $\neg\varphi$ egyidejűleg igaz lenne, ami ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy Σ ellentmondástalan. Indirekt bizonyítunk. Ha nem létezne Σ-nak modellje, akkor a logikai következmény fogalom definíciója miatt, bármely φ formulára $\Sigma \vDash \varphi$ és $\Sigma \vDash \neg\varphi$, azaz a Gödel-tétel a) változat szerint $\Sigma \vdash \varphi$ és $\Sigma \vdash \neg\varphi$ egyidejűleg, ami Σ ellentmondásosságát jelenti, ellentétben a feltétellel.

Ezután tegyük fel, hogy a teljességi tétel b) változata igaz. Mivel a) és c) ekvivalenciáját már igazoltuk, ezért elég megmutatni, hogy b)-ből következik a c) változat, azaz tetszőleges α formulára $\vDash \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\vdash \alpha$. A helyességi tétel miatt elég vizsgálni azt az esetet, hogy $\vDash \alpha$ implikálja $\vdash \alpha$-t. Mivel $\vDash \alpha$ igaz, ezért $\neg\alpha$ kielégíthetetlen. A Gödel-tétel b) változata miatt ezért $\neg\alpha$ ellentmondásos, vagyis valamely β formulára $\neg\alpha \vdash \beta$ és $\neg\alpha \vdash \neg\beta$ egyidejűleg. A Dedukció tétel miatt $\vdash \neg\alpha \to \beta$ és $\vdash \neg\alpha \to \neg\beta$. Alkalmazva a (iii) Hilbert-axiómát és kétszer a modus ponenst, kapjuk, hogy $\vdash \alpha$ valóban.

■

3.2 Analitikus fák

A jelen és a következő részben tárgyalt bizonyítási rendszerek (kalkulusok) úgynevezett *cáfolati rendszerek* (cáfolati kalkulusok). Ez azt jelenti, hogy ha Q a szóban forgó cáfolati rendszer, akkor $\Sigma \vdash_Q \alpha$ fennállásának vizsgálatánál feltesszük α tagadását, ezt hozzávesszük Σ-hoz (a szakmai axiómákhoz), majd vizsgáljuk a $\Lambda = \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaz ellentmondásosságát a Q cáfolati rendszer segítségével. Mindez a jól ismert indirekt bizonyítás technikája, amelyik rokonítható azzal az ősi bizonyítási módszerrel, hogy kételkedünk a bizonyítandó állítás igazságában, és az állítást akkor fogadjuk el, ha az ellenkezője ellentmondáshoz vezet.
A cáfolati rendszereknél tehát $\Lambda = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ ellentmondásosságát (ellentmondástalanságát) vizsgáljuk valamely kvázialgoritmus segítségével. Ha Λ ellentmondásos, akkor azt mondjuk, hogy Λ cáfolható. Itt a teljességi tétel a következő alakú: $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ cáfolható akkor és csak akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen. Ha $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ cáfolható, akkor azt mondjuk, hogy $\Sigma \vdash_Q \varphi$. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlensége ekvivalens $\Sigma \models \varphi$-vel. Tehát $\Sigma \vdash_Q \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \models \varphi$.

Ha Λ tetszőleges mondathalmaz, akkor a cáfolati fákra vonatkozó teljességi tétel így szól:

$$\Lambda \text{ cáfolható, akkor és csak akkor, ha } \Lambda \text{ kielégíthetetlen.} \tag{1}$$

E teljességi tétel nyilván a Gödel teljességi tétel b) változatának felel meg.

A következmény és a kielégíthetőség fogalmaknál is feltételezzük, hogy a szereplő formulák valamennyien *zártak*. Általában csak *véges teljességgel* fogunk foglalkozni (tehát (1)-ben Λ véges). Ebből csakúgy, mint a Hilbert-levezetési rendszernél, a kompaktsági tétel értelmében már *következik az erős teljesség*.

Az analitikus fák egy „modellelméleti” eredetű kalkulus, mindkét tárgyalandó cáfolati rendszer, tehát az analitikus fák és a rezolúció is egy **modellkeresési eljárásból** fejlődött ki. A megfelelő szemantikai feladatok a következők:

- ha egy Λ formulahalmaz kielégíthetőségéről van szó, akkor Λ egy *modelljének* keresése,
- ha a $\Sigma \models \alpha$ következményről van szó, akkor *ellenpélda* keresése, másképpen $\neg\alpha$ Σ-modelljének keresése (ha α-ra nem találunk ellenpéldát Σ fennállása esetén, akkor α Σ-nak valóban következménye).

Az (1)-beli teljességi tétel tehát úgy is interpretálható, hogy a cáfolati eljárás pontosan akkor sikeres, ha Λ-nak nincs modellje.

A cáfolati rendszerek logikai apparátusa, összevetve a levezetési rendszerek apparátusával, levezetési szabály jellegű elemekből áll, valamint a bizonyítás (cáfolat) fogalmából (tehát nincsenek axióma jellegű elemek). A cáfolati rendszerek általában algoritmus közelibbek, mint a levezetési rendszerek, e rendszereknél gyakran szerepelnek „kvázialgoritmusok”, algoritmusok, mely utóbbiak már alkalmasak a számítógépes implementációra is.

Az analitikus fákat *példának tekintjük arra, hogy milyen út vezet a bizonyításelméletben az alapötlettől, a kalkuluson át egészen a már számítógépre vihető algoritmusig*.

A 3.2.1-ben az analitikus fáknál alkalmazott eljárás *alapgondolatát* ismertetjük, valamint példákat mutatunk (egyelőre intuitív megközelítésben). A 3.2.2-ben pontosan leírjuk a bizonyítási eljárást, azaz a kalkulust (kézi számolásra), és igazoljuk a teljességet. A 3.2.3-ban többek között számítógépes megvalósításra is alkalmas determinisztikus algoritmust vázolunk az eljárásra.

3.2.1 A modellkeresési eljárásról

Említettük, hogy az analitikus fák erősen szemantikai motivációjú kalkulus, egy modellkeresési eljárásból származik (szokás az analitikus fák módszerét a *szemantikus táblázat* módszerének is nevezni, egyéb elnevezések: *cáfolati fák, elvetési fák*). Jelen részben bizonyítás nélkül körvonalazzuk, hogy az eredeti szemantikai *modellkeresési* eljárás hogyan működik.

A feladat annak vizsgálata, hogy *egy adott, zárt elsőrendű formulákból álló véges* Λ *formulahalmaznak van-e modellje.* A bevezetésben mondottak értelmében a Λ formulahalmazt akkor fogjuk a szintaktikai értelemben ellentmondásosnak, azaz „cáfolhatónak” tekinteni, ha a szóban forgó modellkeresési eljárás „negatív eredményre” vezet.

Először emlékeztetünk néhány fogalomra a speciális gráfokat, a *fákat* illetően. A fa fogalmát ismertnek tételezzük fel (összefüggő, kört nem tartalmazó irányított gráf), de a példákból azok számára is érthető lesz a fogalom, akik először találkoznak most ilyen gráfokkal. Olyan fákra lesz csak szükségünk, amelyek *csúcsainak* foka (a csúcsokból induló élek száma) legfeljebb kettő. Emlékeztetünk arra, hogy a *gyökérből* az egyes csúcsokhoz vezető *élek* sorozatát *ágaknak*, az olyan csúcsokat pedig, amelyekből él nem indul ki *leveleknek* hívjuk. A gyökérről azt mondjuk, hogy a nulladik *szinten* van, a gyökeret követő csúcsok az első, az ezeket a csúcsokat követő csúcsok a második *szinten* vannak, és így tovább.

Ezeket a fákat majd úgy *ábrázoljuk*, hogy a gyökeret tüntetjük fel legfelül, ha egy csúcsból csak egyetlen él vezet, ezt függőlegesen rajzoljuk, és függőleges élnek mondjuk, ha pedig kettő, akkor lefelé vezető szimmetrikus elágazással ábrázoljuk.

Speciálisan az analitikus fáknál a csúcsokon formulahalmazok „helyezkednek el” (valójában a *csúcsokhoz formulahalmazokat rendelünk*; vagy másképpen, a csúcsokat formulahalmazokkal „címkézzük”). A fa gyökeréhez a Λ formulahalmazt rendeljük. Ha bizonyos formulák *egyszerre* szerepelnek a fa egy rögzített *csúcsán*, ennek jelentése legyen a szokásos, tehát az, hogy a formulák között „és” kapcsolat van.

A fához képzeletben *modelleket társíthatunk*, minden ághoz egy az ágon található összes formulát kielégítő rögzített modellt, másképpen: a Λ formulahalmazt kielégítő rögzített modellt (e modell nem egyértelmű).

Ha az A csúcsból egyetlen él vezet, és ez a B csúcs, ennek jelentése az, hogy az A-n található formulák igazak egy szóban forgó modellen, *akkor és csak akkor*, ha a B-n található formulák is igazak e modellen.

Ha az A csúcsból *elágazás* vezet a B és C csúcsokhoz, ennek jelentése az, hogy az A-n található formulák igazak egy szóban forgó modellen akkor és csak akkor, ha *vagy* a B-n, *vagy* a C-n található formulák igazak e modellen.

Úgy is gondolhatunk a fára, hogy az ágakhoz *modellosztályokat* társítunk: egy az ágon található összes formulát kielégítő modellosztályt (egy a Λ formulahalmazt kielégítő modellosztályt), és minden csúcshoz egy az ott található formulákat kielégítő modellosztályt. Látni fogjuk, hogy ha az A csúcstól egyetlen él vezet és ez a B csúcshoz vezet, akkor

$$\mathrm{Mod}(A') = \mathrm{Mod}(B')$$

teljesül, ahol A', B' jelölik rendre az A, B csúcsokon található formulahalmazokat. Ha az A csúcsból *elágazás* vezet a B és C csúcsokhoz, akkor pedig

$$\mathrm{Mod}(A') = \mathrm{Mod}(B') \cup \mathrm{Mod}(C')$$

teljesül, ahol A', B', C' jelöli rendre az A, B és C csúcsokon található formulahalmazokat.

A faépítési eljárás lényege majd az lesz, hogy párhuzamosan a faépítéssel, a gyökérben található formulát (formulákat) „lebontjuk” literálokra. Ha ezen lebontás eredménye egy-egy ágon olyan, hogy egyszerre jelenik meg egy atomi formula és negáltja (vagy általában tetszőleges formula és negáltja), akkor nyilván ellentmondást kapunk, mert e formulákat kielégítő modell nem létezhet. Ha valamennyi ágon ellentmondást kapunk, akkor a gyökérben található formulának nem lehet modellje (speciálisan ha a gyökérben $\neg\psi$ alakú formula áll, akkor ψ érvényes). Viszont ha a lebontás után van olyan ág, hogy nem jelenik meg rajta atomi formula és negáltja egyszerre, akkor a gyökérben található formulát (formulahalmazt) kielégítő modellt kapunk.

A gyökérben található formula „lebontása” úgy történik, hogy

a) a formula *állításszerkezetét* igyekszünk literálokból, csak $\wedge$ és $\vee$ műveletekkel kifejezni, tükrözendő a fakonstrukció lehetőségeit (függőleges élek, illetve elágazások), például $\alpha \to \beta$-t átalakítjuk $\neg\alpha \vee \beta$ alakúvá, vagy $\neg(\alpha \wedge \beta)$-t $\neg\alpha \vee \neg\beta$ alakúvá, $\neg$ pedig csak literálban maradhat. A konjunkciós formulákat *lecseréljük* két formulára, a konjunkciós tagokra, a diszjunkciós formulákat pedig az egyik ágon az egyik, a másik ágon pedig a másik diszjunkciós komponensükkel cseréljük ki.

b) ha a formula kvantorral kezdődik, akkor a kvantort „specifikáljuk” az ághoz rendelt modell alaphalmaza valamely c' elemének megfelelő c konstansra: $\exists x\alpha$, illetve $\forall x\alpha$-ból így az $\alpha(x/c)$ formulát kapjuk. $\exists x\alpha$-t *kicseréljük* $\alpha(x/c)$-re, viszont $\forall x\alpha$ esetében *hozzávesszük* a többi formulához $\alpha(x/c)$-t.

Az a) és b)-beli eseteket is figyelembe véve elmondhatjuk, hogy egy-egy új csúcsra az előző csúcson található formulahalmazzal *logikailag ekvivalens* formulahalmaz kerül, kivéve azt az esetet, amikor diszjunktív ekvivalenssel rendelkező formulát bontunk le.

Az eljárást ezután példákon szemléltetjük. *A faépítési eljárás pontos szabályait majd a következő részben ismertetjük.*

1. Példa. *Legyen* $\Sigma = \emptyset$ *és* $\varphi = (\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \vee \beta)$. *Igazoljuk, hogy* $\vDash \varphi$ *fennáll.*

$\neg\varphi$-ből indulunk ki:

$$
\begin{array}{c}
\neg((\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \vee \beta)) \\
| \\
\forall x\alpha \vee \forall x\beta \\
\neg\forall x(\alpha \vee \beta) \\
| \\
\forall x\alpha \vee \forall x\beta \\
\exists x\neg(\alpha \vee \beta) \\
| \\
\forall x\alpha \vee \forall x\beta \\
\exists x(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \\
| \\
\forall x\alpha \vee \forall x\beta \\
\neg\alpha(c) \wedge \neg\beta(c) \\
| \\
\forall x\alpha \vee \forall x\beta \\
\neg\alpha(c) \\
\neg\beta(c) \\
/ \quad\quad \backslash
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\forall x\alpha & \forall x\beta \\
\neg\alpha(c) & \neg\alpha(c) \\
\neg\beta(c) & \neg\beta(c) \\
| & | \\
\alpha(c) & \beta(c) \\
\neg\alpha(c) & \neg\alpha(c) \\
\neg\beta(c) & \neg\beta(c) \\
| & | \\
\emptyset & \emptyset
\end{array}
$$

Mindkét ágon egyszerre szerepel atomi formula és negáltja, ezért ellentmondást kaptunk, $\neg\varphi$ nem lehet igaz, azaz φ érvényes.

2. Példa. *Legyen* $\Sigma = \emptyset$, $\varphi = (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \wedge \beta \to \gamma)$. *Igazoljuk, hogy* $\vDash \varphi$ *fennáll.*

$$
\begin{array}{c}
\neg((\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \wedge \beta \to \gamma)) \\
| \\
(\alpha \to \beta \to \gamma) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta \to \gamma) \\
| \\
\alpha \to \beta \to \gamma \\
\neg(\alpha \wedge \beta \to \gamma) \\
| \\
\alpha \to \beta \to \gamma \\
\alpha \wedge \beta \\
\neg\gamma \\
| \\
\neg\alpha \vee (\beta \to \gamma) \\
\alpha \\
\beta \\
\neg\gamma
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
/ & & \backslash \\
\neg\alpha & & \beta \to \gamma \\
\alpha & & \alpha \\
\beta & & \beta \\
\neg\gamma & & \neg\gamma \\
| & / & \backslash \\
\emptyset & \neg\beta & \gamma \\
 & \alpha & \alpha \\
 & \beta & \beta \\
 & \neg\gamma & \neg\gamma \\
 & | & | \\
 & \emptyset & \emptyset
\end{array}
$$

Ugyanúgy okoskodhatunk, mint az előző példánál.

3. Példa. *Van-e modellje a $\forall x \exists y \alpha(x, y)$ formulának?*

$$
\begin{array}{c}
\forall x \exists y \alpha(x, y) \\
| \\
\exists y \alpha(c_1, y) \\
\forall x \exists y \alpha(x, y) \\
| \\
\alpha(c_1, c_2) \\
\forall x \exists y \alpha(x, y) \\
| \\
\exists y \alpha(c_2, y) \\
\alpha(c_1, c_2) \\
\forall x \exists y \alpha(x, y) \\
| \\
\alpha(c_2, c_3) \\
\alpha(c_1, c_2) \\
\forall x \exists y \alpha(x, y) \\
| \\
\exists y \alpha(c_3, y) \\
\alpha(c_2, c_3) \\
\alpha(c_1, c_2) \\
\forall x \exists y \alpha(x, y) \\
| \\
\alpha(c_3, c_4) \\
\alpha(c_2, c_3) \\
\alpha(c_1, c_2) \\
\forall x \exists y \alpha(x, y) \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Végtelen ágat kapunk (tehát végtelen fát), mivel a kvantorok specifikációja „végtelen ciklusba került”. Másrészt nem szerepel az ágon egyszerre atomi formula és negáltja. Az ágról így egy $\forall x \exists y \alpha(x, y)$-t kielégítő modell olvasható le (e modellre nézve még lásd a 3. Példát a 3.2.3 rész végén). Olyan formulák esetében, melyeknél az eljárás valamelyik ágon *véges sok lépésben véget ér* úgy, hogy az ágon nem szerepel ellentétpár, még könnyebben leolvasható az ágból egy modell.

Bemutattuk a faépítési eljárás alapötletét, a bemutatott példák alapján az érdeklődő Olvasó talán már követni tudná egyéb formulákra is az eljárást. A következő részben megadjuk az eljárás pontos leírását.

3.2.2 A kalkulusról

Jelen részben a vázolt szemantikai alapú eljárás *szintaktikai „fordítását”* tárgyaljuk, tehát magát a kalkulust ismertetjük.

Először egyszerűsítő feltételeket teszünk: feltesszük, hogy az $\mathcal{L}$ nyelv *nem tartalmaz* függvényjeleket, kivéve esetleg az individuumkonstansokat, továbbá $\mathcal{L}$ *egyenlőségmentes*. Hangsúlyozzuk, hogy különösen a függvényjelek elhagyása, nagyon *erős leegyszerűsítés*, erre később, a kalkulus általánosításánál még visszatérünk.

1. Definíció. (Az „ekvivalensek”.)

(i) a következő formulapárok *konjunktív ekvivalensek*:
$\neg(\alpha \vee \beta)$ és $\neg\alpha \wedge \neg\beta$,
$\neg(\alpha \to \beta)$ és $\alpha \wedge \neg\beta$,
$\alpha \wedge \beta$ konjunktív ekvivalense önmaga.

(ii) a következő formulapárok *diszjunktív ekvivalensek*:
$\neg(\alpha \wedge \beta)$ és $\neg\alpha \vee \neg\beta$,
$\alpha \to \beta$ és $\neg\alpha \vee \beta$,
$\alpha \vee \beta$ diszjunktív ekvivalense önmaga.

(iii) a következő formulapárok *negáció ekvivalensek*:
$\neg\exists x\alpha$ és $\forall x\neg\alpha$,
$\neg\forall x\alpha$ és $\exists x\neg\alpha$,
$\neg\neg\alpha$ és α.

A fenti ekvivalenciák bevezetésének szemantikai háttere az, hogy mint azt 2.2.2-ből már tudjuk, ezen ekvivalenspárok tagjai *logikailag ekvivalens formulák*. Ezen ekvivalenseket majd a fa literálokra bontásánál alkalmazzuk.

2. Definíció. A $\exists x\alpha$ vagy a $\forall x\alpha$ kvantoros formulák egy *specifikációján* értünk egy $\alpha(x/c)$ alakú formulát, ahol c a nyelv egy individuumkonstansa.

Tehát $\alpha(x/c)$ $\exists x\alpha$-nak és $\forall x\alpha$-nak is specifikációja. A specifikációnak a szemantikai háttere az, hogy $\exists x\alpha$ igazsága az adott modellen ekvivalens $\alpha[c']$ igazságával *valamely* c'-re, ahol c'-t tekintjük a konstans interpretációjának. $\forall x\alpha$ igazsága az adott modellen pedig implikálja $\alpha\left[c'\right]$ igazságát *minden* c'-re, ahol c' a modell alaphalmazának tetszőleges eleme (c interpretációjának tekintjük).

Legyen φ egy adott formula, l pedig a fa egy rögzített ága. Attól függően, hogy φ-nek közvetlenül milyen ekvivalense létezik az 1. Definícióbeli esetek közül, definiáljuk *φ-nek l-re korlátozott származékait*:

3. Definíció. Az l ágon található φ formulának az ágra korlátozott *származékai*

(i) konjunktív ekvivalens létezése esetén a konjunkciós tagok,
(ii) diszjunktív ekvivalens létezése esetén valamelyik diszjunkciós tag,
(iii) negáció ekvivalens létezése esetén az ekvivalens,
(iv) $\exists$ kvantorral kezdődő formula esetén a formula specifikációja valamely új konstansra, amellyel bővítjük a nyelvet, és amely nem szerepel a φ formulát megelőzően az ágon,
(v) $\forall$ kvantorral kezdődő formula esetén a specifikációk, az l ágon szereplő összes konstansra és a nyelv eredeti konstansaira.

Ismertetni fogjuk a *faépítési szabályokat* (e szabályok a Hilbert-féle bizonyítási rendszer *levezetési szabályának* feleltethetők meg). Egyelőre egy *nemdeterminisztikus* algoritmust mutatunk, amelyik alkalmas kézi számolásra és könnyen fejleszthető tovább *determinisztikus* algoritmussá. Az analitikus fa csúcsaihoz majd *formulahalmazokat* rendelünk (azt is mondjuk, hogy a formulahalmazok a csúcsokon „helyezkednek” el). A fa egymást követő csúcsain elhelyezkedő formulák egyik kapcsolata az lesz, hogy lépésenként, egy csúcsból *legfeljebb egyetlen formulát hagyunk el, és legfeljebb kettőt veszünk hozzá*. Megengedett, ha szükséges, hogy lépésenként egy új konstanssal bővítsük a nyelvet. Ha a gyökérben szereplő véges formulahalmaz Φ, akkor azt mondjuk majd, hogy a fa *Φ-nek egy analitikus fája*.

4. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a fa egy ága *zárt* (az ág lezárult), ha az ágon lévő valamely csúcson egy formula és negáltja egyszerre szerepel. Egy fa akkor *zárt*, ha összes ága zárt. Egy ág akkor *lebontott* (másképpen *nyílt*), ha nem zárt, valamint minden rajta szereplő formulával együtt annak összes, az ágra korlátozott származéka (röviden: származéka) is szerepel az ágon. Egy fa akkor *nyílt*, ha van nyílt ága (véges vagy végtelen).

Tehát egy ág lebontott (nyílt), ha az ágon található formulával együtt *szerepel* a konjunktív ekvivalens mindkét tagja, diszjunktív ekvivalens egyik tagja, negáció ekvivalens ekvivalense, $\exists x\beta$ alakú formula esetén β valamely specifikációja egy az ágon előzőleg nem szereplő és új konstansra, $\forall x\beta$ alakú formula esetén β specifikációi az ágon szereplő összes konstansra, valamint az eredeti konstansokra.

Egy véges ág tehát akkor nyílt, ha levelén már csak literálok szerepelnek, és nem fordul elő atomi formula és negációja egyszerre.

Megjegyezzük, hogy abból, hogy egy ág nem nyílt, még nem következik, hogy zárt (és fordítva), mert lehetséges, hogy az ágon hiányoznak egyes formulák korlátozott származékai! Lehetséges ugyanis, hogy az eljárás az univerzális kvantor specifikációjánál úgy kerül végtelen ciklusba, hogy bizonyos, az ágon szereplő formulákat az eljárás sohasem bont le, lásd a fejezet végén a 3. Példát követő megjegyzést! Hasonlóan az ágakhoz, *lehetséges, hogy egy fa se nem nyílt, se nem zárt.*

Legyen Λ zárt formulákból álló, véges formulahalmaz. A Λ formulahalmaz egy analitikus fáját indukcióval definiáljuk.

5. Definíció. (Véges, zárt formulahalmaz analitikus fája.)

1. A fa gyökerében álljon a Λ formulahalmaz, ezt tekintjük 0-dik lépésnek.
2. Tegyük fel, hogy n lépés után létrejött a fa. Ha minden ág zárt, akkor a fa zárt, és az eljárás végetér. Ha van lebontott ág, akkor a fa lebontott (nyílt), és az eljárás szintén végetér. Ha egyik eset sem áll fenn, akkor válasszuk ki a fa egy olyan A levelét, amelyre az A-hoz vezető ág nem zárt vagy nem lebontott, válasszunk ki egy olyan α formulát A-n, amelyik nem literál. Ilyen létezik, mert az ág nem lebontott. Definiáljuk az A-t közvetlenül követő csúcs(ok)hoz rendelt formulahalmazokat.
   a) Ha az α formulának létezik diszjunktív ekvivalense, akkor vezessen az A csúcsból *elágazás*, és mindkét új csúcsra kerüljenek az A-beli formulák, kivéve α-t, amelyet az egyik új csúcson diszjunktív ekvivalensének egyik, a másik új csúcson a diszjunktív ekvivalensének másik tagjával *cserélünk* ki.
   b) Ha az α formulának létezik konjunktív ekvivalense, akkor a csúcson található többi formula megtartása mellett cseréljük ki az új csúcson α-t a konjunktív ekvivalensének két konjunkciós tagjával, tehát α-t *két új* formulával helyettesítjük.
   c) Ha az α formulának létezik negáció ekvivalense, akkor α-t ezzel *cseréljük* ki az új csúcson, a többi formula megtartása mellett.
   d) Ha α $\exists x\beta$ alakú, akkor a többi formula megtartása mellett, *cseréljük ki* α-t az új csúcson valamely $\beta(x/c)$ specifikációjával, ahol c olyan *új konstans*, amellyel bővítjük a nyelvet.
   e) Ha α $\forall x\beta$ alakú, akkor az α formula és az összes A-beli formula *megtartása mellett*, α-t specifikáljuk az új csúcson olyan c konstansra, amelyik *szerepel A ágán*, vagy szerepel a nyelvben, de amelyre még nem specifikáltuk. Ha egyáltalán nincs konstans a csúcson, akkor $\forall x\alpha$-t egy új konstansra specifikáljuk. Ha $\forall x\alpha$-t már az összes szóban forgó konstansra specifikáltuk, akkor (és csak akkor) elhagyhatjuk az A csúcsról (a specifikációk megtartása mellett).

Tehát az egész **eljárás akkor fejeződik be** (ha egyáltalán befejeződik), **ha a fa minden ága lezárult, vagy a fa valamely ágát már lebontottuk**, (azaz utolsó csúcsán már csak literálok találhatók, és ezek egymásnak nem mondanak ellent). Nyilvánvaló, hogy egy formulahalmaznak több analitikus fája is képezhető.

Egyszerű esetektől eltekintve, az eljárás *nem fejeződik be*, tehát létezik egy végtelen ág. Ugyanis a $\forall x\beta$ alakú formulákat csak akkor töröljük a csúcsokról, ha valamennyi konstansra már specifikáltuk őket. Jellemzően, ez utóbbi nem következik be semmilyen véges lépésig, és a specifikáció „végtelen ciklusba" kerül (lásd a 3. Példát). Ezért a faépítési eljárás *nem döntési eljárás*, hiszen ha egy adott lépésig nem fejeződik be, akkor nem tudhatjuk, hogy be fog-e egyáltalán fejeződni. *Állításlogikában* viszont már *döntési eljárás*, mivel nincsenek kvantoros formulák és kvantoros faépítési szabályok, a végtelen ág jelensége állításlogikában nem léphet fel.

A következő fogalom az ellentmondásosság szintaktikai megfelelője az analitikus fák elméletében. Legyen Λ zárt formulák egy véges halmaza.

6. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a Λ formulahalmaz analitikus fával *cáfolható*, ha Λ-nak van zárt analitikus fája.

7. Tétel. (Analitikus fák teljességi tétele a) változat.)

A Λ formulahalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha Λ cáfolható valamely analitikus fával.

Gyakran használjuk a tétel következő változatát. Ezt a változatot fogjuk bizonyítani (az előző változat bizonyítására nézve lásd az alábbi bizonyítást követő észrevételt).

8. Tétel. (Analitikus fák teljességi tétele b) változat.)

Λ-nak van modellje akkor és csak akkor, ha Λ-nak van nyílt analitikus fája.

Bizonyítás.
Először tegyük fel, hogy Λ-nak van modellje, és ez $\mathcal{A}$. Indukcióval fogjuk definiálni Λ egy analitikus fájának nyílt ágát az $\mathcal{A}$ modell segítségével.
Rendezzük *sorozatba* Λ formuláit, és bővítsük a nyelvet megszámlálható sok konstanssal, és rendezzük ezeket olyan $\langle c_i \rangle$ sorozatba, amely magában foglalja a nyelv eredeti konstansait is.

A *gyökérben* ($k=0$) szerepeljen a Λ-ból képezett formulasorozat. A gyökérben a fa nyilván nem zárulhat le, mert Λ-nak van modellje: $\mathcal{A}$. Ha Λ csak literálokból áll, akkor e gyökérből álló fa nyílt.

Tegyük fel, hogy D egy olyan csúcs, melyhez vezető ágon már definiált az analitikus fa, beleértve D-t is, továbbá definiált a D-n található formulák egy sorozatba rendezése, és $\mathcal{A}$ e formulasorozatnak is modellje, ezért az ág nem zárt (indukciós feltétel n-edik lépés, $k = n$).
Ha a D csúcson csak literálok találhatók, akkor az eljárás befejeződött, feltétel szerint, és az ág lebontott, és nem zárt, tehát a fa nyílt.
Ha található D-n olyan formula, amelyik nem literál, és a D-beli formulasorozatban az első ilyen formula α, akkor a D-t követő (egyik) rögzített E csúcshoz rendelt formulasorozatot a következőképpen definiáljuk ($k = n + 1$-edik lépés):
Ha α-nak konjunktív ekvivalense van, akkor α-t elhagyva, a formulasorozat végéhez fűzzük a konjunkciós tagokat. Ha α-nak diszjunktív ekvivalense van, akkor α-t elhagyva, a formulasorozat végéhez hozzáfűzünk egy olyan diszjunkciós tagot, amelyik igaz $\mathcal{A}$-n, ilyennek kell lennie, mert α igaz $\mathcal{A}$-n. Ha α-nak negáció ekvivalense van, akkor α-t elhagyva, a formulasorozat végéhez hozzáfűzzük a negáció ekvivalenst. Ha α $\exists x\beta$ alakú, akkor α-t elhagyva, egy specifikációját, $\beta(x/c)$-t a formulasorozat végéhez fűzzük, ahol c az új konstansok c_i sorozatában az első olyan, amely még fel nem használt (mivel $\mathcal{A} \vDash \exists x\beta$, ezért $\mathcal{A} \vDash \beta(x/c')$ valamely c'-re, ahol c' c-nek interpretációja). Ha α $\forall x\beta$ alakú, akkor β-t specifikáljuk az első olyan konstansra a bővített nyelv konstansainak sorozatában, amelyik előfordul az illető ágon, vagy az eredeti nyelv konstansa, és amelyre még nem specifikáltuk, majd az így kapott formulát és α-t fűzzük a csúcson található formulasorozat végéhez. Ilyenkor α-t csak abban az esetben hagyhatjuk el a formulasorozatból, ha már az ágon található valamennyi konstansra, valamint az eredeti nyelv konstansaira specifikáltuk.
Az indukciós feltétel teljesül az E csúcsra, ugyanis az igazságértékelés definíciójának értelmében (például az ekvivalensek valóban logikailag ekvivalensek, vagy $\exists x\alpha$ ekvivalens specifikációjával, stb.) a csúcshoz rendelt formulasorozatnak is modellje $\mathcal{A}$ (illetve $\mathcal{A}$ bővítése, az esetleges új konstansokat természetes módon interpretálva), ezért itt sem zárul le a fa.

Az indukciós feltétel tehát minden k természetes számra (minden lépésre) teljesül. Ha csupán literálok maradnak egy szinten, akkor készen vagyunk. Ha pedig nem, akkor az általános faépítési szabályokat figyelembe véve folytatjuk az eljárást, és egy *nyílt ágat* kapunk. Ugyanis, az indukciós feltétel szerint, az ág egyrészt nem zárulhat le, másrészt a formulák sorozatba rendezésének módja és a $\forall x\beta$ alakú formuláknak a sorozathoz fűzése miatt a szereplő formulák összes, az ágra korlátozott származéka szerepel az ágon.

Ezután a megfordítást bizonyítjuk. Most tegyük fel, hogy Λ-nak van nyílt analitikus fája, és tekintsünk egy ilyen fát. Rögzítsük a fa egy nyílt ágát, és jelöljük Φ-vel az összes itt található formulák összességét. Definiálunk ehhez a nyílt ághoz egy modellt, $\mathcal{A}$-t.
Az első esetben $\mathcal{A}$ alaphalmaza legyen az ágon szereplő individuumkonstansok C halmaza. Tekintsük $\mathcal{L}(\mathcal{C})$-nek atomi formuláit. Amennyiben egy P atomi formula negá-

latlanul szerepel az ágon, tehát $P \in \Phi$, akkor tekintsük igaznak $\mathcal{A}$-n, ha pedig negálva szerepel, tehát $\neg P \in \Phi$, akkor pedig tekintsük hamisnak. Mivel az ág nem zárul le, ezért ez a definíció ellentmondásmentes. Azokra az atomi formulákra, amelyek nem szerepelnek az ágon, rögzítsük az igazságértékeket tetszőlegesen.

Ezután a következő (I) állítást igazoljuk:

Az ágon szereplő tetszőleges φ formula, ezért Λ tetszőleges formulája is, az igazságértékelés szokásos definíciója szerint igaz az imént definiált $\mathcal{A}$ modellen. (I)

Ha φ literál, akkor az állítás az $\mathcal{A}$ definíciója szerint igaz. Legyen φ tetszőleges formula.

Indirekt, tegyük fel, hogy φ hamis $\mathcal{A}$-n. φ-nek van olyan φ' származéka, amelyik hamis $\mathcal{A}$-n, ugyanis amennyiben ez a származék literál, akkor ellentmondásra jutunk $\mathcal{A}$ definíciójával. Ha pedig nem literál, akkor sorra véve azokat az eseteket, hogy φ-nek negáció, konjunktív, diszjunktív ekvivalense van, vagy kvantorral kezdődik, kihasználva a „származék" definícióját, az igazságértékelés definícióját, valamint azt, hogy az ág nyílt, a φ formulának van olyan φ' származéka, amely hamis $\mathcal{A}$-n. Továbbá a „származék" definíciójának következtében φ' rövidebb formula φ-nél, kivéve esetleg a negáció ekvivalanes esetét, ilyen lépés azonban legfeljebb annyi van, ahány kvantor található φ-ben.

Folytatva ezt a gondolatmenetet, kapjuk a $\varphi', \varphi'', \varphi''' \ldots$ sorozatot. Mivel a sorozatban a formulák hossza csökken vagy véges sok lépésnel megmarad, ezért következik, hogy az eredeti φ formulának van olyan származéka, amelyik literál, és amelyikre nem igaz az (I) állítás. Ez utóbbi ellentmondás.

Ezzel az (I) állítást, és így a tételt a másik irányban beláttuk.

■

A bizonyítással kapcsolatban a következő észrevételeket tesszük:

• Nemcsak az a tény derül ki az analitikus fából, hogy Λ-nak *van-e* modellje, hanem *egy modell ki is következtethető* egy nyílt ágról, mint az a tétel bizonyításából következik. A modell alaphalmazát a nyílt ágon található konstansok C összessége alkotja. Az atomi formulák pedig aszerint igazak vagy hamisak e modellen, hogy negálva vagy negálatlanul szerepelnek az ágon. Azokra az atomi formulákra és értékelésekre, amelyek egyáltalán nem szerepelnek az ágon, közömbös, hogy milyen igazságértékeket választunk. Tehát a nyílt ágból leolvasható egy modellnek a *diagramja* (lásd 2.1.2 6. Definíció). *Több nyílt ág esetén így több lényegesen különböző modellt is kaphatunk.* Mindez azonban csak egy elvi lehetőség, hiszen például gépi eljárásnál egy végtelen ág nem kezelhető. A „kézi eljárásnál" azonban ez az elvi lehetőség realizálható bizonyos esetekben (lásd 3. Példa).

• Az első rész bizonyításához leírt, sorozatba rendezési eljárás biztosítja, hogy amennyiben végtelen ág keletkezik, akkor már *lebontott* ág keletkezik. Utóbbi azt jelenti, hogy *a bizonyításban leírt eljárást alkalmazva,* **a keletkező ágak vagy nyíltak, vagy zártak, és maga a fa is vagy nyílt, vagy zárt**.

Így a „Λ-nak van modellje” tulajdonság nemcsak azt implikálja, hogy Λ-nak *van* nyílt analitikus fája, hanem azt is, hogy *minden, a bizonyításban leírt eljárással készített analitikus fája nyílt.*

• A 8. Tételnek nemcsak *következménye a Lindenbaum-tétel* a véges ellentmondástalan formulahalmaz esetére (lásd a Gödel-teljességi tétel b) változatnál), hanem az előbb mondottak értelmében, egy kiterjesztés *le is olvasható a fáról*.

• A 8. Tétel bizonyításából **következik a Löwenheim–Skolem-tétel**, legalábbis véges Σ formulahalmaz és megszámlálható nyelv esetére. Ugyanis az analitikus fából leolvasható modell, a fakonstrukció miatt, értelemszerűen, *legfeljebb megszámlálható*.

• A 7. Tétel a 8. Tételnek nem egy triviális következménye, hiszen tudjuk, hogy általában abból, hogy egy fa nem zárt, még nem következik, hogy nyílt.

A 8. Tétel állításának tagadásából az következik, hogy Λ kielégíthetetlensége azzal ekvivalens, hogy Λ-nak nincs nyílt analitikus fája. A fenti, második megjegyzés értelmében viszont ez azt jelenti, hogy minden, a bizonyításban használt sorbarendezési eljárással készített analitikus fa zárt. Tehát, ha Λ kielégíthetetlen, akkor van zárt analitikus fája. Fordítva, indirekt igazolható, hogy ha Λ-nak van zárt analitikus fája, akkor nem lehet kielégíthető.

3.2.3 Alkalmazás és változatok. Az automatikus tételbizonyítókról

1. Alkalmazás és változatok. Először az *analitikus fák és a következményfogalom kapcsolatára* térünk rá. A bevezetésben leírtuk, hogyan definiálható egy cáfolati rendszerben a következtetésreláció. Először ezt specializáljuk az analitikus fák esetére.

Legyen Σ tetszőleges formulahalmaz és α tetszőleges formula.

9. Definíció. Akkor mondjuk, hogy α analitikus fákkal *levezethető* Σ-ból (jelölés $\Sigma \vdash_A \alpha$), ha $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ cáfolható analitikus fákkal.

A 7. Tétel szerint $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ cáfolható akkor és csak akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ kielégíthetetlen. Utóbbi viszont ekvivalens azzal, hogy $\Sigma \vDash \alpha$. Ebből nyerjük a $\vdash_A$ relációra vonatkozó következő teljességi tételt:

10. Tétel. (Teljesség a levezethetőségre.)

$$\Sigma \vdash_A \alpha \text{ akkor és csak akkor, ha } \Sigma \vDash \alpha$$

Az analitikus fák kalkulusa tehát az ellentmondástalanság vizsgálatán túl *alkalmazható a* $\Sigma \vDash \alpha$ *következmény helyességének, valamint az érvényességnek, függetlenségnek stb. vizsgálatára is*.

Ezután az analitikus fák két változatára hívjuk fel a figyelmet:

- A véges sok formulára ismertetett eljárás kiterjeszthető *megszámlálható sok formula* esetére is.
  Rendezzük sorozatba a formulákat. A gyökérben csak véges sok formulát helyezünk el, az első n formulát. Az első szint mindegyik csúcsára előre elhelyezzük az $n+1$-edik formulát. Majd a második szint minden csúcsára előre elhelyezzük az eredeti formulasorozat $n+2$-edik formuláját és így tovább. Ezután a fa *építése* az új formulák bevonásával, az előző részben ismertetett eljárás szerint történik.
  Igazolható, hogy a teljességi tétel érvényben marad a megszámlálható formulahalmazok és a most módosított eljárás esetére is.
- Az „ekvivalensek" módosításával és új faépítési szabályok alkalmazásával elérhető, hogy *egyenlőség*, illetve *függvényszimbólumok* is megengedettek legyenek a nyelvben.
  Ha *például egyenlőséget is megengedünk* a nyelvben, akkor az előző részben ismertetett 1. Definícióbeli ekvivalenciákat kiegészítjük az egyenlőségre vonatkozó, Hilbert-féle axiómasémákkal:
  (i) $t = t$
  (ii) $t_1 = p_1 \wedge t_2 = p_2 \wedge \ldots \wedge t_n = p_n \rightarrow Pt_1t_2\ldots t_n = Pp_1p_2\ldots p_n$,
  ahol $t_1, t_2, \ldots t_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ individuumváltozók vagy individuumkonstansok, és P tetszőleges n változós reláció.

  Ha a nyelvben *függvényszimbólumokat* is megengedünk, akkor az univerzális formulákat nemcsak az illető ágon szereplő összes konstansokra specifikáljuk, hanem az ezen az ágon szereplő konstansokból képezett *összes változómentes termre is* (a Herbrand-univerzum elemeire). Mivel ez a halmaz mindig végtelen, ezért ha a nyelv tartalmaz függvényszimbólumot, és a fa nem zárt, akkor a fa végtelen.

2. Az automatikus tételbizonyítókról. Sokáig lebegett célként a tudósok előtt az elmúlt századokban az *automatikus (mechanikus) tételbizonyítás*, tehát olyan eljárás megtalálására, amely minden tétel igazságát eldönti. Láttuk, hogy az analitikus fák megismert eljárása e célra nem alkalmas, hiszen az eljárás nem döntési eljárás, sőt 3.4-ben Gödel inkomplettségi tételei kapcsán azt is látni fogjuk, hogy ilyen eljárás teljes általánosságában nem létezhet.
Tudjuk azonban, hogy bizonyos esetekben az analitikus fák eljárása is és más eljárás is, választ tud adni arra, hogy tétel-e egy adott állítás. Azonban nem mindegy, hogy ha egyáltalán választ kapunk, akkor az esetek összességét tekintve milyen százalékban kapunk választ, és milyen gyorsan, azaz mennyire hatékony az a bizonyítási eljárás, amelyet alkalmazunk.

Két fontos meghatározás következik:

Adott kalkulus esetén az összes lehetséges bizonyítások halmazát keresési térnek *nevezzük.*

A keresési térnek egy nemdeterminisztikus vagy determinisztikus bejárási módját (a tér pontjainak felsorolását) keresési stratégiának *nevezzük.*

A keresési stratégia tehát nem feltétlenül determinisztikus. A számítógépes implementálhatósághoz azonban általában determinisztikus algoritmusra van szükség. Ez utóbbi algoritmusokat *automatikus tételbizonyítóknak is* nevezzük. Az automatikus tételbizonyítók kutatása sokáig a rezolúcióelmélethez kötődött, de ez a helyzet már megváltozott, és egyéb kalkulusok is az érdeklődés homlokterébe kerültek. A kalkulusoktól az automatikus tételbizonyítókig tehát az út egy keresési stratégián, majd egy determinisztikus algoritmus megfogalmazásán át vezet.

Visszatérve az *analitikus fákra*, az általunk az előző részben megadott kalkulusba (faépítési eljárásba) már beépített egy keresési stratégia, amely nemdeterminisztikus. A nemdeterminisztikus algoritmus *determinisztikus* algoritmussá válik, ha a *csúcsok kiválasztásának módjára*, illetve a csúcsokon belül a *nem atomi formulák kiválasztásának módjára*, valamint a kvantorok specifikációira utasításokat adunk.
A nemdeterminisztikus algoritmus *determinisztikussá* alakításánál *tehát* a lényeg az, hogy **formulahalmazok helyett formulasorozatokban kell gondolkodnunk**, hasonlóan, mint a 8. Tétel bizonyításánál: például a csúcsokat szintenként balról jobbra és a szintek mélysége szerint indexezhetjük, ez természetes módon megfeleltethető a csúcsok balról jobbra „sorrendben” ábrázolásával és a felülről lefelé haladással. Ha az egy csúcson található formulák sorozatából elhagyunk egy tagot, akkor az új formulá(ka)t a sorozat végéhez csatoljuk. A nyelv új konstansait indexezzük, és egy-egy ágon a kvantorokat ezen indexezés szerint specifikáljuk. Univerzális formulák specifikációját, az univerzális formulákkal együtt, szintén a sorozat végéhez csatoljuk.
Tudjuk (lásd 8. Tétel), hogy ez a determinisztikus algoritmus is *teljes*. Ez igen erős eredmény, mert egy determinisztikus algoritmus alkalmazása erős megkötés a kalkulus szabadságában, a kalkulus teljessége elromolhat.

* * *

Most, a rész végén, *példákat* mutatunk az analitikus fák alkalmazására. Előrebocsájtjuk, hogy „kézi számolásnál” *általában nem írjuk le a csúcsokra újra és újra az összes formulát*, csak a csereként használt formulát vagy formulákat, tehát a változásokat tüntetjük fel az előző lépéshez képest. A formulák kiválasztásánál, egy-egy lépésnél, általában célszerű előrevenni a konjunktív, a $\exists x\alpha$ alakú és a negáció ekvivalensekkel rendelkező formulákat, míg a diszjunktív és univerzális formulákat igyekszünk lebontani minél később. Gépi számolásnál természetesen mások a szempontok.

Megállapodás szerint csak akkor tüntetjük fel egy-egy lépésnél, hogy mely szinten található formulát használunk, ha *a formula éppen nem az előző szinten található*. Ez esetben a felhasznált szint mélységét római számmal szoktuk jelölni (sokszor még ezek a számozások is elhagyhatóak, mert általában nem nehéz követni az eljárást). Gyakran előfordul, hogy kézi számolásnál az eljárásnak *egyszerre több lépését hajtjuk végre*, ha félreértés nem lehetséges. Kézi számolásnál az is megengedett, hogy részformulát ekvivalens részformulával helyettesítsünk az eljárás során.

Nyílt ágakkal általában a kézenfekvő esetekben fogunk találkozni, tehát nem lesz szükséges a definíciót teljes mélységében használni.

Először a fejezet elején szereplő példákat vizsgáljuk újra, tömörebb levezetést alkalmazva. Ha mást nem mondunk, akkor a példákban α, β, γ formulákat jelölnek.

1. Példa. *Legyen* $\Sigma = \emptyset$ *és* $\varphi = \forall x\alpha \lor \forall x\beta \to \forall x(\alpha \lor \beta)$. *Igazoljuk, hogy* $\vDash \varphi$ *fennáll.*

$$\begin{array}{c} \neg((\forall x\alpha \lor \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \lor \beta)) \\ | \\ \forall x\alpha \lor \forall x\beta \\ \neg\forall x(\alpha \lor \beta) \\ | \\ \exists x\neg(\alpha \lor \beta) \\ | \\ \exists x(\neg\alpha \land \neg\beta) \\ | \\ \neg\alpha(c) \land \neg\beta(c) \\ | \\ \neg\alpha(c) \\ \neg\beta(c) \\ / \qquad \backslash \\ \begin{array}{cc} \forall x\alpha & \forall x\beta \\ | & | \\ \alpha(c) & \beta(c) \\ | & | \\ \emptyset & \emptyset \end{array} \end{array} \tag{I}$$

2. Példa. *Legyen* $\Sigma = \emptyset$, $\varphi = (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \land \beta \to \gamma)$. *Igazoljuk, hogy* $\vDash \varphi$ *fennáll.*

$$\begin{array}{c} \neg((\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \land \beta \to \gamma)) \\ | \\ (\alpha \to \beta \to \gamma) \land \neg(\alpha \land \beta \to \gamma) \\ | \\ \alpha \to \beta \to \gamma \\ \neg(\alpha \land \beta \to \gamma) \\ | \\ (\alpha \land \beta) \land \neg\gamma \\ | \end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
| \\
\alpha \wedge \beta \\
\neg\gamma \\
| \\
\alpha \\
\beta \\
| \\
\neg\alpha \vee (\beta \to \gamma) \\
| \\
\begin{array}{ccc}
/ & & \backslash \\
\neg\alpha & & \beta \to \gamma \\
| & & \begin{array}{ccc} / & & \backslash \\ \neg\beta & & \gamma \\ | & & | \\ \emptyset & & \emptyset \end{array} \\
\emptyset & &
\end{array}
\end{array}
\tag{II}
$$

3. Példa. *Mutassuk meg, hogy* $\forall x \exists y \alpha(x, y)$*-nak van modellje!*

$$
\begin{array}{cr}
\forall x \exists y \alpha(x, y) & \\
| & \\
\exists y \alpha(c_1, y) & \\
| & \\
\alpha(c_1, c_2) & \\
| & \\
\exists y \alpha(c_2, y) & (0) \\
| & \\
\alpha(c_2, c_3) & \\
| & \\
\exists y \alpha(c_3, y) & (0) \\
| & \\
\alpha(c_3, c_4) & \\
\vdots &
\end{array}
$$

Egy végtelen ágat kaptunk. Nyilvánvaló, hogy az előforduló formulák minden származéka szerepel az ágon, ezért az ág *lebontott*. Az ág nem zárt, de lebontott, vagyis nyílt. Az ágról ezért leolvasható egy modell. A modell alaphalmaza: $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$. A modellben $\alpha(c_1, c_2)$, $\alpha(c_2, c_3)$, $\alpha(c_3, c_4), \dots$ igaz, a többi atomi formulák értékelései pedig tetszőlegesek. Megjegyezzük, hogy nyilván ennél egyszerűbb modellje is van a formulának, például olyan egyelemű, kételemű stb. modellek, ahol α azonosan igaz.

A feladattal kapcsolatban egy észrevételt teszünk. Legyenek γ és β tetszőleges formulák. Ha a feladatot úgy módosítjuk, hogy a $\{\gamma \wedge \neg\beta, \gamma \wedge \beta, \forall x \exists y \alpha(x,y)\}$ formulahalmaznak van-e modellje, akkor a válasz nyilván *nemleges*. Azonban az analitikus fákra tanult nemdeterminisztikus algoritmust alkalmazva, amennyiben az algoritmus a fát a $\forall x \exists y \alpha(x,y)$ formula lebontásával kezdi, akkor sohasem kerül sor a $\gamma \wedge \neg\beta$ és $\gamma \wedge \beta$ formulákra, vagyis az algoritmus *nem dönti el*, hogy a formulahalmaz ellentmondásos. Olyan ágat kapunk, amelyik nem zárt, de mivel nem lebontott, nem is nyílt. Ezért fontos az a (lebontási) feltétel, miszerint az ágon előforduló *összes* formula összes származékainak szerepelni kell az ágon.

4. Példa. *Mutassuk meg, hogy* $\forall x(\alpha \vee \beta) \not\models \forall x\alpha \vee \forall x\beta$.

Azt kell megmutatnunk, hogy a $\{\forall x(\alpha \vee \beta), \neg(\forall x\alpha \vee \forall x\beta)\}$ formulahalmaznak van modellje.

$$
\begin{array}{c}
\forall x(\alpha \vee \beta) \\
\neg(\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \\
| \\
\neg\forall x\alpha \wedge \neg\forall x\beta \\
| \\
\exists x \neg\alpha \wedge \exists x \neg\beta \\
| \\
\exists x \neg\alpha \\
\exists x \neg\beta \\
| \\
\neg\alpha(c_1) \\
| \\
\neg\beta(c_2) \\
| \\
\alpha(c_1) \vee \beta(c_1) \qquad (0) \\
| \\
\alpha(c_2) \vee \beta(c_2) \qquad (0) \\
/ \qquad \backslash \\
\alpha(c_2) \qquad\qquad \beta(c_2) \\
/ \quad \backslash \qquad\qquad | \\
\alpha(c_1) \quad \beta(c_1) \qquad \emptyset \\
| \\
\emptyset
\end{array}
$$

Kaptunk egy nyílt ágat, és az eljárás valóban véget ér, hiszen a nyílt ágon $\forall x(\alpha \vee \beta)$ univerzális formulát minden lehetséges konstansra specializáltuk.

5. Példa. *Mutassuk meg, hogy* $\exists x \forall y \alpha(x,y) \vDash \forall y \exists x \alpha(x,y)$.

Azt kell megmutatnunk, hogy a $\{\exists x \forall y \alpha(x,y), \neg\forall y \exists x \alpha(x,y)\}$ formulahalmaznak nincs modellje, tehát van zárt analitikus fája.

$$
\begin{array}{cr}
\exists x \forall y \alpha(x,y) & \\
\neg\forall y \exists x \alpha(x,y) & \\
| & \\
\forall y \alpha(c_1,y) & \\
| & \\
\exists y \forall x \neg\alpha(x,y) & (0) \\
| & \\
\forall x \neg\alpha(x,c_2) & \\
| & \\
\alpha(c_1,c_2) & (\mathrm{I}) \\
| & \\
\neg\alpha(c_1,c_2) & (\mathrm{III}) \\
| & \\
\emptyset &
\end{array}
$$

6. Példa. *Igazoljuk, hogy* $\alpha \to \beta \vDash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to \alpha \to \gamma$.

Azt kell csak igazolni, hogy a $\{\alpha \to \beta, \neg((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to \alpha \to \gamma)\}$ formulahalmaznak nincs modellje, tehát van zárt analitikus fája.

$$
\begin{array}{cccccr}
 & & \alpha \to \beta & & & \\
 & & \neg((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to \alpha \to \gamma) & & & \\
 & & | & & & \\
 & & \alpha \to (\beta \to \gamma) \wedge \neg(\alpha \to \gamma) & & & \\
 & & | & & & \\
 & & \alpha \to (\beta \to \gamma) & & & \\
 & & \neg(\alpha \to \gamma) & & & \\
 & & | & & & \\
 & & \alpha & & & \\
 & & \neg\gamma & & & \\
 & / & & \backslash & & \\
\neg\alpha & & & \beta \to \gamma & & (\mathrm{II}) \\
| & & / & & \backslash & \\
\emptyset & & \neg\beta & & \gamma & \\
 & / & & \backslash & | & \\
 & \neg\alpha & & \beta & \emptyset & (0) \\
 & | & & | & & \\
 & \emptyset & & \emptyset & &
\end{array}
$$

7. Példa. *Igazoljuk, hogy* $\forall x(\alpha(x)\to\beta(x))\models\forall x(\exists y(\alpha(x)\wedge\gamma(x,y))\to\exists y(\beta(x)\wedge\gamma(x,y)))$.

$$
\begin{array}{c}
\forall x(\alpha(x)\to\beta(x)) \\
\neg(\forall x(\exists y(\alpha(x)\wedge\gamma(x,y))\to\exists y(\beta(x)\wedge\gamma(x,y)))) \\
| \\
\exists x(\neg(\exists y(\alpha(x)\wedge\gamma(x,y))\to\exists y(\beta(x)\wedge\gamma(x,y)))) \\
| \\
\exists x(\exists y(\alpha(x)\wedge\gamma(x,y))\wedge\neg\exists y(\beta(x)\wedge\gamma(x,y))) \\
| \\
\exists y(\alpha(c_1)\wedge\gamma(c_1,y))\wedge\neg\exists y(\beta(c_1)\wedge\gamma(c_1,y)) \\
| \\
\exists y(\alpha(c_1)\wedge\gamma(c_1,y)) \\
\forall y(\neg\beta(c_1)\vee\neg\gamma(c_1,y)) \\
| \\
\alpha(c_1)\wedge\gamma(c_1,c_2) \\
| \\
\alpha(c_1) \\
\gamma(c_1,c_2) \\
| \\
\alpha(c_1)\to\beta(c_1) \qquad (0) \\
/ \qquad \backslash \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg\alpha(c_1) \\ | \\ \emptyset \end{array} &
\begin{array}{c} \beta(c_1) \\ | \\ \neg\beta(c_1)\vee\neg\gamma(c_1,c_2) \qquad (\mathrm{IV}) \\ / \qquad \backslash \\
\begin{array}{cc} \neg\beta(c_1) & \neg\gamma(c_1,c_2) \\ | & | \\ \emptyset & \emptyset \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

8. Példa. *Igazoljuk, hogy* $\forall x\exists y P(x,y)\models P(a,a)$ *nem teljesül!*

$$
\begin{array}{c}
\forall x\exists y P(x,y)\wedge\neg P(a,a) \\
| \\
\exists y P(a,y) \\
| \\
P(a,b_1) \\
| \\
\exists y P(b_1,y) \qquad (0) \\
| \\
P(b_1,b_2) \\
|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
| \\
\exists y\, P(b_2, y) \qquad (0) \\
\vdots
\end{array}
$$

Látszik, hogy az ág végtelen, nem zárt, lebontott, tehát $\forall x\, \exists y\, P(x, y) \wedge \neg P(a, a)$-nak van modellje, vagyis a következmény nem helyes.

9. Példa. *Formalizálja a következőket, majd analitikus fa segítségével igazolja a következtetés helyességét*: „Nincs olyan használtautó-kereskedő, aki családjának használt autót venne. Vannak olyan bátrak, akik családjuk számára használt autót vesznek. Tehát van olyan ember aki bátor, de nem használtautó-kereskedő.”

(A formalizáláshoz használhatjuk a K, A, B relációkat, amelyek jelentései rendre: „használtautó-kereskedő”, „használt autót vesz családjának”, „bátor”.)

A következtetés formalizálása:

$\{\neg\exists x\, (A(x) \wedge K(x)),\ \exists x\, (A(x) \wedge B(x))\} \vDash \exists x\, (B(x) \wedge \neg K(x))$

Az analitikus fa:

$$
\begin{array}{c}
\neg\exists x\, (A(x) \wedge K(x)) \\
\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \\
\neg\exists x\, (B(x) \wedge \neg K(x)) \\
| \\
A(a) \wedge B(a) \\
| \\
\forall x\, (\neg A(x) \vee \neg K(x)) \qquad (0) \\
/ \qquad \backslash \\
\begin{array}{cc}
\neg A(a) & \neg K(a) \\
| & | \\
\emptyset & \forall x\, (\neg B(x) \vee K(x)) \qquad (0) \\
 & \begin{array}{cc} / & \backslash \\ \neg B(a) & K(a) \\ | & | \\ \emptyset & \emptyset \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

10. Példa. *Igazoljuk, hogy a* $\{\forall x \forall y\, (P(x) \vee P(y)), \forall y\, (\neg P(f g a) \vee Q(y)), \forall y\, \neg Q(y)\}$ *formulahalmaznak nincs modellje!*

$$
\begin{array}{ccc}
 & \forall x \forall y (P(x) \vee P(y)) & \\
 & \forall y (\neg P(fga) \vee Q(y)) & \\
 & \forall y \neg Q(y) & \\
 & / \quad \backslash & \\
\neg P(fga) & & Q(a) \\
| & & | \\
P(fga) \vee P(fga) & & \neg Q(a) \\
| & & | \\
\emptyset & & \emptyset
\end{array}
\qquad (0)
$$

11. Példa. *Igazolja, hogy* $\forall x\, P(fx, x) \vDash \forall x \exists y\, P(y, fx)$*, ahol* f *egyváltozós függvényjel!*

$$
\begin{array}{c}
\forall x\, P(fx, x) \\
\neg \forall x \exists y\, P(y, fx) \\
| \\
\exists x \forall y \neg P(y, fx) \\
| \\
\forall y \neg P(y, fa) \\
| \\
\neg P(ffa, fa) \\
| \\
P(ffa, fa) \\
| \\
\emptyset
\end{array}
\qquad (0)
$$

3.3 Rezolúció

A jelen részben tárgyalt bizonyítási rendszer ismét egy cáfolati rendszer. Mindaz, amit az előző 3.2 rész bevezetésében a cáfolati rendszerekről elmondtunk, a *rezolúciós cáfolati rendszerre is érvényes*. Akárcsak az analitikus fáknál, a rezolúciónál is a cáfolati rendszer fő feladata az, hogy egy formulahalmaz *ellentmondástalanságát* bizonyításelméleti eszközökkel vizsgálja.

Ellentétben az analitikus fákkal, a rezolúciós *cáfolati* rendszer származtatható az úgynevezett rezolúciós *levezetési* rendszerből (úgy, ahogyan minden levezetési rendszerből cáfolati rendszer nyerhető), azonban mi a levezetési rendszertől *függetlenül* fogjuk a cáfolati rendszert bevezetni. A rezolúciót mint *levezetési rendszert* csak érintőlegesen fogjuk használni (3.3.4 rész), és a rezolúciót cáfolati rendszernek tekintjük, hacsak az ellenkezőjét nem említjük.

Egyetlen vonatkozásban ki kell egészíteni a rezolúciós rendszer esetén az előző rész elején a cáfolati rendszerekről általában elmondottakat. A rezolúciónál nem a vizsgálandó eredeti formulákból, hanem a formulák egy *normálalakjából*, az erős Skolem-formájukból indulunk ki. Tudjuk, hogy egy erős Skolem-forma azonosítható a magjában szereplő klózok véges halmazával. Az erős Skolem-formákat a hozzájuk tartozó véges *klózhalmazként* kezeljük.

Megállapodás szerint a rezolúciós kalkulusnál is csak *véges* formulahalmazokkal dolgozunk, de az eredmények, csakúgy, mint analitikus fáknál, a kompaktsági tétel értelmében *átvihetők tetszőleges formulahalmazra* is. Feltesszük, hogy az előforduló formulák zártak. A rezolúciós bizonyítási rendszerben csak klózokkal dolgozunk, szokták ezért a rezolúciót a „klózok logikájának” is nevezni.

Tudjuk, hogy a Skolem-normálformára hozási eljárás algoritmizálható. A cáfolati rendszerek két fő eleme, a levezetési szabályok és a cáfolhatóság fogalma közül a Skolem-normálformára hozás nyilván a levezetési szabályok elemnek felel meg. Azonban a normálformára hozást nem szokás a szorosabb értelemben vett rezolúciós rendszer részének tekinteni. Ezért a rezolúciós rendszer két fontos elemből, a *rezolúciós következtetési szabályból* és a *cáfolhatóság* fogalmából áll.

A rezolúciós eljárást több lépésben ismertetjük. Külön tárgyaljuk az állítás- és elsőrendű rezolúciót, ezt az is indokolja, hogy az elsőrendű rezolúciós technika lényege az állításesetre történő visszavezetés („lifting”). A rezolúció tárgyalásakor igyekszünk azt a vonulatot bemutatni, amelyik az általános rezolúciós kalkulustól (például a klózok „szabad generálása”) egészen a szigorúan kötött rezolúciós rendszerekig és a számítógépes implementálhatóságig vezet (például SLD-rezolúció változatai).

3.3.1 Állításrezolúció

Tekintsünk egy szokásos állításnyelvet. Tartalmazza most a nyelv a *hamis* (**F**) állításkonstanst, amelyet itt *üres klóznak* nevezünk, jelölése $\Box$. $\Box$ minden értékelésre hamis. Tekintsük a C_1 és C_2 állításklózokat, és tegyük fel, hogy a C_1 klóz $L \vee E$, a C_2 klóz pedig $\neg L \vee F$ alakú, ahol L tetszőleges állításkonstans, E és F tetszőleges klózok (másképpen: *C_1-ben és C_2-ben előfordulnak olyan literálok, amelyek egymás negáltjai)*. Definiáljuk a rezolúciós rendszer egyetlen és névadó következtetési szabályát, a rezolvensképzést:

1. Definíció. A $C_1 = L \vee E$ és $C_2 = \neg L \vee F$ állításklózoknak az $E \vee F$ klóz az L állításkonstans szerinti *rezolvense* (jelölés: $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ vagy $\mathrm{Res}_L(C_1, C_2)$). Speciálisan: $\mathrm{Res}(L, \neg L) = \Box$.

A rezolvensképzésnek mint levezetési szabálynak a helyességét a 2.2.1-beli 2. Tétel támasztja alá, amelyből következik, hogy $\{C_1, C_2\} \vDash \mathrm{Res}(C_1, C_2)$. Ez úgy is fogalmazható, hogy a $\{C_1, C_2\}$ és $\{C_1, C_2, \mathrm{Res}(C_1, C_2)\}$ klózhalmazok kielégíthetősége *ekvivalens*. Megjegyezzük, hogy speciálisan $\{L, \neg L\} \vDash \Box$ $(= \mathrm{Res}(L, \neg L))$.
Vegyük észre, hogy a **modus ponens a rezolúciós következtetési szabály speciális esete**, ugyanis L-ből és $\neg L \vee F$-ből (azaz $L \to F$-ből) rezolvensképzéssel is következik F.

Legyen Λ állításklózok egy halmaza.

2. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a Λ klózhalmaz *rezolúcióval cáfolható*, ha van klózoknak olyan véges C_1, $C_2, \ldots C_n = \Box$ sorozata, hogy minden $1 \leq i \leq n$-re vagy $C_i \in \Lambda$, vagy C_i valamely, a sorozatban őt megelőző két klózból rezolvensképzéssel nyerhető.

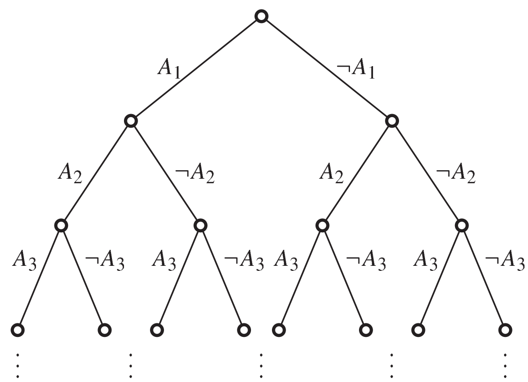
Megjegyezzük, hogy hasonlóan definiálható az üres klóz helyett tetszőleges C_n klóz levezetése is. Erre a későbbiekben majd visszatérünk.

Legyen Λ állításklózok egy véges halmaza.

3. Tétel. (Állításrezolúció teljességi tétele.) Λ *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha Λ *cáfolható* állításrezolúcióval.

A bizonyításhoz szükségünk van néhány fogalomra és elnevezésre. Használni fogjuk a fa fogalmát (és a fákra az előző, 3.2.1 részben bevezetett terminológiákat), de hangsúlyozzuk, hogy a fafogalom mostani alkalmazásának csak távoli köze van az ottani alkalmazáshoz.

Az $A_1, A_2, \ldots A_n$ állításkonstansok *teljes szemantikus fáján* egy olyan gyökérrel, $n+1$ szinttel rendelkező irányított fát értünk, amelynél minden csúcsból két él indul, és amelynél az egyes csúcsokat összekötő élekhez az A_i vagy $\neg A_i$ literálokat rendeljük oly módon, hogy a gyökérből vezető egyik élhez A_1-et, a másikhoz $\neg A_1$-et, és általában, a k-adik szinten található csúcsokból induló egyik élhez A_{k+1}-et a másik élhez $\neg A_{k+1}$-et rendeljük.



A teljes szemantikus fa nyilván alkalmas arra, hogy az $A_1, A_2, \ldots A_n$ állításkonstansok összes lehetséges értékeléseit leolvassuk a levelekhez vezető ágakról olyan módon, hogy adott levélnél az A_i értékelését igaznak tekintjük, ha a levélhez vezető ágon A_i (negálatlanul) szerepel, és hamisnak tekintjük, ha az ágon $\neg A_i$ szerepel. Hasonlóan, a csúcsokhoz vezető ágakról le tudjuk olvasni az állításkonstansoknak egy csúcshoz tartozó részleges értékelését. Ezt a csúcshoz tartozó *természetes* értékelésnek nevezzük.

Legyen Λ rögzített, véges klózhalmaz. *Klózhalmaz* teljes szemantikus fája a klózokban szereplő összes állításkonstans teljes szemantikus fája. Ha a teljes szemantikus fából elhagyunk bizonyos csúcsoktól a levelekig vezető ágakat, akkor egyszerűen csak *szemantikus fáról* beszélünk.

Akkor mondjuk, hogy egy adott *K klóz illeszthető egy csúcsra* (másképpen: illeszthető a csúcshoz vezető ágra), ha a csúcshoz tartozó természetes értékelés hamissá teszi a klózt. A Λ *klózhalmaz* illeszthető egy csúcsra, ha benne *valamelyik* klóz illeszthető rá. Tehát, ha egy klóz illeszthető egy csúcsra, akkor nyilván minden diszjunkciós literálja *negációjának* szerepelni kell a csúcshoz vezető élek valamelyikén. Adott klóz nyilván több csúcsra is lehet illeszthető.

Egy adott csúcs *cáfoló csúcs* (másképpen: a Λ *klózhalmazhoz tartozó cáfoló csúcs*), ha *van* hozzá olyan Λ-beli klóz, amely egyrészt a csúcsra illeszthető, másrészt a csúcsot megelőző csúcshoz nem található olyan Λ-beli klóz, amely rá illeszthető. Másképpen: egy csúcs cáfoló csúcs, hogy ha azon az ágon a gyökérhez legközelebb eső csúcs, amelyre a Λ klózhalmaz illeszthető. Egy csúcs *döntési csúcs*, ha (közvetlenül) két cáfoló csúcs követi.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy Λ kielégíthetetlen. Készítsük el a Λ klózhalmazban tartalmazott A_1, $A_2, \dots A_n$ állításkonstansok teljes szemantikus fáját. A feltétel szerint minden ágon illeszthető valamely csúcsra Λ-beli klóz. Ezért minden ágon található cáfoló csúcs is.

Azt állítjuk, hogy *létezik* a fában döntési csúcs. Indirekt, tegyük fel, hogy nem létezik. Tekintsünk egy tetszőleges b cáfoló csúcsot, és legyen c a b-t megelőző csúcs. Mivel b cáfoló csúcs, ezért Λ b-re illeszthető, de c-re nem. Ekkor a b csúccsal párban álló a csúcs, azaz ugyanazt a c csúcsot követő csúcs nem lehet cáfoló csúcs, mert akkor c döntési csúcs lenne. Λ nem illeszthető a-ra, mert ha illeszthető lenne, akkor a cáfoló csúcs lenne, mivel Λ c-re nem illeszthető. Ezután tekintsük az a csúcsot követő két csúcsot. Hasonlóan az előbbiekhez, a két csúcs egyike, például d nem lehet cáfoló csúcs, hiszen akkor a döntési csúcs lenne. Mivel a-ra nem illeszthető Λ, és d nem cáfoló csúcs, ezért Λ a d csúcsra sem illeszthető. Ismételve ezeket a lépéseket, el kell jutnunk valamelyik levélig, amelyik nem lehet cáfoló csúcs, és Λ sem illeszthető rá, ellentmondásban azzal, hogy Λ nem kielégíthető.

Válasszuk ki tehát például a c döntési csúcsot, és tegyük fel, hogy az őt követő két csúcs rendre a és b, és a c-ből vezető éleken az L és $\neg L$ literálok szerepelnek, továbbá a-ra illeszthető például a K_1, b-re illeszthető például a K_2 klóz.

Ekkor *egyrészt* képezzük L szerint a K_1 és K_2 klózok rezolvensét, M^1-et, és helyettesítsük K_1-et és K_2-t Λ-ban M^1-gyel, jelölje az így kapott klózhalmazt Λ_1. *Másrészt* módosítsuk a fát úgy, hogy hagyjuk el a c-től a levelekig vezető ágakat, tehát c lépjen elő levéllé az új fában.

Λ_1 *sem kielégíthető*, hiszen például K_1 illeszthető volt a-ra, valamint a cáfoló csúcs, K_1 egy diszjunkció, ezért az *L-től megfosztott része* illeszthető c-re. Hasonló igaz K_2 és $\neg L$-re is, ezért $M^1 = \mathrm{Res}(K_1, K_2)$ is illeszthető c-re, tehát az új (nem teljes szemantikus) fára és a Λ_1 klózhalmazra is igaz, hogy minden ágon illeszthető valamely csúcsra Λ_1-beli klóz.

Ezután ismételjük a fenti eljárást az új fára, tehát keressünk a fában egy döntési csúcsot. Képezzük a megfelelő K_3 és K_4 klózok M^2 rezolvensét, és hagyjuk el a döntési csúcsból induló ágakat úgy, hogy az új fában e döntési csúcs levél legyen, és készítsük el Λ_1-ből a kielégíthetetlen Λ_2 klózhalmazt, és így tovább.

Mivel a csúcsok és a döntési csúcsok száma minden lépésnél csökken, el kell jutnunk oda egy k-adik lépésben, hogy egyetlen döntési csúcs és két cáfoló csúcs marad, a gyökér és az őt követő két csúcs. Az ezt követő, azaz utolsó lépésnél már az üres klózt kapjuk. Vegyük észre, hogy K_1, K_2, M^1, K_3, K_4, $M^2, \dots M^k = \square$ az üres klóznak egy levezetése. Az állítás ezzel bizonyított.

Ezután tegyük fel, hogy Λ cáfolható állításrezolúcióval. Azt állítjuk először, hogy ha B_i egy levezetés tetszőleges formulája, akkor $\Lambda \models B_i$. Ha $i = 1$, akkor ez nyilvánvaló, hiszen $B_1 \in \Lambda$. Tegyük fel, hogy $i \leq k$-ra $\Lambda \models B_k$ igaz. B_{k+1}-re vagy $B_{k+1} \in \Lambda$, ekkor készen vagyunk, vagy B_{k+1} rezolvensképzéssel adódik B_j-ből és B_l-ből, j, $l < k$.

Ha $\Lambda \vDash B_j$ és $\Lambda \vDash B_l$, akkor a 2.2.1 rész 2. Tételének relativizált módosítása szerint $\Lambda \vDash B_{k+1}$.
Állításunk és a feltétel szerint tehát $\Lambda \vDash \Box$.
Ha $\Box \in \Lambda$, akkor $\Box$ szemantikai értelmezése szerint Λ kielégíthetetlen. Ha $\Box$-t rezolvensképzéssel kapjuk a bizonyításban, például L és $\neg L$-ből, akkor ez utóbbiakra is igaz, hogy $\Lambda \vDash L$ és $\Lambda \vDash \neg L$, tehát Λ szintén kielégíthetetlen.

■

A 3. Tétel negált alakja: *Λ-nak van modellje akkor és csak akkor, ha Λ nem cáfolható állításrezolúcióval*.

A teljességi tételnek létezik egy másik, szemléletes változata, ennek kimondásához szükség van néhány új fogalomra.

Legyen Λ klózok egy tetszőleges halmaza. Legyen

$$\mathrm{Res}(\Lambda) = \Lambda \cup \{R\colon\ R = \mathrm{Res}(C_1, C_2),\ C_1,\ C_2 \in \Lambda\}, \tag{1}$$

ahol a zárójelben csak azon C_1, C_2 klózokra képezzük a rezolvenst, ahol az értelmes valamely literálra.

Indukcióval definiáljuk a $\mathrm{Res}^*(\Lambda)$ halmazt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}^0(\Lambda) = \Lambda \\ &\mathrm{Res}^{n+1}(\Lambda) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(\Lambda)),\ \ (0 \leq n) \\ &\mathrm{Res}^*(\Lambda) = \textstyle\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Res}^n(\Lambda) \end{aligned} \tag{2}$$

Ha Λ véges, akkor valamely n-től $\mathrm{Res}^n(\Lambda) = \mathrm{Res}^{n+1}(\Lambda) = \ldots = \mathrm{Res}^*(\Lambda)$. Ugyanis $\mathrm{Res}^n(\Lambda) \subseteq \mathrm{Res}^{n+1}(\Lambda) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Res}^*(\Lambda)$ mindig igaz, továbbá $\mathrm{Res}^n(\Lambda)$-ban legfeljebb azok a literálok fordulnak elő, amelyek Λ-ban is, viszont ezen véges sok literálból legfeljebb véges sok klóz alkotható, vagyis valamely n-től $\mathrm{Res}^n(\Lambda) = \mathrm{Res}^{n+1}(\Lambda)$.

Indukcióval igazolható, hogy a Λ és a $\mathrm{Res}^*(\Lambda)$ formulahalmazok *kielégíthetősége ekvivalens* (a két klóz esetéhez hasonlóan, ahol kételemű klózhalmazt bővítettünk a rezolvensükkel).

A következő tétel véges klózhalmazra ekvivalens a 3. teljességi tétellel. Legyen Λ állításklózok egy halmaza. Könnyű igazolni a következőt:

4. Tétel. Λ *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha $\Box \in \mathrm{Res}^*(\Lambda)$.

A későbbiekben hatékony eljárást kívánunk készíteni arra, hogy $\Box \in \mathrm{Res}^*(\Lambda)$ teljesül-e.

1. Példa. *Van-e modellje a következő klózhalmaznak:* $\{P, \neg P \vee Q, \neg R, \neg P \vee \neg Q \vee R\}$?

A levezetés:

$$\begin{array}{llll}
P & & R & \Box \\
\neg P \vee Q & \neg P \vee R & & \\
\neg R & & & \\
\neg P \vee \neg Q \vee R & & &
\end{array}$$

Levezethető az üres klóz, ezért a klózhalmaznak nincs modellje.

2. Példa. *Van-e modellje a következő klózhalmaznak:* $\{\neg P, P \vee Q, \neg Q \vee R\}$*?*

Van modellje, hiszen az üres klóz nem vezethető le.

$$\begin{array}{llll}
\neg P & Q & & R \\
P \vee Q & & P \vee R & \\
\neg P \vee R & & &
\end{array}$$

3. Példa. *Igazoljuk rezolúció felhasználásával!*

$$P \wedge Q \to R \vDash P \to Q \to R$$

Elég megmutatni, hogy a $\{P \wedge Q \to R, \neg(P \to Q \to R)\}$ formulahalmaznak nincs modellje.

Keressük először a normálformákat:

$P \wedge Q \to R$ ekvivalens $\neg(P \wedge Q) \vee R$-rel, ez pedig $\neg P \vee \neg Q \vee R$-rel.

$\neg(P \to Q \to R)$ ekvivalens $P \wedge Q \wedge \neg R$-rel.

Ezért a normálformákhoz tartozó Σ klózhalmaz:

$\{\neg P \vee \neg Q \vee R, P, Q, \neg R\}$.

Igazoljuk, hogy az üres klóz levezethető:

$$\begin{array}{llll}
\neg P \vee \neg Q \vee R & \neg Q \vee R & R & \Box \\
P & & & \\
Q & & & \\
\neg R & & &
\end{array}$$

4. Példa. „A, B, C és D négy vádlott. Ha A bűnös, akkor B is bűnös. Ha B bűnös, akkor C vagy D ártatlan. Ha D ártatlan, akkor A bűnös, és C ártatlan. Ha D bűnös, akkor A is bűnös.” *Mutassuk meg rezolúcióval, hogy A és B bűnös, C pedig ártatlan!*

Jelentse A, B, C és D most rendre azt, hogy A, B, C és D bűnös. Formalizálva a feltételeket, a következőket kapjuk:

$A \to B$, $B \to \neg C \vee \neg D$, $\neg D \to A \wedge \neg C$, $D \to A$.

Ezen állítások normálformái rendre:

$\neg A \vee B$, $\neg B \vee \neg C \vee \neg D$, $(D \vee A) \wedge (D \vee \neg C)$, $\neg D \vee A$.

A rezolúciós levezetés ekkor a következőképpen kezdődik:

$$\begin{array}{llll}
\neg A \lor B & B & \neg C \lor \neg D & \neg C \\
\neg B \lor \neg C \lor \neg D & & & \\
D \lor A & A & & \\
D \lor \neg C & & & \\
\neg D \lor A & & &
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy ha a premisszákhoz egyenként hozzávesszük a bizonyítandók negáltjait, tehát $\neg A$-t, $\neg B$-t, illetve C-t, akkor rendre megkaphatjuk az üres klózt.

* * *

A fenti példák alapján már látható, hogy a rezolúciós levezetés *jelölése* a következőképpen történik.
Egymás alá írjuk a kiindulásul vett klózokat, majd a rezolvált klózokat lépésenként szögletes zárójellel kötjük össze úgy, hogy a rezolvens klózt a szögletes zárójel után, az első komponens sorában tüntetjük fel.
Természetesen elképzelhető, hogy egy klózt többször felhasználunk a levezetés során, valamint elképzelhető az is, hogy egy sorban több klóz szerepel egyszerre. Utóbbi esetben kézi számolásnál nem szoktuk feltüntetni, hogy melyik az a klóz, amellyel éppen rezolválunk, tehát a szögletes zárójelek segítségével *csak a sort* jelöljük meg, amelyben a komponensklóz szerepel (ez a jelölés nyilván finomítható úgy, hogy a szögletes zárójeleket alkalmasan meghosszabbítjuk a rezolválandó klózokig).

3.3.2 Alaprezolúció, helyettesítéses rezolúció

Legyen Λ elsőrendű klózok halmaza. Feltesszük, hogy a nyelv *egyenlőséget nem tartalmaz.* Most is feltesszük, hogy a nyelv tartalmazza az $\square$ üres klózt. Vizsgálandó Λ „ellentmondásossága” a szintaktikai értelemben, másképpen: Λ „cáfolhatósága”.

Az elsőrendű rezolúció esetén az egyik alapötlet a *visszavezetés* (*redukció*) az állításrezolúcióra. A 2.4.2 részben említettük a szemantikai feladat, azaz Λ kielégíthetősége visszavezetésének egyik technikáját, a Davis–Putnam-módszert, és annak változatát, a helyettesítés módszerét. Jelen részben ezeket a technikákat fogjuk alkalmazni a rezolúció esetére, felhasználva az állításrezolúció teljességi tételét, valamint a Herbrand-tétel b) változatát (2.4.2 rész 8. Tétel).

A továbbiakban **elsőrendű klózhalmaz lezártján az egyes klózok univerzális lezártjaiból képezett formulahalmazt értjük** (lásd még 2.4.2). Felhasználjuk a 2.4.2-ben ismertetett fogalmakat, például klózhalmaz alapelőfordulásai és kielégíthetőségük az állításlogikában stb.

A *Davis–Putnam-módszer* alkalmazása a Λ klózhalmaz lezártja kielégíthetetlensége vizsgálatára, megszámlálható nyelv esetére a következőből áll: tekintjük a Λ klózhalmazhoz tartozó alapelőfordulások halmazát, sorozatba rendezzük e halmazt, és vizsgáljuk a sorozat b_n szeleteit ($n = 1,\ 2\ldots$), mint állításklózok véges halmazait, a cáfolhatóság szempontjából.

Amikor az elsőrendű formulák cáfolhatóságának vizsgálatát a klózok alapelőfordulásainak generálásával és állításrezolúcióval végezzük, akkor ezt az eljárást *alaprezolúciónak* nevezzük.

A Herbrand-tétel b) változata és az állításrezolúció teljességi tétele szerint igaz a következő teljességi tétel:

5. Tétel. (Alaprezolúció teljességi tétele.)

> A véges Λ klózhalmaz lezárása *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha a Λ alapelőfordulásainak b_n ($n = 1,\ 2,\ldots$) sorozatához van olyan k, hogy a $\{b_1 \ldots b_k\}$ klózhalmaz *cáfolható állításrezolúcióval*.

Λ alapelőfordulásainak halmaza általában végtelen elemű, ezek „végigpróbálására” nincs lehetőség. Az alaprezolúciós eljárás alkalmazásának (akárcsak a Herbrand-tétel alkalmazásának) az a nehézsége, hogy Λ alapelőfordulásainak *összességéből* hogyan válasszuk ki azt a véges sokat, amelyek kielégíthetetlenségét Λ kielégíthetetlensége esetén a Herbrand-tétel garantálja. Erre a kiválasztásra ugyanis *nincs* döntési eljárás. Ha Λ kielégíthetetlen, akkor valamelyik kezdőszelet is kielégíthetetlen, és ezt a szeletet véges sok lépésben meg is találjuk. De ha Λ kielégíthető, akkor szükség lenne az alapelőfordulások „végigpróbálására”.

* * *

Ezután rátérünk az úgynevezett *helyettesítéses rezolúció* ismertetésére. A helyettesítéses rezolúció azt célozza, hogy hogyan kerülhető el a Herbrand-univerzum elemeinek generálása és a klózok alapelőfordulásainak egyenkénti kipróbálása. Erre használjuk az individuumváltozókat.

Az alapgondolat az, hogy a szabad változó nélküli termek generálásának művelete (a Herbrand-univerzum elemeinek generálása), valamint a rezolvensképzés művelete *szabad változókat* tartalmazó formulákra is kiterjeszthető. Így tulajdonképpen *sémákkal* dolgozunk, és egyetlen lépésben összefoglalható az alaprezolúció végtelen sok lépése.

Tekintsük a C_1 és C_2 *elsőrendű klózokat*, és tegyük fel, hogy a C_1 klóz $L \vee E$, a C_2 klóz pedig $\neg L \vee F$ alakú, ahol L tetszőleges atomi formula, E és F *elsőrendű klózok*. Definiáljuk a helyettesítéses rezolúció egyik következtetési szabályát, az elsőrendű rezolvensképzést:

6. Definíció. A $C_1 = L \vee E$ és $C_2 = \neg L \vee F$ elsőrendű klózokból az $E \vee F$ klóz az L atomi formula szerinti *rezolvensképzéssel következik* (azt mondjuk, hogy $E \vee F$ a C_1 és C_2 elsőrendű klózoknak az L szerinti rezolvense, jelölés: $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ vagy $\mathrm{Res}_L(C_1, C_2)$).

Elsőrendű esetben a $\Box$ üres klóz definíciója hasonló az állításesetben definiálthoz.

7. Definíció. (Helyettesítéses rezolúció következtetési szabályai.)

(i) elsőrendű klózok *rezolvensképzése* (elsőrendű rezolvensképzés),

(ii) *helyettesítés* (azaz individuumváltozó helyettesítése individuumváltozóval vagy olyan termmel, amelyben a helyettesítendő individuumváltozó nem fordul elő).

Megjegyezzük, hogy az *elsőrendű rezolvensképzési szabálynak szemantikai háttere* a

$$\forall(\,(L \vee E) \wedge (\neg L \vee F)) \vDash \forall(E \vee F) \tag{3}$$

összefüggés, ahol $\forall$ univerzális lezártat jelent, és amely a 2.2.1 rész 2. Tételnek nyilvánvaló következménye. Másképpen:

$$\{\forall(L \vee E),\, \forall(\neg L \vee F)\} \vDash \forall(E \vee F)$$

A helyettesítési szabály szemantikai háttere pedig a

$$\forall C \vDash \forall \widetilde{C} \tag{4}$$

következmény, ahol a $\widetilde{C}$ klóz a C klóz tetszőleges helyettesítése.

Legyen Λ elsőrendű klózok egy halmaza.

8. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a Λ klózhalmaz *helyettesítéses rezolúcióval cáfolható*, ha van elsőrendű klózoknak egy olyan $C_1,\ C_2, \ldots C_n = \Box$ véges sorozata, hogy minden $1 \leq i \leq n$-re vagy $C_i \in \Lambda$, vagy C_i helyettesítéssel származik valamelyik, a sorozatban őt megelőző klózból, vagy elsőrendű rezolúcióval származik valamely, két őt megelőző klózból.

A következő teljességi tétel mutatja, hogy a definiált cáfolhatóság fogalma használható és értelmes.

9. Tétel. (Helyettesítéses rezolúció teljességi tétele.)

A Λ klózhalmaz lezártja *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha Λ helyettesítéses rezolúcióval *cáfolható*.

Bizonyítás.
A tétel teljességi része az alaprezolúció teljességi tételének nyilvánvaló következménye. Ugyanis, ha Λ kielégíthetetlen, akkor Λ alaprezolúcióval cáfolható, ezért helyettesítéses rezolúcióval is cáfolható. A fordított irányú állítás következménye a (3) és (4) összefüggéseknek. Ugyanis ezekből és abból, hogy $\Box$-nek létezik egy $C_1,\ C_2 \ldots$

$C_n = \square$ levezetése, indukcióval következik, hogy $\Lambda \models \square$. Utóbbi ellentmond annak, hogy Λ-nak van modellje.

■

Vegyük észre, hogy a nyelvnek végtelen sok szabad változós termje van, ezért az elsőrendű esetben nem biztos, hogy a rezolúciós eljárás véget ér, szemben az állítás-rezolúcióval, hiszen noha Λ véges, a termekkel generálás miatt valójában nem véges, hanem *végtelen* formulahalmazzal dolgozunk.

Ezután két példát mutatunk.

5. Példa. *Igazoljuk, hogy a* $\{\forall x\, Px, \forall y(\neg Py \vee Qfy), \forall x \neg Qx\}$ *formulahalmaz cáfolható.*

Már az erős Skolem-formák adottak. Ekkor a formulákhoz tartozó K_1, K_2, K_3 klózok rendre: Px, $\neg Py \vee Qfy$, $\neg Qz$.
Itt már „szeparáltuk” a változókat, azaz a különböző klózokhoz tartozó változókat másképpen jelöltük.
A levezetés lépései:
a) K_1-ben x/y-t helyettesítünk
b) rezolváljuk K_2-vel, az eredmény: Qfy
c) K_3-ban z/fy-t helyettesítünk
d) rezolválunk Qfy-nal
e) az eredmény az üres klóz

A levezetést így szemléltetjük:

$$\begin{array}{lll} Px & \rceil\; Qfy & \rceil\; \square \\ \neg Py \vee Qfy & \rfloor_{x/y} & \\ \neg Qz & & \rfloor_{z/fy} \end{array}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti formális levezetés mögött a következő szemantikai megfontolás áll:
a) $\forall x\, Px \models \forall y\, Py$
b) $\forall y\, Py \wedge \forall y(\neg Py \vee Qfy) \models \forall y\, Qfy$
c) $\forall z \neg Qz \models \forall y \neg Qfy$
d) $\forall y\, Qfy \wedge \forall y \neg Qfy \models \forall(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (lehetetlen)

6. Példa. *Mutassuk meg, hogy a* $\{Px \vee Pfy, \neg Pfga \vee Qy, \neg Qy\}$ *klózhalmaz cáfolható.*

„Szeparálva” a változókat, ezt kapjuk: $Px \vee Pfy$, $\neg Pfga \vee Qz$, $\neg Qu$.
a) „Azonosítsuk” először az első klózban P argumentumait: x/fy-t helyettesítve a Pfy klózt kapjuk.
b) A kapott klózra az y/ga helyettesítést alkalmazzuk.
c) Rezolváljunk a második klózzal. Ekkor Qz-t kapjuk.
d) Qz-ben z/u helyettesítést alkalmazunk.

e) Rezolváljuk a $\neg Qu$ klózzal, az üres klózt kapjuk.

A levezetést így szemléltethetjük:

$$\begin{array}{lll}
Px \vee Pfy\,\big]_{x/fy} & Pfy \;\Big]_{y/ga}\; Qz & \Big]_{z/u}\; \Box \\
\neg Pfga \vee Qz & & \\
\neg Qy & &
\end{array}$$

* * *

A fenti példákat tanulmányozva vegyük észre, hogy a helyettesítéses rezolúció *három okból is összetettebb az állításrezolúciónál*.

a) *Az első ok az, hogy* az L atomi formula, amely szerint rezolválunk, argumentumokkal is rendelkezik, tehát nem elegendő, hogy az L relációjel negáltja szerepeljen a másik klózban, hanem az argumentumoknak is egyezni kell. Ha ez utóbbi nem teljesül, akkor megpróbáljuk helyettesítések alkalmazásával elérni, hogy ugyanazon argumentumok szerepeljenek, mégpedig úgy, hogy a helyettesítésekkel minél kevésbé korlátozzuk az általánosságot.

   Ezt a célt szolgálták például az 1. Példában alkalmazott helyettesítések. Azonban az argumentumokat nem mindig lehet azonosítani. Például ha a $P0$ és $\neg Pfx$ klózokat kísérelnénk meg rezolválni, akkor nem alkalmazhatjuk azt, hogy $fx/0$, mert ez nem helyettesítés.

b) *Másodszor*, az is lehetséges, hogy egy klózon *belül* például egy L reláció többször is előfordul, de különböző argumentumokkal; és egy másik klózban $\neg L$ fordul többször elő, szintén különböző argumentumokkal. Ekkor felvetődik a kérdés, hogy a két klóz rezolválásához mely argumentumokat próbáljuk meg azonosítani a több előforduló argumentum közül.

   Ilyenkor a teendő az, hogy a két klózban nemcsak a kiszemelt L és $\neg L$ relációjeleket tartalmazó literálpár argumentumait próbáljuk meg azonosítani, hanem minél több L-et és $\neg L$-et tartalmazó literál argumentumait, mégpedig megint olyan helyettesítések alkalmazásával, hogy az minél kevésbé menjen az általánosság rovására (úgynevezett „legáltalánosabb illesztő helyettesítéssel”, lásd alább). Általában az azonosításokra sok lehetőség van. Ez az eljárás általánosítása az a)-belinek.

c) *Harmadszor*, a helyettesítés egyik fontos alkalmazása, hogy a szereplő klózokban „*szeparáljuk*” az individuumváltozókat, tehát az egyes klózokban szereplő individuumváltozó-halmazokat páronként diszjunkttá tesszük. Ezzel kizárjuk azt, hogy valójában különböző dolgokat ugyanúgy jelöljünk.

Ezután rátérünk az elsőrendű rezolúciónak az algoritmizálhatósághoz közelibb változatára, amelyet egyszerűen csak *rezolúciónak* (vagy elsőrendű rezolúciónak) hívunk.

3.3.3 Elsőrendű rezolúció

A helyettesítéses rezolúció (amely tehát az elsőrendű rezolvensképzést és -helyettesítést mint következtetési szabályokat alkalmazza) túlságosan *laza keret* a hatékony bizonyítás kereséshez. Az eljárás további finomítására, elemzésére van szükség. *Bizonyos helyettesítéssorozatok ugyanis egységbe foglalhatók* a következők szerint:

Az előző rész végén felsorolt a) és b) szituációnál is olyan *helyettesítéssorozatra* van szükség, amelynek eredményeként, ugyanazon relációjellel, de esetleg különböző argumentumokkal rendelkező véges sok (n) atomi formula ugyanabba a formulába megy át (az egyszerűbb a) szituációban is erre van szükség $n = 2$-re, amikor L-ből és $\neg L$-ből magának L-nek esetleges különböző argumentumait azonosítjuk).

Az is célunk, hogy az eljárásnál az általánosságot ne korlátozzuk, hogy a végeredmény *a legáltalánosabb helyettesítés* legyen, tehát e helyettesítésből minden más helyettesítés *„rekonstruálható”* legyen. Ugyanis figyeljük meg, hogy egy „azonosító” helyettesítésből esetleg végtelen sok más „azonosító” helyettesítés származtatható. Például a 6. Példabeli x/fy helyettesítésből „azonosító” helyettesítést kapunk, hogy ha y helyébe bármely termet írunk, például y/a-t, tehát x/fa is „azonosító” helyettesítés. De amíg x/fy-ból újabb helyettesítésekkel végtelen sok másik azonosító helyettesítést nyerhetünk, sőt az összeset is, addig x/fa-ból egyet sem. Ennek oka többek között az, hogy a *helyettesítés nem invertálható művelet*. Az is nyilvánvaló, hogy a helyettesítések egymás után alkalmazása, azaz *komponálása*, szintén helyettesítést ad eredményül, a kompozíció azonban nem kommutatív. *Az „azonosítást” a továbbiakban illesztésnek (vagy unifikációnak) fogjuk nevezni.*

10. Definíció. Azonos relációjelet (de esetleg különböző argumentumokat) tartalmazó n darab atomi formula egymáshoz *illeszthető (unifikálható)*, ha létezik helyettesítések egy olyan véges *sorozata*, hogy egymás után alkalmazásuk (kompozíciójuk) egy olyan helyettesítés, melynek eredményeként mindegyik szóban forgó atomi formula ugyanabba az atomi formulába megy át. Ez utóbbi atomi formulát az illesztés *eredőjének* nevezzük. Az illesztés a *legáltalánosabb*, ha bármely más illesztés eredménye megkapható belőle, alkalmas helyettesítéssorozat kompozíciójának eredményeként.

Az illesztést *általánosan* tehát az előző rész végén szereplő b) szituációban alkalmazzuk az L-et tartalmazó bizonyos atomi formulákra. Megjegyezzük, hogy ha az illesztést *egy klózon belül*, bizonyos azonos relációjelet tartalmazó atomi formulákra alkalmazzuk, akkor az illesztést *faktorizációnak* nevezzük.

A következő eljárás egy **algoritmus** n **darab, például prefix alakban felírt atomi formula illesztésére** *(Robinson-féle algoritmus)*:

Először sorozatba rendezzük a formulákat, és alkalmazzuk az alábbi eljárást az első és második formulára, majd az így nyert illesztett formulára és a harmadik formulára, és így tovább.

Két formula illesztése:

A két formula argumentumaiban balról jobbra, rendre, szimbólumonként haladva megkeressük az első olyan szimbólumpárt, amelyeknek tagjai a formulákban nem egyeznek meg. Ha nincs ilyen pár, akkor az illesztés sikeresen befejeződött.
Ha van ilyen pár, akkor két eset van:

(1) Egyik szimbólum sem individuumváltozó. Ekkor nem lehetséges az illesztés.

(2) Az egyik individuumváltozó, és jele például x, a másik pedig egy term, jele: t. Ha a t termjelhez tartozó kifejezésben szerepel x, akkor nem lehetséges az illesztés. Ha nem szerepel, akkor alkalmazzuk az x/t helyettesítést mindkét formulában. Ha t speciálisan individuumváltozó, akkor a *második* formulában szereplő változót helyettesítjük az *első* formulába. Ezután megismételjük az első lépést, azaz megkeressük a két új atomi formula argumentumaiban az első nem megegyező szimbólumpárt, és a már leírtak szerint járunk el.

Ha a két formula illeszthető, akkor az *illesztő helyettesítést* a lépésenkénti helyettesítések kompozíciója adja.

11. Tétel. (Robinson-tétel.) A fenti, véges sok atomi formula illesztésére ismertetett algoritmus véges sok lépésben véget ér. Ha van illesztés, akkor megadja a legáltalánosabb illesztést, ha pedig nincs illesztés, akkor az eljárás ezt jelzi.

A tételt nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy elsősorban az igazolandó, hogy az algoritmus által szolgáltatott illesztő helyettesítés a *legáltalánosabb*. Megjegyezzük, hogy az illesztési eljárás alkalmas arra, hogy bizonyos értelemben pótolja a nyelvben az egyenlőséget, pontosabban a nemegyenlőség ellenőrzésére szolgál. Az eljárás segítségével ugyanis meg tudjuk állapítani két termről, hogy jelölhetik-e ugyanazt az elemet egy modellen, vagy sem.

Az illesztésen kívül szükségünk van még egy további *helyettesítéssorozat* egységbe foglalásához, ez a lépés bizonyos értelemben ellentéte az illesztésnek:

12. Definíció. Azt a helyettesítéssorozatot, amelynek eredménye, két adott klóz esetén, a klózokban szereplő két individuumváltozó-halmaz diszjunkttá tétele, a klózok változói *szeparálásának* nevezzük.

Ezután definiáljuk két elsőrendű klóz *összetett rezolvensének* fogalmát. Ez lesz az elsőrendű rezolúció egyetlen következtetési szabálya.

13. Definíció. A C_1 és C_2 elsőrendű klózokból egy C klóz *összetett rezolvensképzéssel* következik, amennyiben C a C_1 és C_2 klózok szeparálása, a klózokban szereplő bizonyos adott atomi formulák egy legáltalánosabb illesztése, majd az illesztés eredménye szerinti közönséges rezolválás eredményeként adódik (jelölés $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$).

Tehát legyen például C_1 és C_2 két elsőrendű klóz. Szeparáljuk C_1 és C_2 individuumváltozóit. Tegyük fel, hogy C_1-ben szerepel egy olyan Lt, C_2-ben pedig egy olyan $\neg Ls$ alakú literál (ahol az Lt és Ls atomi formulák), hogy Lt és Ls illeszthetőek. Az $\{Lt, Ls\}$ atomi formulahalmazt esetleg kibővíthetjük C_1, illetve C_2-ben szereplő atomi formuláknak egy olyan $\underline{L}$ halmazává, hogy az $\underline{L}$-beli atomi formulák *illeszthetőek*. Tekintsük a C_1 és C_2 klózoknak az $\underline{L}$ szerinti legáltalánosabb illesztés utáni rezolvensét. Ez utóbbi rezolvenst hívjuk C_1 és C_2 egy *összetett rezolvensének*.

- Megjegyezzük, hogy az összetett rezolvensképzés csak akkor lesz egyértelmű, ha megadjuk azt az atomi formulahalmazt (tehát a fenti $\underline{L}$ halmazt), amelynek illesztése után rezolválunk (lásd 10. Példa). Használjuk erre a $\mathrm{Res}_{\underline{L}}(C_1,C_2)$ jelölést. Könnyű meggondolni, hogy az összetett rezolvensképzés is egy *helyes következtetési szabály*.
- Az összetett rezolvensképzésnek azt a speciális esetét, amikor az illesztésnél csak két atomi formulát illesztünk, egy C_1-belit egy C_2-belivel (ahol az egyik atomi formula negálva szerepel az egyik klózban), *bináris rezolvensképzésnek* nevezzük.

Definiáljuk az elsőrendű rezolúció cáfolhatóság fogalmát: Legyen Λ elsőrendű klózok egy véges halmaza.

14. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a Λ elsőrendű klózhalmaz *cáfolható rezolúcióval*, ha van olyan $C_1,\ C_2,\dots\ C_n = \square$ véges klózsorozat, hogy $C_i \in \Lambda$, vagy C_i valamely, a sorozatban őt megelőző klózpárból *összetett* rezolvensképzéssel nyerhető $(i = 1, 2, \dots n)$.

Hasonlóan definiálható az, hogy egy tetszőleges C klóz *levezethető* (erre a definícióra később még rátérünk).

A fent definiált elsőrendű rezolúciós kalkulus teljességét fogjuk bizonyítani. Először egy segédtételt bizonyítunk, az úgynevezett *emelési tételt* (vagy emelési lemmát):

15. Tétel. (Emelési tétel.) Legyen C_1 és C_2 két elsőrendű klóz, $\widetilde{C}_1$ és $\widetilde{C}_2$ pedig e klózok rezolválható alapelőfordulásai. Legyen $\widetilde{Q}$ ez utóbbi klózok rezolvense. Ekkor létezik a C_1 és C_2 klózoknak egy olyan R *összetett* rezolvense, hogy $\widetilde{Q}$ alapelőfordulása R-nek.

Bizonyítás. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy C_1 és C_2 individuumváltozói már szeparáltak.
Mivel a klózok szeparáltak, ezért $\widetilde{C}_1$ és $\widetilde{C}_2$ tekinthető úgy, mint amely ugyanazon s helyettesítéssel nyerhető C_1-ből és C_2-ből, tehát írhatjuk, hogy $\widetilde{C}_1 = s\,C_1$ és $\widetilde{C}_2 = s\,C_2$.

Tegyük fel, hogy $\widetilde{C}_1$ és $\widetilde{C}_2$ a P atomi formula szerint rezolválhatók mint állításformulák, és rezolvensük $\widetilde{Q} = \mathrm{Res}_P(\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2)$. Tegyük fel, hogy P-ben L a relációjel, és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy L egyváltozós.

Az s helyettesítésnél a P atomi formula több különböző atomi formula egybeeséséből adódhat, melyekben az a közös, hogy relációjelük L. Tegyük fel például hogy ezek C_1-ben az $Lt_1, \ldots Lt_n$ $(n \geq 1)$ atomi formulák, C_2-ben pedig a $\neg Lp_1, \ldots \neg Lp_m$ $(m \geq 1)$-ben előforduló $Lp_1, \ldots Lp_m$ atomi formulák, ahol $t_1, \ldots t_n$ és $p_1 \ldots p_m$ például prefix alakú termek. Mivel az s helyettesítésnél a $K = \{Lt_i : i = 1, \ldots n\} \cup \left\{Lp_j : j = 1, \ldots m\right\}$ atomi formulahalmaz minden eleme ugyanazon atomi formulába megy át, ezért e formulahalmaz illeszthető, és a Robinson-tétel szerint van legáltalánosabb helyettesítés is, legyen ez s_0. Legyen C_1 és C_2 K szerinti rezolvense R. Mivel s_0 legáltalánosabb, és s illesztő helyettesítés, ezért belőle s megkapható valamely τ helyettesítéssel, azaz $s = \tau s_0$. Ezután nyilván igaz a következő:

$$\tau \, \mathrm{Res}_K(C_1, C_2) = \tau R = \mathrm{Res}_P(s\, C_1, s\, C_2) = \widetilde{Q}$$

Szavakban: a C_1 és C_2 klózok (összetett) R rezolvensének egyik alapelőfordulása megadja a $\widetilde{C}_1$ és $\widetilde{C}_2$ klózok adott rezolvensét. Ez a bizonyítandó állítás.

■

A tétel tehát arra vonatkozik, hogy, bizonyos értelemben, az alapelőfordulás és a rezolvensképzés műveletei *kommutálnak* (egymással felcserélhetők), mint azt a következő diagram mutatja:

$$\begin{array}{ccc}
C_1,\ C_2 & \xrightarrow{\text{(elsőrendű rezolúció)}} & \mathrm{Res}(C_1, C_2)\ (= R) \\
\downarrow \text{(alapelőfordulás)} & & \downarrow \text{(alapelőfordulás)} \\
\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2 & \xrightarrow{\text{(alaprezolúció)}} & \mathrm{Res}(\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2)\ (= \widetilde{Q})
\end{array}$$

A fenti segédtétel azt mutatja, hogy **az összetett rezolvensképzés művelete visszavezethető az alaprezolvens-képzés, azaz az állításrezolvens-képzés műveletére** (vagy másképpen, az állításrezolvens-képzés „*beemelhető*” az elsőrendű rezolvensképzésbe).

Legyen Λ elsőrendű klózok egy véges halmaza.

16. Tétel. (Elsőrendű rezolúció teljességi tétele.)

> Λ lezártja *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha Λ *cáfolható* elsőrendű rezolúcióval.

Bizonyítás.
Először tegyük fel, hogy Λ lezártja kielégíthetetlen. Az alaprezolúció teljességi tétele értelmében (5. Tétel), Λ alapelőfordulásainak van olyan részhalmaza, hogy belőle az üres klóz levezethető, azaz az üres klóznak van egy $D_1, \ldots D_n = \square$ állításrezolúciós levezetése.

A levezetés definíciójának értelmében D_i $(i = 1, \dots n)$ vagy maga is alapelőfordulása valamely Λ-beli klóznak, vagy a levezetésben nála kisebb indexű klózokból adódik állításrezolúcióval.

Most általánosan, tekintsük Λ alapelőfordulásainak Λ' halmazát, és legyen a $B_1, B_2, \dots B_n = B$ egy állításrezolúciós levezetése a B klóznak Λ'-ből. Igazoljuk a következő, általános (A) állítást:

Létezik egy olyan $C_1, C_2 \dots C_n = C$ klózsorozat, amelyik rezolúciós levezetése a C klóznak Λ-ból, a 14. Definíciónak a C klóz levezethetőségére vonatkozó változata értelmében, továbbá minden B_i alapelőfordulása C_i-nek.

A bizonyításhoz a levezetés hossza szerinti indukciót használunk. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az (A) állítás igaz $n = i - 1$-re. Igazoljuk, hogy igaz $n = i$-re is. Legyen $B_1, B_2 \dots B_{i-1}, B_i$ egy állításrezolúciós levezetés Λ'-ből. Az indukciós feltétel miatt a $B_1, B_2 \dots B_{i-1}$ levezetés rendelkezik az (A) állításban garantált tulajdonsággal, tehát létezik hozzá az (A)-ban garantált $C_1, C_2 \dots C_{i-1}$ elsőrendű levezetés. Ha B_i maga is egy Λ-beli klóz alapelőfordulása, akkor az (A) állítás nyilvánvaló, hiszen C_i-nek egy olyan Λ-beli klózt kell választani, amelynek B_i alapelőfordulása. Amennyiben B_i állítás rezolvensképzéssel adódik valamely nála kisebb indexű B_j és B_k klózokból, akkor az *emelési tétel* szerint van olyan C_i klóz, amelyik összetett rezolvense azoknak a C_j és C_k klózoknak, amelyek létezését az indukciós feltétel garantálta, és amelyeknek B_j és B_k rendre alapelőfordulásai, valamint C_i-nek B_i alapelőfordulása. Továbbá $C_1, C_2 \dots C_{i-1}, C_i$ valóban elsőrendű rezolúciós levezetés.

Visszatérve az eredeti bizonyítandóhoz, az (A) állítást a $D_1, D_2 \dots D_n = \square$ levezetésre alkalmazzuk. Ekkor az (A) állítás által garantált $C_1, C_2 \dots C_n = C$ *klózsorozat* utolsó tagja az üres klóz, hiszen tudjuk, hogy C_n alapelőfordulása az üres klóz, és az üres klóz csak önmagának az üres klóznak lehet alapelőfordulása.

Ezzel a teljességet bebizonyítottuk.

A *helyesség* következménye a helyettesítéses rezolúció helyességének, hiszen egy levezetés helyettesítéses rezolúciók sorozatából áll.

■

Vegyük észre, hogy *véges sok atomi formula illesztése atomi* **formulapárok** *illesztéséből áll*. **Tehát ha az utóbbiakat elemi illesztéseknek tekintjük, akkor az illesztés ilyen elemi illesztésekre visszavezethető.** A rezolúciós levezetések során **a gyakorlatban is ez történik**. Megfogalmazható olyan **kalkulus** is, amelyik tükrözi ezt a gyakorlatot. E kalkulus levezetési szabályai:

(i) *klózok szeparálása*
(ii) *atomi formulapárok illesztése*
(iii) *elsőrendű rezolvensképzés*

A (ii) szabályt tehát *két szituációban* alkalmazzuk: vagy azért, hogy egy *klózon belül* illesszünk két atomi formulát, vagy azért, hogy *két klózban* a bennük előforduló L, illetve $\neg L$ alakú literálok argumentumait azonosítsuk azért, hogy az eredő szerint rezolválhassuk a klózokat.

Az állításesethez hasonlóan, az elsőrendű rezolúcióra is létezik a 4. Tételnek megfelelő állítás. Egy elsőrendű Λ klózhalmazra is képezhető a (2)-höz hasonlóan $\mathrm{Res}^*(\Lambda)$, ahol az (1)-nek megfelelő összefüggésben $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ *összetett* rezolvensképzést jelent. Itt azonban már nem feltétlenül igaz, hogy valamely n-re $\mathrm{Res}^n(\Lambda) = \mathrm{Res}^*(\Lambda)$.

17. Tétel. Λ lezártja *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha $\square \in \mathrm{Res}^*(\Lambda)$.

Ez a tétel, az állításesethez hasonlóan, véges Λ-kra ekvivalens a fent bizonyított, elsőrendű rezolúciós 16. teljességi tétellel. Λ kielégíthetőségéhez tehát az elsőrendű esetben is azt kell vizsgálni, hogy tartalmazza-e $\mathrm{Res}^*(\Lambda)$ az üres klózt. A helyzet komplikáltabb az állításlogikaihoz képest annyiban, hogy $\mathrm{Res}^*(\Lambda)$ általában végtelen halmaz.

3.3.4 Az eljárás alkalmazásairól és finomításairól

1. Rezolúció és a következményfogalom. Először azt tárgyaljuk, hogy a rezolúciót hogyan alkalmazzuk $\Sigma \vDash \alpha$ következmény helyességének vizsgálatára. A rezolúció-elméletben e kérdésnek *két megközelítése* is lehetséges.

Az *első megközelítés* szerint a vizsgálat ugyanúgy történik, ahogyan tetszőleges *cáfolati kalkulusból levezetési rendszert nyerhetünk* (lásd még az analitikus fáknál): Tekintjük a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmazt, és a formulákat erős Skolem-formára hozzuk.

Legyen a Λ klózhalmaz a szóban forgó Skolem-alakokban előforduló konjunkciós klózok összessége.

18. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy Σ formulahalmazból az α formula elsőrendű rezolúcióval *levezethető* (jelölés $\Sigma \vdash_r \alpha$), ha a Λ klózhalmaz *cáfolható* elsőrendű rezolúcióval.

Az elsőrendű rezolúció 16. teljességi tételének következménye a következő teljességi tétel:

19. Tétel. $\Sigma \vdash_r \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vDash \alpha$.

$\Sigma \vDash \alpha$ másik lehetséges vizsgálata az úgynevezett *rezolúciós levezetési rendszerre* támaszkodva történhet (nem tévesztendő össze a fentiekben definiált levezetési rendszerrel).

A *rezolúciós levezetési rendszer* annyiban különbözik a cáfolati rendszertől, hogy a cáfolati rendszer cáfolhatóság definíciójában az üres klózt egy tetszőleges C klózzal helyettesítjük, így kapunk levezethetőséget. Tehát a definíció például az *állításesetben* a következő:

Akkor mondjuk, hogy a C klóz a Λ klózhalmazból rezolúcióval levezethető, *ha van klózoknak olyan véges $C_1, C_2, \ldots C_n = C$ sorozata, hogy minden* $1 \leq i \leq n$-re *vagy $C_i \in \Lambda$ vagy C_i valamely, a sorozatban őt megelőző két klózból rezolvensképzéssel nyerhető (jelölés: $\Lambda \vdash_R C$).*

E levezetési rendszer közvetlenül tehát csak arra alkalmas, hogy *egy Λ klózhalmazból* egy adott *klózt* levezessünk. A következő teljességi tétel igaz:

20. Tétel. Λ lezártjának *logikai következménye* egy C klóz lezártja akkor és csak akkor, ha $\Lambda \vdash_R C$.

Az $\vdash_R$ alkalmazásának illusztrálására tekintsük a 3.3.1 rész-beli példákat.
A 2. Példánál a levezetésből nemcsak azt kapjuk, hogy a klózhalmaznak van modellje, hanem miután az R és Q literálokat, valamint a $P \vee R$ klózt levezettük, azt is megkaptuk, hogy R és Q a klózhalmaz minden modelljén igaz (valamint $P \vee R$ is igaz), tehát logikai következménye az eredeti klózhalmaznak. A 4. Példára másik megoldást adhatunk, ugyanis az A, B és $\neg C$ literálokat *közvetlenül* levezettük $\vdash_R$ szerint, tehát a 20. Tétel értelmében felesleges az üres klóz levezetésére visszavezetni az állítást.

Megjegyezzük, hogy az általános $\Sigma \vDash \alpha$ következmény helyességének vizsgálata is (tehát az az eset, amikor a szereplő formulák nem klózok) visszavezethető a $\vdash_R$ reláció alkalmazására. Azonban az eljárás bonyolultsága miatt ezt az eljárást nem használjuk.

A 19. és 20. Tételeket összevetve tehát azt kapjuk, hogy a $\vdash_R$, illetve a $\vdash_r$ relációk *egybeesnek*, ha őket klózok lezártjaira alkalmazzuk.

A rezolúció általános, bizonyításelméleti *alkalmazásairól* ugyanaz elmondható, mint az analitikus fák esetén, tehát a rezolúció alkalmazható számos fontos bizonyításelméleti fogalom vizsgálatára, mint például az ellentmondástalanság, függetlenség, érvényesség stb.

2. A rezolúció és az automatikus tételbizonyítás. Az automatikus tételbizonyítás (lásd még 3.2.3) kutatásának hagyományos kerete a rezolúcióelmélet. A rezolúció számos „finomítása” e célból jött létre. Az egyik lehetséges finomítás az, hogy kikötéseket

tesznek a rezolválandó klózpárok tagjainak *szerkezetére* nézve. Például ilyen finomítás az úgynevezett *P-rezolúció* (pozitív rezolúció), amelyikben kikötjük, hogy a rezolválandó klózpár egyik tagja csak pozitív literálokból állhat, vagy ilyen az *egységrezolúció*, amelyikben a klózpár egyik tagja pontosan csak egy literál lehet, vagy ilyen az *inputrezolúció*, amelynek egy fontos esetével, az SLD-rezolúcióval a 3.5-ben fogunk foglalkozni. Az ilyen típusú korlátozásoknál felvetődik a kérdés, hogy megőrzi-e az eljárás a rezolúciós eljárás teljességét. Igazolható, hogy például a P rezolúció megőrzi, míg az egység- és inputrezolúció nem. Azonban az egység- és inputrezolúció is teljes akkor, ha az előforduló klózok úgynevezett Horn-klózok (lásd 3.5). Sőt ennél több is mondható: az SLD-rezolúciónál, az úgynevezett korrekt válasz problémánál egy konstruktivista igényeket is kielégítő teljesség állítható.
A 3.5-ben, az SLD-rezolúcióval kapcsolatban, érintjük majd a nemdeterminisztikus eljárás determinisztikussá tételének kérdését (egy ilyen algoritmusból származik a PROLOG), amely lehetővé teszi a számítógépes implementációt.

A rezolúció egyik legfontosabb alkalmazási területével, a logikai programozással a 3.5-ben fogunk foglalkozni.

Ezután konkrét elsőrendű rezolúcióval kapcsolatos példákat mutatunk. Az egyes rezolválásoknál alkalmazott helyettesítéseket most is a komponensklózokat összekötő zárójelek mellett alsó indexben tüntetjük fel:

7. Példa. *Van-e modellje a következő formulahalmaznak?*

$$\{\forall x(\neg P(x)\vee Q(fx,x)),\ P(gb),\ \forall y\forall z\neg Q(y,z)\}$$

A formulák már erős Skolem-alakúak és szeparáltak. A hozzájuk tartozó klózhalmaz és a levezetés:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\neg P(x)\vee Q(fx,x)\\ \quad P(gb)\end{array}\right]_{x/gb} Q(fgb,gb)\\ \neg Q(y,x)\end{array}\right]_{y/fgb,x/gb}\square$$

Helyettesítésekkel és rezolvensképzéssel levezettük az üres klózt, ezért nincs modellje a formulahalmaznak.

8. Példa. *Van-e modellje a*

$$\{\forall x\forall y(Px\vee Pfy\vee Rgy),\ \forall y(\neg Pfga\vee Qy)\}$$

formulahalmaznak?

A formulák erős Skolem-alakúak, de nem szeparáltak. A szeparált klózok:
$Px\vee Pfy\vee Rgy$
$\neg Pfga\vee Qz$
Alkalmazzunk illesztést a P-t tartalmazó atomi formulákra, tehát a Px, Pfy, $Pfga$ atomi formulákra. A legáltalánosabb illesztés x/fy, y/ga. Az illesztéssel nyert klózok rendre $Pfga\vee Rgga$ és $\neg Pfga\vee Qz$. E két klóz rezolvense:

$$\left.\begin{array}{l} Pfga \vee Rgga \\ \neg Pfga \vee Qz \end{array}\right] Rgga \vee Qz$$

Nyilvánvaló, hogy az üres klóz nem vezethető le, ezért a formulahalmaznak van modellje. Az is leolvasható, hogy e modellen olyan az igazságértékelés, hogy az $Rgga \vee Qz$ formula igaz.

9. Példa. *Illeszthetőek-e a következő literálhalmazok?*

a) $\{P(x,y),\ P(u,f(z))\}$
b) $\{P(x,g(x)),\ P(y,y)\}$
c) $\{P(g(x),y),\ P(y,y),\ P(u,f(v))\}$

a) Igen. A megfelelő helyettesítések: x/u, $y/f(z)$, tehát az eredmény: $P(u,f(z))$.
b) Nem. x/y és $y/g(y)$, ez utóbbi azonban *nem* helyettesítés (lásd az algoritmust).
c) Nem. $y/g(x)$ és $g(x)/f(v)$, de ez utóbbi *nem* helyettesítés (lásd az algoritmust).

10. Példa. *Határozza meg a következő, C_1 és C_2 klózok összes rezolvensét!*

$$C_1 = \neg P(x,y) \vee \neg P(fa,gub) \vee Q(x,u)$$
$$C_2 = P(fx,gab) \vee \neg Q(fa,b) \vee \neg Q(a,b)$$

Szeparáljuk a klózokat:

$C_1 = \neg P(x,y) \vee \neg P(fa,gub) \vee Q(x,u)$, $\ C_2 = P(fz,gab) \vee \neg Q(fa,b) \vee \neg Q(a,b)$.

Először kíséreljünk meg P-t tartalmazó atomi formulák szerint rezolválni. A P-t tartalmazó atomi formulák, tehát $P(x,y)$, $P(fa,gub)$ és $P(fz,gab)$ illeszthetők egymáshoz, és a legáltalánosabb illesztés: x/fa, y/gub, z/a, u/a. A legáltalánosabb illesztés a $\widetilde{C}_1 = \neg P(fa,gab) \vee Q(fa,a)$ és a $\widetilde{C}_2 = P(fa,gab) \vee \neg Q(fa,b) \vee \neg Q(a,b)$ klózokat eredményezi. E két klóz rezolvense:

$$Q(fa,a) \vee \neg Q(fa,b) \vee \neg Q(a,b)$$

Lehetséges formálisan, hogy nem mindhárom P-t tartalmazó atomi formulát illesztjük, csak párokat. Így például $P(x,y)$-t és $P(fz,gab)$-t. Az illesztés ekkor x/fz és y/gab. Az illesztés utáni rezolvensképzés eredménye:

$$\neg P(fa,gub) \vee Q(x,u) \vee \neg Q(fa,b) \vee \neg Q(a,b)$$

Hasonlóan, illeszthető $P(fa,gab)$ és $P(fz,gab)$ is (z/a).

Most rezolváljunk Q-t tartalmazó atomi formulák szerint. Vegyük észre, hogy a Q-t tartalmazó $Q(x,u)$, $Q(fa,b)$, $Q(a,b)$ atomi formulák *nem illeszthetőek*, csak bizonyos párosításokban:

$Q(x,u)$ és $Q(fa,b)$ illeszthetőek úgy, hogy x/fa és u/b, ekkor a rezolvens:

$$\neg P(fa,y) \vee \neg P(fa,gbb) \vee P(fz,gab) \vee \neg Q(a,b)$$

$Q(x,u)$ és $Q(a,b)$ pedig illeszthetőek úgy, hogy x/a és u/b, ekkor a rezolvens:

$$\neg P(a,y) \vee \neg P(fa,gbb) \vee P(fz,gab) \vee \neg Q(fa,b)$$

A két klóz összetett rezolválására tehát összesen öt lehetőség van.

11. Példa. *Van-e modellje a következő formulahalmaznak?*
$\{\forall x \forall y(\neg Px \vee Qyy \vee Qxy),\ \forall x \forall y(\neg Px \vee \neg Qyy \vee \neg Qxy),\ \forall x\, Px\}$

A formulák erős Skolem-formájúak. Szeparálás után a hozzájuk tartozó klózhalmaz:
$\neg Px \vee Qyy \vee Qxy$ (1)
$\neg Pz \vee \neg Quu \vee \neg Qzu$ (2)
Ps (3)
Például illesztést végzünk a Q relációjelet tartalmazó literálokra. Az illesztő helyettesítés: x/y, y/u, u/z, az illesztés eredményei pedig rendre a $\neg Pz \vee Qzz$, illetve a $\neg Pz \vee \neg Qzz$ klózok. Utóbbi két klóz rezolvense:

$$\begin{array}{lll} \neg Pz \vee Qz & \neg Pz & \Box \\ \neg Pz \vee \neg Qzz & & \\ Ps & & \end{array}$$

Tehát a formulahalmaznak nincs modellje.

12. Példa. *Igazoljuk, hogy*

$$\{\forall x(Cx \to (Wx \wedge Rx)),\ \exists x(Cx \wedge Qx)\} \models \exists x(Qx \wedge Rx).$$

A premisszákhoz hozzávesszük a konklúzió negáltját. Azt kell ezután belátnunk, hogy a $\{\forall x(Cx \to (Wx \wedge Rx)),\ \exists x(Cx \wedge Qx),\ \neg\exists x(Qx \wedge Rx)\}$ formulahalmaznak
nincs modellje.
A Skolem-alakok rendre:
$\forall x((\neg Cx \vee Wx) \wedge (\neg Cx \vee Rx))$
$Ca \wedge Qa$
$\forall x(\neg Qx \vee \neg Rx)$
Tehát szeparálva a változókat, a vizsgálandó klózok a következők:
$\neg Cx \vee Wx$, $\neg Cy \vee Ry$, Ca, Qa, $\neg Qz \vee \neg Rz$.

A levezetés:

$$\begin{array}{llll} \neg Cx \vee Wx & & & \\ \neg Cy \vee Ry & Ra & & \Box \\ Ca & {}_{y/a} & & \\ Qa & & \neg Ra & \\ \neg Qz \vee Rz & & {}_{z/a} & \end{array}$$

Az üres klózt levezettük, tehát a következmény helyes.

13. Példa. *Igazoljuk, hogy* $\models \forall x\, Px \vee \forall x\, Qx \to \forall x(Px \vee Qx)$.

Megmutatjuk, hogy a formula negáltjának nincs modellje.
A negált ekvivalens a $\forall x\, Px \vee \forall x\, Qx \wedge \neg\forall x(Px \vee Qx)$ formulával.
Ennek egy prenex alakja: $\exists u \forall x \forall y((Px \vee Qy) \wedge (\neg Pu \wedge \neg Qu))$.

Utóbbinak egy erős Skolem-alakja: $\forall x \forall y((Px \vee Qy) \wedge (\neg Pa \wedge \neg Qa))$.
A formulához tartozó klózok, valamint a levezetés:

$$\begin{array}{llll}
Px \vee Qy & Qy & \Box \\
\neg Pa & {}_{x/a} & \\
\neg Qa & & {}_{y/a}
\end{array}$$

14. Példa. *Igazoljuk, hogy*

$$\forall x(\exists y(Sxy \wedge My) \to \exists y(Iy \wedge Exy)) \vDash \forall x \neg Ix \to \forall x \forall y(Sxy \to \neg My).$$

A bal oldali formula egy prenex alakja: $\forall x \exists u \forall y((\neg Sxy \vee \neg My) \vee (Iu \wedge Exu))$.
Egy erős Skolem-alakja a következő α formula:
$\forall x \forall y((\neg Sxy \vee \neg My \vee IUx) \wedge (\neg Sxy \vee \neg My \vee Ex\,Ux))$, ahol U a Skolem-függvény.
A jobb oldali formula negáltjának egy erős Skolem-alakja a következő β formula:
$\forall x(\neg Ix \wedge Sab \wedge Mb)$.
Megmutatjuk, hogy $\alpha \wedge \beta$-nak nincs modellje. A szeparált klózok és a levezetés:

$$\begin{array}{llll}
\neg Sxy \vee \neg My \vee IUx & \neg Mb \vee IUa & IUa & \Box \\
\neg Suv \vee \neg Mv \vee Eu\,Uu & & & \\
\neg Iz & & & {}_{z/Ua} \\
Sab & {}_{x/a,y/b} & & \\
Mb & & &
\end{array}$$

15. Példa. „Van olyan beteg, aki szereti az orvosokat. Egyetlen beteg sem szereti a kuruzslókat. Tehát orvos nem lehet kuruzsló.”
Formalizáljuk ezt a következtetést, és igazoljuk rezolúcióval a helyességét (használhatjuk a P, D és Q egyváltozós relációkat, melyek jelentései rendre „beteg”, „orvos” és „kuruzsló”, valamint az L kétváltozós relációt, amelynek jelentése „szereti”)!

A formalizálás a következő:
$\{\exists x(Px \wedge \forall y(Dy \to Lxy)), \neg \exists x(Px \wedge \exists y(Qy \wedge Lxy))\} \vDash \forall x(Dx \to \neg Qx)$.
Képezzük a konklúzió negáltját és a prenex formákat:
$\exists x \forall y(Px \wedge (\neg Dy \vee Lxy)), \forall x \forall y(\neg Px \vee \neg Qy \vee \neg Lxy), \exists x(Dx \wedge Qx)$.
Innen a Skolem-formák:
$Pa \wedge (\neg Dy \vee Lay), \neg Px \vee \neg Qy \vee \neg Lxy, Db \wedge Qb$.
Szeparálva a változókat, a kiinduló klózok és a rezolúció:

$$\begin{array}{lllll}
Pa & \neg Qz \vee Laz & & \neg Lab & \Box \\
\neg Dy \vee Lay & & Lab & & \\
\neg Px \vee \neg Qz \vee \neg Lxz & {}_{x/a} & & & \\
Db & & {}_{y/b} & & \\
Qb & & & {}_{z/b} &
\end{array}$$

Az üres klózt levezettük, tehát a következtetés helyes.

3.4 A logika korlátairól

Az eddigiekben a bizonyításelmélet *erejéről* győződhettünk meg, amit többek között a teljességi tétel jelent, és amelynek értelmében a szemantikát kontrollálni tudjuk a bizonyításelmélettel. Jelen részben a logika *korlátairól*, úgynevezett negatív eredményeiről lesz szó. Ezek a negatív eredmények azonban igen nagy jelentőségűek, nagy, mozgósító hatással voltak a matematika, sőt általában az egész tudomány fejlődésére.

A korábbiakban felvetettük elméletekkel kapcsolatban például a következő problémákat: *Egy struktúra elmélete (*$\mathrm{Th}\mathcal{A}$*) axiomatizálható, illetve eldönthető-e? Az érvényes formulák elmélete (*$\mathrm{Th}\mathcal{M}$*) eldönthető-e?*

Egy negatív „generikus" példával foglalkozunk, az aritmetika elméletével, elsősorban az aritmetika alapjait vizsgáljuk. Ez a példa valóban generikusnak tekinthető majd, mert a rá vonatkozó eredmények átvihetők a matematika minden „elég erős" elméletére.
Használjuk majd e részben a természetes számok standard struktúrájának elméletét ($\mathrm{Th}\mathcal{N}$), valamint a 3.1.1-ben bevezetett Π_P Peano-aritmetikát és a belőle az indukciós séma elhagyásával nyert végesen axiomatizált Π aritmetikát, valamint ezen elméletek nyelvét, amelyet $\mathcal{L}$-lel jelölünk. Bizonyítottnak tekintjük azt, hogy a Π_P Peano-axiómarendszer ellentmondástalan (Gentzen bizonyítása alapján). Jelen részben az elmélet, axiomatizálhatóság, komplettség stb. fogalmak bizonyításelméleti definíciójuk szerint értendők. Végig a Hilbert-bizonyítási rendszert használjuk, tehát a $\vdash$ reláció $\vdash_H$-t rövidíti, $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ pedig $\mathrm{Ded}_H(\Sigma)$-t. Könnyen belátható azonban, hogy a fejezet eredményei *nem függenek* a választott teljes kalkulustól, jelen esetben a Hilbert-kalkulustól.
3.4.1-ben és 3.4.2-ben megfogalmazzuk (és részben bizonyítjuk) az eredményeket, 3.4.3-ban kitekintést adunk ezen eredmények logikán túlmutató következményeiről, ismeretelméleti hátterükről.

3.4.1 Inkomplettség

E részben elméletek komplettségének (inkomplettségének) és axiomatizálhatóságának kérdéseivel foglalkozunk. Megfogalmazzuk Gödel híres *inkomplettségi* tételeit.

1. Tétel. (Gödel I. inkomplettségi tétele.)

> A Π elmélet, valamint minden axiomatizálható, ellentmondástalan kiterjesztése *inkomplett*.

Következmények:

- *A* **természetes számok szokásos modelljének az elmélete***, azaz* Th$\mathcal{N}$ **nem axiomatizálható**, hiszen Th$\mathcal{N}$ komplett kiterjesztése Π-nek (vagyis Th$\mathcal{N}$-et nem lehet a bizonyításelmélet módszerével, azaz az axiomatikus módszerrel „megragadni”). Azaz nem létezik olyan rekurzív, ellentmondástalan axiómarendszer, amelyből levezethető lenne az összes olyan zárt formula, amely igaz a természetes számok szokásos struktúráján.
- Megmutatható, hogy az előbbi tulajdonság Th$\mathcal{N}$-ről **öröklődik olyan modellek elméleteire is, amely elméletek „elég erősek”**, azaz Π „szimulálható” bennük (megmutatható, hogy ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy *a rekurzív relációk definiálhatók az illető elméletben).* Tehát az aritmetikához hasonló bonyolultságú struktúrák elmélete bizonyításelméleti eszközökkel csak korlátozottan írható le.
- *Ha egy elmélet* Π *ellentmondástalan kiterjesztése, akkor* **nem lehet egyszerre axiomatizálható és komplett**.
- A Peano-axiómák által generált elmélet, Π_P *is inkomplett* (hiszen Π_P Π-nek ellentmondástalan kiterjesztése).

A következő, második inkomplettségi tétel a Π elmélet helyett a Π_P elméletre vonatkozik, és elméletek inkomplettségével és ellentmondástalanságával egyaránt foglalkozik.

2. Tétel. (Gödel II. inkomplettségi tétele.)

> Van az $\mathcal{L}$ nyelvnek olyan formulája, amely Π_P *ellentmondástalanságának* formalizálása, és ez a formula *független* a Π_P elmélettől. Π_P minden ellentmondástalan, axiomatizálható *kiterjesztéséhez* is található ilyen tulajdonságú formula.

Következmények:

- Π_P ellentmondástalanságát Π_P-ben nem, **legfeljebb egy alkalmas kiterjesztésében lehet bizonyítani**. E kiterjesztés a „metaelmélet" szerepét tölti be, természetesen a metaelmélet ellentmondástalansága egy újabb probléma.
- Π_P **keretében tehát nem tudjuk bizonyítani, hogy** Π_P**-nek van modellje**. Hiszen a Gödel-teljességi tétel b) változata szerint Π_P-nek akkor és csak akkor van modellje, ha ellentmondástalan, viszont ez utóbbi a tétel értelmében Π_P keretében nem bizonyítható.
- A fenti következmények **öröklődnek** Π_p**-ről az „elég erős" elméletekre is** (lásd az I. inkomplettségi tétel hasonló következményét).

Az olyan ellentmondástalansági bizonyításokat, amelyek függenek egy másik elmélet ellentmondástalanságától, **relatív ellentmondástalansági bizonyításoknak** hívjuk.
A matematika legtöbb komoly elméletére csupán ilyen relatív ellentmondástalansági bizonyítás létezik. Ilyen relatív ellentmondástalansági bizonyításra ad lehetőséget a fent említett Gödel-teljességi tétel b) változat, hiszen a modell egzisztenciájának ténye, többek között, függ a halmazelmélettől. Az ellentmondástalanság ilyen úton történő bizonyítására ad lehetőséget majd a *modellmódszer* (lásd 3.1).

* * *

Ami az inkomplettségi tételeket illeti, bizonyíthatóak más eredmények és fogalmak ismeretében (ilyen például az úgynevezett „kiszámíthatóságelmélet" keretében adható bizonyítás), és bizonyíthatóak „elemien", ekkor a bizonyítás hosszabb előkészületet igényel. Most az I. inkomplettségi tételnél valamivel gyengébb állítást, a tétel egyik következményét bizonyítjuk be, azt, hogy $\mathrm{Th}\mathcal{N}$ nem lehet axiomatizálható.
Szükségünk lesz egy a nyelv formulái, valamint a természetes számok valamely részhalmaza közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre. Ilyen konkrét hozzárendelés a Gödeltől származó szellemes konstrukció, az úgynevezett *Gödel-számozás*.

Feleltessük meg az $\mathcal{L}$ nyelv $+, \cdot, S, 0, <, =, \wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists$ szimbólumainak rendre az $1, 2, 3, \ldots 13$ számokat, a nyelv $v_1, v_2, v_3, \ldots$ individuumváltozóinak pedig rendre a $14, 15, 16, \ldots$ stb. számokat. Tekintsük a nyelv formuláit prefix alakban.
Ha az α formula prefix alakjában szereplő szimbólumok fenti kódszámai rendre n_1, $n_2, \ldots n_k$, akkor feleltessük meg a formulának a $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot 7^{n_4} \cdot 11^{n_5} \cdot \ldots \cdot p^{n_k}$ számot, ahol $2, 3, 5, 7, 11 \ldots$ rendre a prímszámok, és ahol p a k-adik prímszám. E számot nevezzük az *α formula Gödel-számának*. E számot jelölje $g'\alpha$, a szám nyelvi megfelelőjét (tehát $SS\ldots S0$-t, S $g'\alpha$-szor) pedig jelöljük $g\alpha$-val.
Hasonlóan, levezetésekhez is rendelhetünk egy-egyértelmű módon természetes számokat: Ha egy formula levezetése az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ formulákból áll, ezen formulák Gödel-számai pedig rendre $m_1, m_2, \ldots m_i$, akkor feleltessük meg a levezetésnek a $2^{m_1} \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3} \cdot 7^{m_4} \cdot 11^{m_5} \cdot \ldots \cdot p^{m_k}$ számot, ez legyen a *levezetés Gödel-száma*.

3. Tétel. A természetes számok standard modelljének elmélete, Th$\mathcal{N}$ *nem axiomatizálható.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan rekurzív Σ formulahalmaz, hogy Th$\mathcal{N} = \mathrm{Ded}(\Sigma)$.
Tekintsük az $\mathcal{L}$ nyelv egyargumentumú α formuláihoz az $\alpha(g\alpha)$ formulákat, ahol $g(\alpha)$ éppen az α Gödel-számának a jelölése a nyelvben ($\alpha(g\alpha)$ egy „önmagáról beszélő" formula). Tekintsük $\mathcal{N}$-en a következő kétargumentumú R relációt:

$\langle n, m\rangle \in R$ *pontosan akkor, hogyha n valamely egyargumentumú α formulának a Gödel-száma, m pedig az $\alpha(g\alpha)$* (önmagáról beszélő) *formula Σ-ból történő valamely levezetésének Gödel-száma.*

Mivel a szintaxis szabályainak és a levezetési szabályoknak rekurzív függvények felelnek meg, ezért R definiálható reláció $\mathcal{N}$-en. Ezt a kissé hosszadalmas számolást igénylő állítást most nem részletezzük. Legyen az R-et definiáló $\mathcal{L}$-beli formula ϱ.
Tekintsük most speciálisan az $(\alpha =)\neg\exists y\varrho(x, y)$ formulát, jelölje β, valamint helyettesítsük β-ba saját $g\beta$ Gödel-számát, ekkor a $\neg\exists y\varrho(g\beta, y)$ formulát jelölje δ. β jelentése lehet az, hogy az x Gödel-számú formulához tartozó önmagáról beszélő formula nem levezethető, δ jelentése pedig az, hogy az R-hez tartozó önmagáról beszélő formula *saját maga nem levezethető*. Mivel feltevés szerint Th$\mathcal{N} = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ komplett, ezért két eset van: vagy $\Sigma \vdash \delta$, vagy $\Sigma \nvdash \delta$ (azaz $\Sigma \vdash \neg\delta$).
Először tegyük fel, hogy $\Sigma \vdash \delta$. Ha $\Sigma \vdash \delta$, akkor δ (azaz $\neg\exists y\varrho(g\beta, y)$) igaz $\mathcal{N}$-en. Hiszen $\Sigma \vdash \delta$ miatt $\Sigma \vDash \delta$ is teljesül, $\mathcal{N}$ pedig modellje Σ-nak, így a logikai következmény definíciója miatt δ is igaz $\mathcal{N}$-en. Ugyanakkor $\Sigma \vdash \delta$ miatt létezik δ levezetésének valamely m Gödel-száma, ezért R definíciója szerint, $\langle g'\beta, m\rangle \in R$ (ahol $g'\beta$ egy természetes szám, β Gödel-száma, lásd a Gödel-számozásnál), azaz ϱ igaz a $\langle g'\beta, m\rangle$ értékelésre $\mathcal{N}$-en, tehát $\exists y\varrho(g\beta, y)$ igaz $\mathcal{N}$-en. Ez ellentmond annak, hogy a δ, tehát a $\neg\exists y\varrho(g\beta, y)$ formula igaz $\mathcal{N}$-en. Ellentmondáshoz jutottunk. Tehát δ nem vezethető le Σ-ból.
Ha $\Sigma \nvdash \delta$, tehát δ nem vezethető le Σ-ból, akkor nem létezik levezetésének Gödel-száma, vagyis R definíciója szerint δ, azaz $\neg\exists y\varrho(g\beta, y)$ igaz $\mathcal{N}$-en, azaz $\delta \in$ Th$\mathcal{N}$. De $\Sigma \nvdash \delta$, és $\delta \in$ Th$\mathcal{N}$ ellentmond a Th$\mathcal{N} = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ feltételnek.
Tehát a Th$\mathcal{N} = \mathrm{Ded}(\Sigma)$ indirekt feltevésünk hamis volt, és ezzel állításunkat igazoltuk. ■

A fenti bizonyításban (és hasonlóan az inkomplettségi tételek bizonyításában) többek között *két fontos ötletet* is találunk:
Az egyik ötlet, hogy a bizonyításban *egyszerre jelenik meg a tárgynyelv és a metanyelv*, alkalmazva a Gödel-számozást. Itt a természetes számoknak kettős jelentést tulajdoníthatunk: magát a számot és azt a formulát, amelynek a Gödel-száma. Ez teszi lehetővé, hogy a nyelv segítségével számokról és formulákról egyszerre beszélhessünk.

A másik ötlet, amelyet az első tesz lehetővé, az *önmagukra utaló állítások formalizált megjelenítése*. Úgy lehetséges, hogy egy formula „önmagáról beszéljen”, hogy a formulába saját Gödel-számát helyettesítjük. Kétszer is alkalmazzuk ezt a trükköt, először, amikor tekintjük az $\alpha(g\alpha)$ formulákat, és definiáljuk az R relációt, másodszor pedig akkor, amikor, speciálisan, tekintjük a $\neg\exists y\varrho(x,y)$, azaz a β és a $\beta(g\beta)$, azaz a σ formulát, ahol β jelentése az, hogy az x formula nem levezethető, $\beta(g\beta)$ jelentése pedig az, hogy β *saját maga nem levezethető*. σ vizsgálatából kapjuk meg a tétel állítását.
Régen felfigyeltek a logikában, filozófiában az *önmagukra utaló* állításokra. Ilyen például, hogy ha valaki azt mondja: „én nem mondok igazat”, vagy, ha egy „krétai” azt mondja: „minden krétai hazudik” stb. Sok változata létezik az önmagukra utaló kijelentéseknek, sokat foglalkoztak már velük okkal, hiszen e játékosnak tűnő példák a logika és a halmazelmélet mély problémáira hívják fel a figyelmet. Ilyen változat a matematikában a nevezetes „diagonál módszer”. A fenti bizonyításra gondolva ez azt jelenti, hogy felsoroljuk a nyelv $\alpha(x)$ alakú formuláit: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ Készítünk egy táblázatot, amelynek az i,j-edik helyén $\varphi_i(g\varphi_j)$ áll, azaz a j-edik formula Gödel-száma helyettesítve az i-edik formulába. Ezen táblázat „diagonálisába” kerülnek az „önmagukról beszélő” formulák.

* * *

Bár Gödel inkomplettségi tételei értelmében az „elég erős” axiomatizálható elméletek inkomplettek, az **axiomatizálható, komplett elméletek is fontos szerepet játszanak** a matematikában. A komplettség igazolására több módszer is ismeretes, ilyen például a *„kategoricitásvizsgálat” vagy a „kvantoreliminációâ€*, ezek tárgyalására a 4.2-ben visszatérünk. Egyelőre bizonyítás nélkül néhány példát *említünk axiomatizálható, komplett elméletekre*:

diszkrét (vagy sűrű) végpont nélküli rendezés;
algebrailag zárt p karakterisztikájú testek;
valósan zárt testek;
nemtriviális atommentes Boole-algebrák;
végtelen, atomos Boole-algebrák;
az aritmetika bizonyos szűkítései (lásd például a 4.2 részben) stb.

3.4.2 Eldönthetetlenség

Emlékeztetünk arra, hogy egy Σ elméletet akkor nevezünk *eldönthetetlennek*, ha $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ nem eldönthető halmaz.

Elméletek eldönthetetlenségével kapcsolatban igaz a következő két fontos tétel:

4. Tétel. (Church I. tétele.)

A Π elmélet, valamint bármely ellentmondástalan kiterjesztése *eldönthetetlen*.

Következmények:

- Th$\mathcal{N}$ **eldönthetetlen**, hiszen Th$\mathcal{N}$ kiterjesztése Π-nek.
  Th$\mathcal{N}$ eldönthetetlensége már *következménye a Gödel I. inkomplettségi tételének is*, hiszen nem axiomatizálható elmélet nem lehet eldönthető.
- Hasonlóan az inkomplettséghez, Π **eldönthetetlensége öröklődik az olyan általános elméletekre, amelyek „elég erősek”** (de általában az már nem igaz, hogy nem eldönthető elmélet kiterjesztése sem eldönthető).
- **A Peano-axiómák elmélete Π_P is eldönthetetlen.**

Legyen $\overline{\mathcal{M}}$ az aritmetika $\mathcal{L}$ nyelvének megfelelő típusú modellek összessége.

5. Tétel. (Church II. tétele.)

$\mathcal{L}$ érvényes mondatainak elmélete, (Th$\overline{\mathcal{M}}$) eldönthetetlen.

Következmények:

- **A „valamirevaló” nyelvek érvényes mondatainak elmélete** (Th$\mathcal{M}$) is **eldönthetetlen**, mint az igazolható.
  „Valamirevaló” egy nyelv akkor, ha legalább két individuumkonstanst és legalább két darab kétargumentumú relációkonstanst tartalmaz. Az érvényes mondatok elméletének (Th$\mathcal{M}$) eldöntési problémáját az *elsőrendű logika eldöntésproblémájának* is nevezzük.
  Következik mindebből, hogy az általános $\Sigma \vDash \alpha$ következményreláció is „eldönthetetlen”, mivel $\Sigma \vDash \alpha$ ekvivalens azzal, hogy Σ valamely véges Σ' részére $\Sigma' \vDash \alpha$, utóbbi pedig a Dedukció tétel értelmében visszavezethető az érvényességproblémára.
- A „*kielégíthetetlenségreláció*” szintén **eldönthetetlen**, hiszen egy mondat pontosan akkor kielégíthetetlen, ha negációja érvényes.

A Church-tételeket nem bizonyítjuk. Megmutatható, hogy a II. Church-tétel következménye az elsőnek, hiszen könnyű meggondolni, hogy ha egy elmélet véges bővítése nem eldönthető, akkor maga az elmélet sem eldönthető.

Ezután az *eldönthetőség* és *komplettség* kapcsolatát vizsgáljuk. A következőkből kiderül, hogy a két fogalom közel van egymáshoz.

6. Tétel. Ha egy axiomatizálható és ellentmondástalan Γ elmélet komplett, akkor eldönthető.

Bizonyítás.
Könnyű ugyanis ebben az esetben döntési eljárást adni a $\Gamma \vdash \varphi$ teljesülésének vizsgálatára. Mivel a nyelv megszámlálható (feltettük még az 1. fejezetben), formulái sorozatba rendezhetők, és a formulák véges sorozatai is sorozatba rendezhetők. Utóbbi sorozatok között találhatók az axiómarendszerből történő lehetséges bizonyítások. A döntési eljárás abból áll, hogy felsoroljuk az összes lehetséges véges formulasorozatot, ezekből kiválasztjuk a bizonyításokat, és megvizsgáljuk ezek utolsó formuláit. Amennyiben φ tétel, akkor, definíció szerint, szerepel valamely bizonyítás záró formulájaként, ha pedig φ nem tétel, akkor valahol záró formulaként $\neg\varphi$ szerepel, Γ komplettsége miatt. Tehát a lehetséges bizonyítások sorozatának valamely záró tagjában megtalálható φ vagy $\neg\varphi$. Ez pedig azt jelenti, hogy a keresési eljárás véges sok lépésben véget ér, vagyis a fenti egy döntési eljárás.

■

Következmény: *Gödel I. inkomplettségi tétele következik az I. Church-tételből.*

Hiszen a fenti tétel értelmében, ha Π (vagy ellentmondástalan kiterjesztése) komplett lenne, akkor eldönthető is lenne.

Ezután néhány, az eldönthetőséggel kapcsolatos megjegyzést teszünk:

- A Church-tételek *nem egy konkrét eljárásról* állítják, hogy nem döntési eljárások (ilyen eredményekkel lényegében eddig is rendelkeztünk, például az analitikus fák algoritmusa), hanem általánosabb érvényűek, azt állítják, hogy *egyáltalán nincs* döntési eljárás.
- Számos axiomatizálható elmélet nem eldönthető, de „*félig eldönthető*”. Ez azzal kapcsolatos, hogy elmélet axiomatizálhatósága *rekurzív felsorolhatóságot* jelent. Ez utóbbi azt jelenti, hogy van olyan eljárás, amely véges sok lépésben kiadja azt, ha egy állítás az adott elméletnek tétele, de nem feltétlenül kapunk választ akkor, ha nem tétele.

  Például a Hilbert-féle bizonyítási rendszerben, ha a φ állítás tétel, akkor felsorolva az axiómákból történő összes lehetséges bizonyítást, meg tudjuk keresni az adott φ formula bizonyítását, de ha φ például *független* az axiómáktól, akkor bizonyítását természetesen nem találjuk. Ennél az eljárásnál hatékonyabb eljárást szolgáltat például az analitikus fáknál ismertetett nemdeterminisztikus eljárás, hiszen függetlenség esetén is kaphatunk véges lépésben „nem” választ arra a kérdésre, hogy tétel-e egy adott formula. Ez akkor következik be, ha valamelyik ágat véges sok lépésben sikerül úgy lebontanunk, hogy az ág nem zárul le. Természetesen tudjuk, hogy analitikus fák esetén is lehetséges, hogy a keresési eljárás nem fejeződik be (végtelen fák esetén).

Ugyancsak félig döntési eljárás létezik a „független-e φ az adott elmélettől” probléma esetén is, ugyanis a φ formulára is, és negáltjára is alkalmazni lehet külön-külön a levezethetőségre vonatkozó félig döntési eljárást, ekkor azon esetekben kapunk választ, ha φ nem független.

- Hangsúlyozzuk, hogy a rögzített Γ elméletre vonatkozó eldöntésproblémánál *tetszőleges*, a nyelvbeli φ formuláról kell eldöntenünk, hogy hozzátartozik-e Γ-hoz, azaz a φ formula bizonyos értelemben itt egy *változó*. Az, hogy egy *rögzített* φ formula tétele-e egy axiómarendszernek, egészen más jellegű kérdés, ekkor értelmetlen eldönthetőségről beszélni.
- *Állításlogikában* az érvényes formulák elmélete nemcsak axiomatizálható, hanem el is dönthető (például értékelési táblázatokkal vagy analitikus fákkal, melyek az állításlogikában végesek stb.).

Ezután néhány, az eldöntési problémával kapcsolatos megszorításról, illetve *általánosításról* teszünk említést:

Elmélet eldönthetőségének fogalma úgy is általánosítható, hogy egy bizonyos speciális *formulaosztály* eldönthetőségéről beszélünk. Ez azt jelenti, hogy csak a nyelv bizonyos formulái esetén követeljük meg, hogy egy rögzített eljárás megállapítsa, hogy a formulák tételei-e az elméletnek, vagy sem. Például, ha tekintjük azon prenex alakú formulákat, melyek kvantorblokkja $\forall\exists$ alakú, ahol $\exists$ és $\forall$ egzisztenciális és univerzális kvantorblokkokat jelöl, és tekintjük az ilyen érvényes zárt formulák összességét mint elméletet, akkor ez az osztály eldönthető. Hiszen ha analitikus fáknál a $\exists\forall$ alakú formulák negáltjából indulunk ki, akkor az egzisztenciális kvantorok véges sok lépésben eliminálhatók specifikálással, majd az így nyert véges sok konstansra specifikálva az univerzális kvantorokat, az eljárás véget ér. Ugyanakkor könnyű belátni, hogy az az osztály, amelynek formulái valamely prenex alakjában a kvantorblokk $\forall\exists$ alakú, már nem eldönthető. *Formulaosztályok szerkezetéből tehát gyakran lehet következtetni eldönthetőségükre.*

Az eldönthetőség fogalma általánosítható konkrét elmélet eldönthetőségéről elméletek egy *osztályának* eldönthetőségére. Ha ez az osztály az összes elsőrendű elméletek osztálya, akkor szokás az *elsőrendű következményfogalom eldönthetőségi problémájáról* beszélni (vagy az elsőrendű logika *általános* eldöntési problémájáról). Tehát a probléma itt az, hogy valamely rögzített eljárással bármely elsőrendű elmélet és bármely elsőrendű formula esetére, véges sok lépésben megállapítható-e, hogy a formula az elmélethez tartozik-e, vagy sem. A II. Church-tételből adódik, hogy ilyen eljárás nem létezik.

Hangsúlyozzuk, hogy általánosan, ha K $\Sigma \vdash \varphi$ alakú következtetések egy osztályát jelöli, A pedig eljárások (algoritmusok) egy osztályát, akkor **egészen más kérdés az, hogy van-e olyan A-beli m eljárás, amely minden K-beli δ következtetést eldönt, és az a kérdés, hogy minden K-beli δ következtetéshez van-e olyan m eljárás, hogy az eljárás eldönti δ-t**.

E kérdések a „kvantorok sorrendjében” különböznek, és ezért más a tartalmuk. A második kérdésre egyébként triviálisan *igen* a válasz, és csupán az első kérdés fontos igazán.

* * *

Bár az I. Church-tétel értelmében az axiomatizálható és „elég erős” elméletek nem eldönthetők, fontos szerepet játszanak a matematikában az **axiomatizálható és eldönthető** elméletek is (ezek lehetnek egyéb szempontok szerint erősek). **Az eldönthetőség igazolásának fontos eszköze a 6. Tétel**, tehát a komplettség bizonyítása, axiomatizálható és ellentmondástalan elméletek esetén. Következésképpen, e fejezet első részének végén felsorolt **azon axiomatizálható, komplett elméletek, amelyek ellentmondástalanok, egyúttal eldönthetők is**.

Megjegyezzük, hogy az eldönthetőségnek nem szükséges feltétele a komplettség, tehát a 6. Tétel nem megfordítható. Bizonyítás nélkül, néhány *példát* adunk **eldönthető, axiomatizálható, de inkomplett elméletre**:

Abel-csoportok;
Boole-algebrák;
1 darab ekvivalenciareláció elmélete;
egyenlőség „tiszta” elmélete;
algebrailag zárt testek;
Euklideszi geometria.

Igaz az, hogy eldönthető, axiomatizálható, ellentmondástalan elmélet *kiterjeszthető* ellentmondástalan, komplett elméletté, és ezért a fenti 6. Tétel értelmében eldönthető elméletté (Lindenbaum-tétel, lásd a Gödel-teljességi tétel b) változatnál). Tehát a komplettség és az eldönthetőség valóban egymáshoz közelálló fogalmak.

3.4.3 Kitekintés

Áttekintve a fejezet eddig ismertetett eredményeit, a logika (bizonyításelmélet) két, egymással összefüggő korlátjára hívjuk fel a figyelmet.

- $\mathcal{N}$ elmélete (Th$\mathcal{N}$) *gépies eljárással „nem ragadható meg”*, tehát az $\mathcal{N}$-en igaz állítások gépiesen nem generálhatók (vagyis Th$\mathcal{N}$ nem eldönthető). Sőt még *az sem igaz, hogy* Th$\mathcal{N}$ *axiomatizálható, azaz az* $\mathcal{N}$*-en igaz állítások axiomatikusan leírhatók*. Mindez átvihető olyan modellek elméleteire is, amelyek legalább olyan „erősek”, mint Th$\mathcal{N}$.
- Az aritmetika nyelve érvényes mondatainak elmélete (Th$\overline{\mathcal{M}}$) nem eldönthető, és ez átvihető minden „valamirevaló” elsőrendű nyelvre is.

Általánosabban, ha aritmetikai típusú struktúrák egy $\mathcal{K}$ osztályából indulunk ki, akkor tekintve a $\Gamma = \mathrm{Th}\mathcal{K}$ elmélet axiomatizálhatóságát, megállapíthatjuk, hogy $\mathcal{K} = \{\mathcal{N}\}$ példa arra, hogy Γ *nem axiomatizálható*, $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{M}}$ pedig arra, hogy *axiomatizálható* (ahol $\overline{\mathcal{M}}$ az összes aritmetikai típusú modellek osztálya). $\mathrm{Th}\mathcal{K}$ egyik esetben sem eldönthető. Mindezt kiegészítve az állításlogika érvényes formuláinak $\mathrm{Th}\mathcal{M}_0$ elméletével, amelyik nyilván axiomatizálható és eldönthető is, megállapításainkat a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

$\mathrm{Th}\mathcal{M}_0$	axiomatizálható	eldönthető
$\mathrm{Th}\overline{\mathcal{M}}$	axiomatizálható	nem eldönthető
$\mathrm{Th}\mathcal{N}$	nem axiomatizálható	nem eldönthető

Itt $\overline{\mathcal{M}}$ helyettesíthető tetszőleges, „valamirevaló” nyelv (lásd az 5. Tétel Következményénél) modelljeinek osztályával, a $\mathrm{Th}\mathcal{N}$ pedig tetszőleges „elég erős” elmélettel. Megjegyezzük, hogy nem axiomatizálható, eldönthető elmélet nyilván nincs, mert ha Σ eldönthető elmélet, akkor $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ axiomatizálja Σ-t.

A fentiek a bizonyításelmélet korlátait jelzik, ugyanakkor maga a bizonyításelmélet természetesen nélkülözhetetlen, szerves része a logikának. Paradox módon, a *bizonyításelmélet erejét mutatja, hogy a bizonyításelmélet korlátai precíz matematikai formában megfogalmazhatók, az erről szóló állítások bizonyíthatók*.

A bizonyításelmélet adja precíz megalapozását az axiomatikus módszernek és annak, hogy reprodukáljuk és kontrolláljuk a szemantikát. A bizonyításelmélet teszi lehetővé azt, hogy a logika problémáira adható válaszok igen nagy szeletét *számítógépen tudjuk implementálni*, és ha döntési eljárás nem is létezik igen fontos elméletek esetére, a bizonyításelmélet teszi lehetővé hatékony keresési és félig döntési eljárások megtervezését. A bizonyításelmélet és a bizonyítási rendszerek segítenek abban, hogy könnyebben kezeljük és megértsük a logikai következmény (szemantikai) fogalmát, és a teljességi tétel segítségével a szemantika számos fogalma reprodukálható a bizonyításelméletben.

Gödel inkomplettségi tételeinek és a Church-tételeknek messzemenő, a *matematikán túlmutató következményei vannak*.

Az I. inkomplettségi tételnek többek között az az ismeretelméleti háttere, hogy akármilyen gazdag elméletünk is van a világ valamely eléggé bonyolult részére, mindig lesz olyan körülmény, amelyet ezzel az elmélettel nem tudunk megmagyarázni. A magyarázathoz újabb, tágabb érvényességi körű elméletekre van szükség (amelyek szintén nem lesznek komplettek) és így tovább.

Hasonló a helyzet az elméletek ellentmondástalanságával kapcsolatban is. A II. inkomplettségi tétel szerint ugyanis „valamirevaló” elmélet ellentmondástalansága ugyanezen elmélet eszközeivel nem bizonyítható. Ennek háttere az, hogy az ellentmondástalanság igazolása, ugyanazon elmélet kimerítő kihasználásával, egy körben forgó okoskodás lenne. Ezért az elmélet ellentmondástalansága csak egy másik elmélet keretében igazolható, a másik elmélet ellentmondástalansága egy harmadik elmélet keretében és így tovább. Például az euklideszi geometria ellentmondástalansága nincs bizonyítva, de az igen, hogy ha a valós számok elmélete ellentmondástalan (amelyről ez szintén nincs igazolva), akkor az euklideszi geometria is ellentmondástalan. Vagy ha a hiperbolikus geometria ellentmondástalan, akkor az euklideszi is az, és fordítva. A halmazelméletre minden elmélet ellentmondástalansága visszavezethető, hiszen a halmazelméletben minden elmélet modellezhető. Azonban a halmazelmélet ellentmondástalansága sem bizonyított. *Abszolút ellentmondástalansági* bizonyítás, komoly elméletek esetén, kevés létezik (ilyen például Gentzen bizonyítása az aritmetika ellentmondástalanságáról). Sőt a matematika nagy elméleteire, mai tudásunk szerint, igen reménytelennek tűnik abszolút ellentmondástalansági bizonyítást találni. A relatív ellentmondástalansági bizonyítások láncolata azt jelzi, hogy a matematikában is nehéz végső, megcáfolhatatlan igazságokra jutni.

A Church-tételkör tulajdonképpen annak egzakt formába öntése, hogy a matematika alkotó művelése nem gépiesíthető, az emberi gondolkodás a tudományból nem küszöbölhető ki. A Church-tételek egzakt matematikai tételek. Interpretációjuk azonban hosszú ideig a tudományos érdeklődés középpontjában állt, többek között a bennük szereplő alapfogalom, az eldönthetőség (eldönthetetlenség) miatt. Sok erőfeszítés történt a matematikában azért, hogy megfogalmazzák a „gépies döntési eljárás”, a „kiszámíthatóság” fogalmát. Egymástól függetlenül számos egymással ekvivalens definíció született (például Markov-algoritmus, Turing-gép, lambda-definiálhatóság), amelyek végül is ekvivalensnek bizonyultak a Church-tételekben szereplő eldönthetőségfogalommal, továbbá az alkalmazásoknál is kiállták az idő próbáját.

3.5 A logikai programozásról

A legtöbb programozási nyelvből kiindulva, az illető programozási nyelv tekinthető bizonyítási rendszernek. Az úgynevezett *logikai programozás* egyik kiindulópontja az, hogy fordítva, kiindulva egy alkalmas bizonyítási rendszerből, programozási nyelvet hozzunk létre. A logikai programozás megálmodói szerint a logikai programozás tulajdonképpen egy speciális programspecifikáció, azaz csupán a megoldandó feladatot és az adatokat szükséges leírni (formalizálni, specifikálni), ezután a program „magától” generálódik. A logikai programozás létező fogalma (például a PROLOG) azonban távol esik ettől az elképzeléstől. Speciális eszközöket használva, de meg kell tervezni magát a programot.

Látni fogjuk, hogy az elsőrendű logika túlságosan bő ahhoz (az állításlogika pedig szűk), hogy teljes apparátusát használjuk a logikai programozásban, csak az elsőrendű logika egy *szelete* lesz alkalmas erre a célra.

A következő két fontos kérdést kell megválaszolni:

1. *Az elsőrendű logikának melyik szeletét használjuk a logikai programozásban?*
2. *Milyen bizonyítási rendszert alkalmazzunk, és hogyan fejlesszük tovább e bizonyítási rendszert algoritmussá (vagy keresési stratégiává)?*

(1)

A jelen 3.5 alfejezet 1. részében válaszokat adunk a fenti kérdésekre, de e válaszok hátterével csak a 3.5.2 részben és a 3.5.3 részben foglalkozunk.

Végig erősen építünk a rezolúciós kalkulusra (3.3 rész). Az első részben a fenti, (1)-beli kérdéseket úgy közelítjük meg, hogy a PROLOG-ot, a leginkább elterjedt logikai programozási nyelvet tartjuk szem előtt, amennyiben leírjuk az úgynevezett *definit* klózokkal történő logikai programozást. Ami a fenti 2. kérdést illeti, tárgyaljuk a PROLOG-nál alkalmazott bizonyítási eljárást, amely egy korlátozott rezolúció, az úgynevezett SLD-*rezolúció* (linear resolution with selection function for definite clauses). Érintjük majd az SLD-rezolúcióra vonatkozó keresési stratégia problémáját is.

A második részben az úgynevezett „korrekt válasz” problémával foglalkozunk. Többek között az e problémára adott megoldásnál kamatozik majd az, hogy az elsőrendű logikának csak egy szeletére szorítkozunk. Megmutatjuk ugyanis, hogy amennyiben létezik „korrekt válasz”, akkor igaz az, hogy a választott bizonyítási eljárás segítségével a válasz értelmesen „*kereshető*” is.

A harmadik rész első felében egy általános elmélet, az úgynevezett *induktív definíciók* elmélete felől közelítjük az első két részben vizsgált kérdéseket, ezzel jobban megvilágítva természetüket. A harmadik rész második felében kitekintést adunk a hagyományos programozás és a logikai programozás kapcsolatára, valamint az adatbáziselmélet és a matematikai logika kapcsolatára.
A jelen alfejezetben megfogalmazott teljességi tételeket nem bizonyítjuk.

3.5.1 Logikai programozás definit klózokkal, SLD-rezolúció

Először **állításlogikára** válaszoljuk meg az (1)-beli kérdéseket, majd a válaszokat általánosítjuk elsőrendű logikára. Tegyük fel tehát, hogy a nyelv állításnyelv, és tartalmazza a $\square$ üres klózt. A $\Sigma \vDash \alpha$ következményfogalmat vizsgáljuk. A $\Sigma \vDash \alpha$ helyességének vizsgálatát a következő szerkezetű formulaosztályra szűkítjük, ez a formulaosztály fogja jelenteni a logikai programozásban az állításlogika már említett szeletét.

α legyen egy elemi konjunkció, azaz $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$ alakú valamely $B_1, B_2, \ldots B_n$ állításkonstansokra. Σ-ról (másképpen a *szakmai axiómákról*) feltesszük, hogy formulái minden $j \in J$-re (J rögzített véges)

$$A_j \text{ vagy } F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j$$

alakú formulák, tehát állításkonstansok vagy implikációk különböző hosszúságú konjunkciós előtagokkal. Itt az A_j-ket tekinthetjük $\mathbf{T} \to A_j$ alakú formuláknak, ahol $\mathbf{T}$ jelöli az „igaz” szimbólumot, ha létezik ilyen a nyelvben. A_j-t szokás $\to A_j$-vel is jelölni. Az egyes A_j-k több implikációs formulában is előfordulhatnak.

Tehát a vizsgált $\Sigma \vDash \alpha$ következmény

$$\left\{F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j\right\}_{j \in J} \vDash B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n \tag{2}$$

alakú, ahol a bal oldalon egy-egy j-re $\to A_j$ is megengedett.
Tudjuk, hogy egy $\Sigma \vDash \alpha$ alakú következmény helyességének vizsgálata ekvivalens annak vizsgálatával, hogy a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaznak van-e modellje. Írjuk fel a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$-beli formulákat klóz alakban:

$$A_j \text{ vagy } \neg F_{1j} \vee \neg F_{2j} \vee \ldots \vee \neg F_{j\,m_j} \vee A_j$$

(jelölje ezen klózok összességét Σ'),

$$\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n$$

(jelölje e klózt G).
Jelölje a $\Sigma' \cup \{G\}$ klózhalmazt Λ, tehát legyen

$$\Lambda = \Sigma' \cup \{G\} \tag{3}$$

Bevezetünk néhány elnevezést: A $\neg\alpha$-hoz tartozó $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n$ klózt *célklóznak*, a Σ'-beli $\neg F_{1j} \vee \neg F_{2j} \vee \ldots \vee \neg F_{j\,m_j} \vee A_j$ klózok összességét *programklózoknak* nevezzük, ahol $\neg F_{1j} \vee \neg F_{2j} \vee \ldots \vee \neg F_{j\,m_j}$-ek a programklózok *törzsei*, az A_j-k a programklózok *fejei*, a Σ'-beli A_j-ket pedig *tényklózoknak* nevezzük.

Vegyük észre, hogy az előforduló klózok közös tulajdonsága, hogy *legfeljebb 1 darab negálatlan* állításkonstans fordul elő bennük. A program- és tényklózokban *pontosan* 1 darab negálatlan konstans fordul elő, a célklózban pedig nincs negálatlan konstans. Az ilyen tulajdonságú klózok külön elnevezést kaptak:

1. Definíció. Egy klóz *Horn-klóz*, ha diszjunkciós tagjai között legfeljebb 1 darab negálatlan állításkonstans fordul elő. Egy Horn-klóz *definit* klóz, ha benne *pontosan* 1 darab negálatlan állításkonstans fordul elő.

Tehát a program- és tényklózok *definit klózok*.

Az (1)-beli problémákkal kapcsolatban elmondhatjuk, hogy ha a $\Sigma \vDash \alpha$ alakú következményt $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ alakban vizsgáljuk, az utóbbi formulahalmazt pedig klózhalmazzal reprezentáljuk, akkor vizsgálatainknál *olyan kiindulási formulákra szorítkozunk, amelyek Horn-klózokkal* reprezentálhatók. Másképpen: a „klóznyelvben" gondolkodva csak Horn-klózokkal dolgozunk.

Mivel klózokban gondolkodunk, ezért kézenfekvő, hogy az alkalmazott bizonyítási eljárás a rezolúció legyen, többek között azért is, mert a Horn-klózok olyan tulajdonságúak, *hogy Horn-klózok rezolvense is Horn-klóz*. Tehát *ha Horn-klózokból indulunk ki a rezolúciónál, akkor az eljárás nem vezet ki a Horn-klózok osztályából*. Vegyük észre továbbá, ha célklózt rezolválunk, akkor a rezolvensben sem kapunk negálatlan literált, tehát a rezolvens is célklóz alakú.

Miután a rezolúciós eljárást klózok egy speciális osztályára kívánjuk alkalmazni, érdemes az általános rezolúciós eljárást is megszorítani, az általános rezolúciónak ezt a változatát hívjuk majd SLD-*rezolúciónak*.

Az SLD-rezolúció egyetlen *következtetési szabálya* az **állításrezolvens-képzés**.

Hasonlóan az általános rezolúciós esethez, a $\Sigma \vDash \alpha$ következmény helyességét a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaz, másképpen a (3)-beli Λ klózhalmaz alább definiálandó SLD-**cáfolhatóság** fogalmával vizsgáljuk. Szemben a rezolúció általános cáfolhatóság fogalmával, a cáfolhatóságot most egy kvázialgoritmus segítségével definiáljuk.

2. Definíció. (SLD-cáfolhatóság állításlogikára.) A (3)-beli Λ klózhalmaz cáfolható, ha a következő eljárással az üres klóz levezethető:

Első lépés:

Tekintsük a G célklózban az első literált, és kíséreljük meg G-t e literál szerint rezolválni *valamely* programklózzal vagy tényklózzal úgy, hogy a nyert rezolvensnél utóbbiak literáljai előzzék meg a célklóz literáljait. Két eset van:

a) Ha a rezolválás lehetséges, akkor cseréljük ki G-t a kapott rezolvenssel, legyen az eredmény G_1. Ha G_1 az üres klóz, akkor az eljárás véget ér, ha pedig nem az üres klóz, akkor tekintsük a következő lépésnél G_1-et G helyett az *aktuális* célklóznak.

b) Ha a *rezolválás nem lehetséges*, akkor az eljárás véget ér, az üres klóz nem levezethető.

Általános lépés:

Jelölje az *aktuális* célklózt K. Kíséreljünk meg rezolválni K *első* literálja szerint valamelyik programklózzal vagy tényklózzal. Két eset van:

a) Ha a *rezolválás lehetséges*, akkor legyen K helyett az új aktuális célklóz a rezolvens, kivéve ha K az üres klóz, ez esetben az eljárás véget ér.

b) Ha a *rezolválás nem lehetséges*, akkor töröljük K-t, és tekintsük újra azt a klózt aktuális célklóznak, amelyet K-ra cseréltünk előzőleg („visszalépés"). E klóz első literálját kíséreljük meg rezolválni egy olyan program- vagy tényklózzal, amellyel ezt a klózt még nem rezolváltuk. Ha ez lehetséges, akkor kövessük az a)-ban leírtakat, ha pedig nem lehetséges, akkor alkalmazzunk újabb „visszalépést".

Vegyük észre, hogy az eljárás véget ér (tehát eldönthető), mert egyrészt véges sok program- vagy tényklóz van, másrészt a célklózban csak véges sok negált állításkonstans szerepel, ezért csak véges sok rezolvensképzés hajtható végre.

A fenti eljárás teljes:

3. Tétel. (SLD-állításrezolúció teljességi tétel.) A (3)-beli Λ klózhalmaz *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha Λ állítás SLD-rezolúcióval *cáfolható*.

A tételt nem bizonyítjuk. A tételnek közvetlen következménye a (2)-beli következményfogalomra vonatkozó alábbi teljesség:

4. Tétel. A (2)-beli $\left\{F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j\right\}_{j\in J} \vDash B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$ fennáll akkor és csak akkor, ha a (3)-beli Λ klózhalmaz SLD-rezolúcióval *cáfolható* állítás.

Az SLD-állításrezolúciós levezetés úgynevezett *inputrezolúció*. Az inputrezolúció lényege, hogy a kiindulásul vett klózok közül valamelyik, például egy K klóz, kitüntetett szerepet játszik (SLD-rezolúciónál ez a célklóz). A K klózt valamilyen szabály szerint a többi klóz valamelyikével rezolváljuk, majd K-t kicseréljük a kapott rezolvenssel, K_1-gyel, tehát K_1 lép K helyébe. Majd K_1-et megint rezolváljuk a többi klóz valamelyikével az említett szabály szerint, majd az így kapott rezolvens kerül K_1 helyébe, „visszalépésnél" visszatérhetünk már felhasznált célklózokhoz, és így tovább. *A céklózt kivéve, az eljárásnál minden klóz változatlan marad.* Az általános inputrezolúció nem teljes. Erre példaként tekintsük a $\{A \vee B,\ A \vee \neg B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$ klózhalmazt. E klózhalmaz nyilván nem kielégíthető. Rögzítsük például $A \vee B$-t, és ezzel, valamint a rezolválások eredményeivel rezolváljuk a többi klózt. Nyilván nem kaphatjuk meg az ürest klózt.

Ami az (1)-beli 2. kérdésnek a keresési stratégia részét illeti, az SLD-rezolúciónál a keresési teret legegyszerűbben egy fával, a *keresési fával* szemléltethetjük. E fánál a gyökérben a célklóz áll, és a gyökértől annyi él vezet, ahányféleképpen rezolválni tudjuk a célklózt, első literálja szerint, a program- vagy tényklózokkal. Az első szinten elhelyezkedő csúcsokon tehát aktuális célklózok találhatók, és minden lehetséges aktuális célklózt tartalmazó csúcsból annyi él vezet, ahányféleképpen rezolválni tudjuk az aktuális célkózt, első literálja szerint, a program- vagy tényklózokkal, és így tovább. Nyilvánvaló, hogy a keresési stratégia ezen fának egy bejárási stratégiája. A fa bejárásánál egyetlen nemdeterminisztikus lépés van, annak a program- vagy tényklóznak a kiválasztása, amely szerint az aktuális célklózt rezolváljuk. A keresési stratégia problémájára még visszatérünk.
Megjegyezzük, hogy az *állításrezolúciót* a gyakorlatban ritkán használjuk, tárgyalása elsősorban az elsőrendű eset előkészítésére szolgál.

1. Példa. *Igazoljuk, hogy* $\{P, Q, S \to R, S\} \vDash P \wedge Q \wedge R$*!*

Tényklózok: P, Q, S. Programklóz: $\neg S \vee R$.
A célklóz: $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$.

A levezetésnél az első helyre mindig a célklózt írjuk.
Levezetés:

$$\begin{array}{lllll}
\neg P \vee \neg Q \vee \neg R & \neg Q \vee \neg R & \neg R & \neg S & \Box \\
\;P & & & & \\
\;Q & & & & \\
\;S & & & & \\
\neg S \vee R & & & &
\end{array}$$

Az üres klózt levezettük, tehát a következtetés helyes.

2. Példa. *Igazolja, hogy* $\{P_3,\ P_4,\ P_3 \wedge P_4 \to P_1,\ P_3 \to P_2\} \vDash P_1 \wedge P_2$*!*

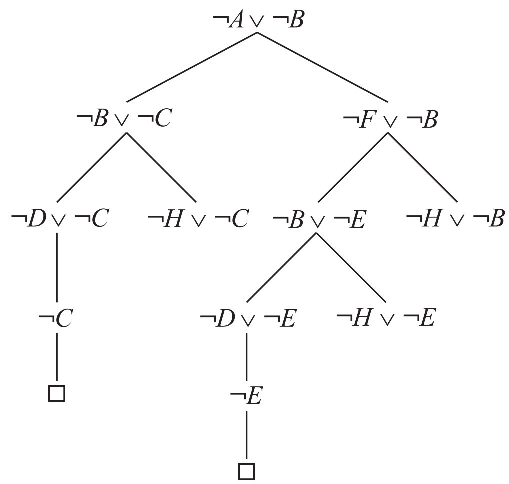
Tényklózok: P_3, P_4. Programklózok: $\neg P_3 \vee \neg P_4 \vee P_1$, $\neg P_3 \vee P_2$.
Célklóz: $\neg P_1 \vee \neg P_2$
Levezetés:

$$\begin{array}{llllll}
\neg P_1 \vee \neg P_2 & \neg P_3 \vee \neg P_4 \vee \neg P_2 & \neg P_4 \vee \neg P_2 & \neg P_2 & \neg P_3 & \Box \\
\;P_3 & & & & & \\
\;P_4 & & & & & \\
\neg P_3 \vee \neg P_4 \vee P_1 & & & & & \\
\neg P_3 \vee P_2 & & & & &
\end{array}$$

3. Példa. *Adja meg az alábbi következményhez tartozó keresési fát!*

$$\{B \wedge C \to A,\ F \to A,\ B \wedge E \to F,\ D \to B,\ D,\ H \to B,\ H \to F,\ E,\ C\} \vDash A \wedge B$$

A keresési fa a következő:



A csúcsokon az aktuális célklózokat tüntettük fel. Azt nem tüntetjük fel, hogy a célklózt melyik klózzal rezolváljuk.

A következmény tehát helyes, mivel az üres klóz levezethető, sőt két lehetséges levezetése létezik. Ha a keresési stratégia olyan, hogy például a $\neg H \vee \neg C$, vagy $\neg H \vee \neg E$, vagy $\neg H \vee \neg B$ levelekhez érkezünk, akkor „visszalépés” szükséges.

Megjegyezzük, hogy a csúcsokon található klózokat gyakran *tömören jelöljük*, például $\neg A \vee \neg B$-t AB-vel, $\neg B \vee \neg C$-t BC-vel stb.

* * *

Az állításlogika után rátérünk az **elsőrendű logika** esetére. Ez természetesen általánosítása az állításesetnek, ezért csak az *eltéréseket* említjük.

Hasonlóan az általános elsőrendű rezolúcióhoz, egyenlőséget *ne tartalmazzon* a nyelv, de tartalmazzon legalább 1 darab konstansszimbólumot.

A $\Sigma \vDash \alpha$ következményfogalmat vizsgáljuk. α legyen $\exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ alakú valamely $B_1, B_2, \ldots B_n$ elsőrendű atomi formulákra, Σ-ról (azaz a szakmai axiómákról) feltesszük, hogy formulái minden $j \in J$-re (J rögzített véges)

$$\forall A_j \text{ vagy } \forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j)$$

alakúak, ahol az A_j-k, illetve F_{kj}-k atomi formulák. Itt az A_j-ket tekinthetjük $\mathbf{T} \to A_j$ alakú formuláknak, ahol $\mathbf{T}$ jelöli az „igaz” szimbólumot, ha létezik ilyen a nyelvben. Szokás A_j-t röviden $\to A_j$-vel jelölni.

Tehát a vizsgált következmény

$$\Big\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j)\Big\}_{j \in J} \vDash \exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \tag{4}$$

alakú, ahol a bal oldalon egy-egy j-re $\to A_j$ is megengedett.

Tudjuk, hogy egy $\Sigma \models \alpha$ alakú következmény helyessége ekvivalens azzal, hogy a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen. Legyenek a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$-beli formulákhoz tartozó elsőrendű klózok:

$$A_j \text{ vagy } \neg F_{1j} \vee \neg F_{2j} \vee \ldots \vee \neg F_{j\,m_j} \vee A_j$$

(jelölje ezen klózok összességét Σ'),

$$\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n$$

(jelölje e klózt G).

Jelölje a $\Sigma' \cup \{G\}$ klózhalmazt Λ, tehát legyen

$$\Lambda = \Sigma' \cup \{G\}\,. \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy (4) *olyan alakú, hogy a* $\exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ *konklúzió negálása és az erős Skolem-formák felírása után a* (4)*-beli következményhez rendelt* (5) *-beli klózok szerkezete pontosan a* (3) *állításesethez hasonló.* Ennek megfelelően rájuk is használjuk az állításlogika esetére bevezetett speciális elnevezéseket.

Horn-klóz az elsőrendű esetben is olyan klóz, amelynek legfeljebb 1 darab negálatlan literálja van. Vegyük észre, hogy a Λ-beli klózok most is Horn-klózok, és mindaz, amit az állításesetben Horn-klózokról elmondtunk, most is érvényes. Ezért elsőrendű esetben is kézenfekvő egy speciális rezolúciót, az úgynevezett *elsőrendű* SLD-*rezolúciót* választani bizonyítási eljárásnak.

Hasonlóan az állításesethez, a $\Sigma \models \alpha$ következmény helyességét a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaz, másképpen az (5)-beli Λ klózhalmaz *elsőrendű* SLD-*cáfolhatósága fogalma* segítségével vizsgáljuk.

Az *elsőrendű* SLD-*rezolúciós eljárás* és az SLD-cáfolhatóság fogalma hasonló az állításlogikai SLD megfelelő fogalmaihoz. Az eltérés, definíció szerint, csupán abban van, hogy az állításrezolvens-képzés helyett egy olyan *speciális* elsőrendű *összetett rezolvensképzést* használunk, amelyben az illesztést mindig *csak két* atomi formulára alkalmazzuk, nevezetesen egy programklóz fejére (vagy tényklózra) és a célklóz kiszemelt tagjában tartalmazott atomi formulára.
Hasonlóan az általános rezolúcióhoz, lényeges különbség van az állítás SLD-rezolúció és az elsőrendű SLD-rezolúció között a tekintetben, hogy az utóbbi eljárás nem biztos, hogy befejeződik. Ugyanis elsőrendű esetben az összetett rezolvensképzés során (pontosabban az illesztés során) *új atomi formulák lépnek fel*, vagyis bizonyos értelemben *nem egy véges* formulahalmazzal dolgozunk.

Elsőrendű SLD-rezolúcióra is igaz a teljesség:

5. Tétel. (Elsőrendű SLD-rezolúció teljességi tétel.)

> Az (5)-beli Λ klózhalmaz lezártja *kielégíthetetlen* akkor és csak akkor, ha Λ elsőrendű SLD-rezolúcióval *cáfolható*.

A tételt nem bizonyítjuk. A tételnek közvetlen következménye a (4)-beli következményfogalomra vonatkozó alábbi teljesség:

6. Tétel.

A (4)-beli $\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j)\right\}_{j \in J} \vDash \exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ fennáll akkor és csak akkor, ha az (5)-beli Λ klózhalmaz cáfolható elsőrendű SLD-rezolúcióval.

Ezután röviden kitérünk a (1)-beli 2. kérdés második részére, a keresési stratégiára, illetve annak determinisztikussá tételére.

Az SLD nemdeterminisztikus eljárásának determinisztikussá tétele már elvezet a logikai programozás legelterjedtebb nyelvéhez, a PROLOG-hoz.

A célklózban annak az atomi formulának a kiválasztása, amely szerint éppen rezolválunk, tehát úgy definiált, hogy legyen mindig az aktuális célklóz bal oldali első literálja (balról jobbra szabály). Igazolható, hogy a kiválasztás ezen módjának *nincs hatása* az eljárás teljességére. Az SLD-rezolúciós eljárásban, hasonlóan az állításesethez, *egyetlen nemdeterminisztikus* mozzanat található: annak a program- vagy tényklóznak a kiválasztása, amelynek fejével a célklóz soron következő literálját rezolváljuk. E kiválasztás módja már *befolyásolhatja* mind a teljességet, mind a gyorsaságot.

Általában elmondható, *ha a teljességhez ragaszkodunk, akkor ez a gyorsaság rovására történik, és fordítva, ha a gyorsaságot tartjuk elsősorban szem előtt, akkor általában le kell mondanunk a teljességről* (ez utóbbi történik a PROLOG-ban is). Egyik kézenfekvő választás az, hogy a program- és tényklózok felsorolásának egy rögzített sorrendjében végezzük el a kiválasztást. Mindezt azonban itt nem részletezzük.

Megjegyezzük, ha SLD-rezolúció helyett bizonyítási rendszerként például egységrezolúciót alkalmazunk a Λ klózhalmazra, akkor már a PROLOG-tól *eltérő* logikai programozási nyelvet kapunk.

A PROLOG nyelve *eltér a szokásos elsőrendű logikai nyelvtől*:

Az individuumváltozókat nagy betűkkel kezdődő sorozat (string), a konstansokat kisbetűkkel kezdődő sorozat jelöli. Így például az F állításkonstanst f-fel jelöljük, vagy a $P(x,y)$ atomi formulát $p(X, Y)$-nal.

Az $A \to B$ implikáció jelölés helyett a fordított jelölést, a $B \leftarrow A$-t használjuk, valamint a $\leftarrow$ helyett a :− szimbólumsorozatot. Tehát $A \to B$ jelölése $b :- a$. A konjunkciónak a $\wedge$ jelét nem használjuk, ehelyett a konjunkciós tagokat vesszővel választjuk el. Az eddigiek értelmében, tehát a $F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j$ programformulát így jelöljük:

$$a_j :- f_{1j}, f_{2j}, \ldots f_{j\,m_j}$$

E jelölés elfajult eseteiként kapjuk az A_j tényklózok jelölését:

$$a_j :-$$

(vagy egyszerűen a_j),
illetve a $\neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ célklóz jelölését:

$$:-\ b_1, b_2, \ldots b_n$$

3.5.2 Korrekt válasz probléma

Az alkalmazásoknál a

$$\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \rightarrow A_j)\right\}_{j \in J} \models \exists x_1 \ldots \exists x_p (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$$

(4) szerkezetű következmény vizsgálatánál nemcsak a helyesség vizsgálata a kérdés, hanem a következő probléma is (úgynevezett „*korrekt válasz probléma*”):

1. *A* (4) *szerkezetű következmény fennállása esetén fennáll-e a nála erősebb*
$$\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \rightarrow A_j)\right\}_{j \in J} \models B(x_1/t_1, \ldots x_p/t_p) \qquad (6)$$
következmény a nyelv szabad változó nélküli valamely $t_1, \ldots t_p$ *termjeire, ahol* B *jelöli* $B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$*-et?*
2. *Ha* 1. *igaz, akkor melyek ezek a termek?*

Egy (6)-beli alkalmas szimultán helyettesítést *korrekt válasz helyettesítésnek* nevezünk.

Először rámutatunk a problémában rejlő nehézségre.

Ha teljesül (6), akkor nyilván teljesül (4) is, ugyanis a Skolem-formák miatt $\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \rightarrow A_j)\right\}_{j \in J}$ teljesülése J végessége miatt ekvivalens egy $\forall P$ alakú formula teljesülésével, ahol P már kvantormentes, és ha $\forall P \models\ B(x_1/t_1, \ldots x_p/t_p)$, akkor nyilván $\forall P \models\ \exists B$. Tehát a (4) és a (6) szerkezetű következmények teljesülése, korrekt válasz létezése esetén, *ekvivalens*.

Viszont fordítva, ilyen általánosságban, amennyiben eltekintünk a résztvevő formulák szerkezétől, (4)-ből nem következik (6). Tekintsük ugyanis a (4) alakú $\forall P \models \exists B$ következményt. Ez ekvivalens $\forall P \wedge \neg\exists B$ kielégíthetetlenségével, azaz $\forall(P \wedge \neg B)$ kielégíthetetlenségével. A Herbrand-tétel értelmében tudjuk, hogy utóbbi ekvivalens azzal, hogy valamely véges számú s_1, $s_2, \ldots s_k$ helyettesítésekre szabad változó nélküli termekkel, az $s_1(P \wedge \neg B) \wedge s_2(P \wedge \neg B) \wedge \ldots \wedge s_k(P \wedge \neg B)$ formulahalmaz, azaz

$(s_1 P \wedge \ldots \wedge s_k P) \wedge (s_1 \neg B \wedge \ldots \wedge s_k \neg B)$, azaz $(s_1 P \wedge \ldots \wedge s_k P) \wedge \neg(s_1 B \vee \ldots \vee s_k B)$ kielégíthetetlen, vagyis $s_1 P \wedge \ldots \wedge s_k P \models s_1 B \vee \ldots \vee s_k B$ teljesül.

Tehát $\forall P \models \exists B$-ből következik, hogy valamely véges sok s_1, $s_2, \ldots s_k$ helyettesítésekre $\forall P \models s_1 B \vee \ldots \vee s_k B$ teljesül. (6) azonban $\forall P \models s\,B$ alakú. Ha P-ről semmi mást nem feltételezünk, csak azt, hogy kvantormentes, akkor az utóbbi alakú következmény teljesülése általában *nem következik*:

Például ha P a $\neg Q(a) \vee \neg Q(b)$ formula, és $\exists B$ $\exists x \neg Q(x)$ alakú, és a nyelv nem tartalmaz más függvényszimbólumot, csupán az a és b konstansokat, akkor $\forall P \models \exists B$ helyes, de semmilyen t termre nem igaz, hogy

$$\neg Q(a) \vee \neg Q(b) \models \neg Q(t)$$

helyes.

Azonban P, mint tudjuk, *speciálisan definit alakú klózokkal azonosítható*, és ez döntő szerepet játszik abban, hogy a (6) problémára majd pozitív válasz adható.

* * *

Néhány, a korrekt válasz probléma megválaszolásához szükséges fogalmat, tételt ismertetünk. Fontos szerepet fog játszani a 2.4.3-ban már definiált fogalom, a Herbrand-modell fogalma.

Legyen $\mathcal{T}$ *egyenlőségmentes, legalább 1 konstanst tartalmazó* elsőrendű nyelv. Tekintsük a $\mathcal{T}$ nyelvhez tartozó Herbrand-univerzumot, H-t. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ két $\mathcal{T}$ típusú Herbrand-modell.

$\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ metszetén, *$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$-n értjük azt a $\mathcal{T}$ típusú modellt, amelynek alaphalmaza a $\mathcal{T}$-hez tartozó Herbrand-univerzum, az egyes relációk interpretációi pedig a $\mathcal{H}_1$-en, illetve $\mathcal{H}_2$-n vett interpretációk metszetei.*

Hasonlóan definiálható tetszőleges sok Herbrand-modell metszete is.

Igaz a definit klózok és Herbrand-modellek kapcsolatára vonatkozó következő tétel:

7. Tétel. Definit klózok tetszőleges Π halmaza lezártjának létezik Herbrand-modellje. Π lezártja összes Herbrand-modelljeinek metszete is modellje Π lezártjának (Π „minimális” Herbrand-modellje).

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy Π lezártjának van modellje, mégpedig az a Herbrand-modell, amelyben az összes lehetséges atomi formula igaz a Herbrand-univerzumon.

Megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ két Herbrand-modellje Π lezártjának, akkor metszetük, $\mathcal{H}$ is modellje.

Ugyanis indirekt tegyük fel, hogy például a $\gamma = \forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j)$ programformula igaz $\mathcal{H}_1$-en és $\mathcal{H}_2$-n is, de hamis $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$-n.

Utóbbi azt jelenti, hogy az individuumváltozók valamely σ értékelésére γ hamis $\mathcal{H}$-n, azaz $(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j)^\sigma = \downarrow$ a σ értékelésre, azaz klózalakot használva $(\neg F_{1j} \vee \neg F_{2j} \vee \ldots \vee \neg F_{j\,m_j} \vee A_j)^\sigma = \downarrow$, azaz

$$F_{1j}^\sigma = \uparrow,\ F_{2j}^\sigma = \uparrow, \ldots F_{j\,m_j}^\sigma = \uparrow,\ A_j^\sigma = \downarrow. \tag{7}$$

Mivel az atomi formulák interpretációi $\mathcal{H}_1$-en és $\mathcal{H}_2$-n is bővítései a $\mathcal{H}$-belieknek, ezért

$$F_{1j}^\sigma = \uparrow,\ F_{2j}^\sigma = \uparrow, \ldots F_{j\,m_j}^\sigma = \uparrow \tag{8}$$

$\mathcal{H}_1$-en és $\mathcal{H}_2$-n is teljesül σ-ra.

Továbbá, mivel $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ is modellje γ-nak, ezért $(\neg F_{1j} \vee \neg F_{2j} \vee \ldots \vee \neg F_{j\,m_j} \vee A_j)^\sigma = \uparrow$ speciálisan σ-ra is $\mathcal{H}_1$-en és $\mathcal{H}_2$-n, vagyis (8) miatt $A_j^\sigma = \uparrow$ $\mathcal{H}_1$-en és $\mathcal{H}_2$-n is. Ezért $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ metszetén, $\mathcal{H}$-n is $A_j^\sigma = \uparrow$. Utóbbi ellentmond (7)-nek.
A két modell esetéhez hasonlóan igazolható, hogy Π lezártja akárhány Herbrand-modelljének metszete is modellje Π lezártjának („minimális” Herbrand-modell).

■

Vegyük észre, hogy a bizonyításban lényegesen kihasználtuk azt, hogy Π *definit* klózok halmaza. Egy Herbrand-modell nyilván jellemezhető egy a nyelvhez tartozó *pozitív diagrammal*, a minimális modell pedig egy ilyen *legszűkebb* pozitív diagrammal.
A minimális Herbrand-modell meghatározása fontos kérdés. Megmutatható, hogy egy Π definit klózhalmaz által definiált minimális Herbrand-modellhez tartozó legszűkebb pozitív diagram tekinthető úgy, mint az alább definiált operátor „*fixpontja*”. Szokták ezért a minimális Herbrand-modellt a *definit klózhalmaz fixpontjának* is nevezni. Megmutatható, hogy ez a fixpont rekurzív felsorolható halmaz. Hasonló igaz a nyelv egyes relációinak a minimális Herbrand-modellen vett interpretációjára is, tehát ezek is tekinthetők egy fixpontnak, és kiszámíthatóak.
A szóban forgó operátor az alábbi T „szemantikai következmény operátor”, amely egy adott Π definit klózhalmaz esetén a nyelv zárt atomi formuláinak halmazán (a *Herbrand-bázison*) definiált:

Legyen K a Σ'-beli klózhalmazban szereplő bizonyos atomi formulák alapelőfordulásainak egy halmaza. Ekkor

$$T(K) = \left\{ A_j^\sigma : \forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j) \in \Pi \text{ és } F_{1j}^\sigma,\, F_{2j}^\sigma, \ldots F_{j\,m_j}^\sigma \in K \right\},$$

ahol σ egy individuumváltozó-értékelés a Herbrand-univerzumon, tehát A_j^σ, F_{1j}^σ, F_{2j}^σ, $\ldots F_{j\,m_j}^\sigma$ alapelőfordulások. Ha K az üres halmaz, akkor $T(K)$ pontosan a tényklózok alapelőfordulásait tartalmazza.

Tekintsük a T operátor segítségével, teljes indukcióval definiált következő $T^{(0)}$, $T^{(1)}$, $\ldots T^{(\omega)}$ halmazsorozatot:

$$\begin{aligned} T^{(0)} &= \emptyset, \\ T^{(1)} &= T(\emptyset), \\ &\vdots \\ T^{(n+1)} &= T(T^{(n)}), \\ &\vdots \\ T^{(\omega)} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{(n)}. \end{aligned}$$

8. Tétel. $T^{(\omega)}$ pontosan a Π definit klózhalmaz lezártja minimális Herbrand-modelljének pozitív diagramja.

A tételt nem bizonyítjuk.

A következő tételben is lényegesen „kamatozik” az, hogy a definit klózok osztályára szorítkoztunk. Legyen Π most is definit klózok egy halmaza. Legyen $\mathcal{H}$ Π lezárásának, $\overline{\Pi}$-nek legszűkebb Herbrand-modellje, és D a nyelv egy szabad változó nélküli atomi formulája.

9. Tétel. $\mathcal{H} \vDash D$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\Pi} \vDash D$.

Bizonyítás. Igazak a következő ekvivalenciák:
$\overline{\Pi} \vDash D$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\Pi} \cup \{\neg D\}$ kielégíthetetlen. A 2.4.3 rész 10. Tétel következménye miatt utóbbi akkor és csak akkor igaz, ha $\overline{\Pi} \cup \{\neg D\}$-nak nincs Herbrand-modellje. Utóbbi azt jelenti, hogy $\neg D$ hamis $\overline{\Pi}$-nek minden Herbrand-modelljén. A $\mathcal{H}$ minimális Herbrand-modell definíciója miatt ez ekvivalens azzal, hogy D igaz $\mathcal{H}$-n. Ezt kellett igazolni. ■

$\mathcal{H}$-n tehát csak azok az atomi formulák igazak, amelyek „szükségképpen” igazak, tehát igazak, ha a $\overline{\Pi}$-beli formulák igazak. Az állítás nyilván egyfajta „komplettséget” jelez a $\mathcal{H}$ modellre és a $\overline{\Pi}$-beli szakmai axiómákra nézve. A tétel állítása triviálisan általánosítható arra az esetre, amikor a D atomi formula $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$ alakú, ahol a B_i-k szintén zárt atomi formulák. Ez is indokolja majd azt, hogy a célklózok magját a „kérdésnél” $B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$ alakban kezeljük (utóbbi alak azért is volt előnyös, mert negációja Horn-klóz).

A fenti előkészítés után megfogalmazhatjuk a (6) problémára választ adó tételt:

10. Tétel. (Korrekt válasz egzisztenciája)

> A (4)-beli $\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \rightarrow A_j)\right\} \vDash \exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ fennáll akkor és csak akkor, ha léteznek a nyelvnek olyan $t_1, \ldots t_p$ *szabad változó nélküli* termjei, hogy (6) teljesül, azaz
> $\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \rightarrow A_j)\right\} \vDash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)(x_1/t_1, \ldots x_p/t_p)$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (4)-beli következmény igaz. Mint (5)-ben, jelölje most is Σ' a (4)-beli premisszákhoz tartozó klózhalmazt. Alkalmazzuk a 7. Tételt $\Pi = \Sigma'$ választással, és legyen $\mathcal{H}$ a minimális Herbrand-modell. A feltételből következik, hogy $\exists(B_1 \wedge B_2 \ldots \wedge B_n)$ igaz $\mathcal{H}$-n.

$\exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ igaz a minimális $\mathcal{H}$ Herbrand-modellen akkor és csak akkor, ha az individuumváltozóknak valamely σ értékelésére a Herbrand-univerzumon $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)^\sigma = \uparrow$, azaz $B_1^\sigma = \uparrow, \ldots B_n^\sigma = \uparrow$. Ha a σ-nak megfelelő termeket t_1, $\ldots t_p$ jelöli a nyelvben, és a 9. Tételbeli $\overline{\Pi}$-nek a Σ'-hoz tartozó $\overline{\Sigma}$ zárt klózhalmazt választjuk, akkor a 9. Tétel szerint $B_1^\sigma = \uparrow, \ldots, B_n^\sigma = \uparrow$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\Sigma} \vDash B_1^\sigma, \ldots \overline{\Sigma} \vDash B_n^\sigma$.

Ez utóbbi akkor és csak akkor áll fenn, ha $\Sigma' \vDash (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)^\sigma$. ■

A következő tétel erősebb a fentinél, mert a korrekt válasz konstrukciójára is útmutatást ad, tehát választ ad az e rész elején felvetett 2. kérdésre:

11. Tétel. (Korrekt válasz konstrukciója.)

> Ha a (4)-beli $\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j)\right\} \models \exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ fennáll, akkor az (5)-beli klózhalmaz cáfolatakor alkalmazott SLD-eljárás során, az $x_1, \ldots x_p$-kre rendre alkalmazott helyettesítések kompozíciójaként, végeredményként olyan $t_1, \ldots t_p$ *termek adódnak*, amelyek helyessé teszik (6)-ot.

$\left\{\forall(F_{1j} \wedge F_{2j} \wedge \ldots \wedge F_{j\,m_j} \to A_j)\right\} \models \exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ fennállása a 6. Teljességi tétel miatt implikálja (5) cáfolhatóságát. A 11. Tétel igazolását az Olvasóra bízzuk.

Megemlítünk még egy a logikai programozással kapcsolatos fontos problémát, a *negáció problémáját*. Ezen azt értjük, hogy mivel a célklóz magjában csak pozitív literálok fordulhatnak elő, ezért például negált atomi formulát, vagy ilyent tartalmazó konjunkciót, bizonyítani a kalkulussal nem tudunk.

E problémára az egyik megoldás az úgynevezett „*zárt világ feltétel*” feltételezése. Ez azt mondja ki, hogy *csakis azok a zárt atomi formulák tekinthetők igaznak, amelyek az alkalmazott (teljes) bizonyítási eljárással (például SLD-rezolúció) elvileg bizonyíthatók*, a többi atomi formula tehát hamisnak tekintendő. Ezt szemantikára lefordítva: mindarról, ami nem „szükségszerűen igaz” (azaz nem logikai következménye az axiómáknak), arról feltételezzük, hogy hamis. Szituációtól és alkalmazástól függ, hogy használni kívánjuk-e a zárt világ feltételt axiómaként.

A negáció problémájának léteznek más kezelései is, általában a probléma elvezet a nemklasszikus logikákhoz, így például az intuicionista és a nemmonoton logikákhoz.

A korrekt válasz problémával kapcsolatos példákat mutatunk:

4. Példa.

Legyen a Σ feltételhalmaz (logikai program) a következő:

$\{\forall x(R(x,fx) \to S(gx)),\ \forall x(R(x,fb) \to S(gx)),\ R(a,fb),\ R(b,fb)\}$

a) Adja meg a Σ-hoz tartozó Herbrand-univerzumot,

b) Adja meg a Σ-hoz tartozó legszűkebb Herbrand-modellt!

c) Vizsgálja, hogy következménye-e Σ-nak a $\exists u(R(a,fb) \wedge S(u))$ formula, és ha igen, akkor adjon meg egy korrekt válasz helyettesítést!

a) $\{a, b, fa, fb, ga, gb, ffa, gga, fga, gfa, ffb, ggb, fgb, gfb, \ldots\}$

b) $\mathcal{H}$ alaphalmaza: $\{a, b\}$.

$\mathcal{H}$-n igazak a következő formulák: $R(b,fb)$, $R(a,fb)$, $S(ga)$, $S(gb)$, a többi atomi formula értékelése tetszőleges lehet.

c) Tekintsük a következő levezetést:

$$\begin{array}{llll}
\neg R(a,fb)\vee\neg S(u) & \neg S(u) & \neg R(x,fx) & \square\\
\neg R(x,fx)\vee S(gx) & & u/gx & \\
\neg R(y,fb)\vee S(gy) & & & \\
\quad R(a,fb) & & & \\
\quad R(b,fb) & & & s/b
\end{array}$$

A szóban forgó formula tehát valóban következmény, és egy korrekt válasz helyettesítés: u/gb (vegyük észre, hogy a levezetésben nem használtuk ki a második premisszát).

5. Példa. *Vizsgálja meg SLD-rezolúció segítségével, hogy helyes-e az alábbi következmény? Ha igen, akkor keresse meg a korrekt válasz helyettesítést!*

$$\{\forall x\,\mathrm{Add}(x,0,x),\ \forall x\forall y\forall z\,\mathrm{Add}(x,y,z)\to\mathrm{Add}(x,Sy,Sz)\}\vDash\exists u\,\mathrm{Add}(S0,u,SS0),$$

ahol a nyelv az aritmetika nyelvének része, és Add *háromváltozós reláció.*

Negáljuk a „kérdést”, keressük meg a premisszákat alkotó klózokat, és végezzünk szeparálást:

a)
$$\begin{array}{llll}
\neg\,\mathrm{Add}(S0,u,SS0) & \neg\,\mathrm{Add}(S0,y,S0) & \neg R(xfx) & \square\\
\neg\,\mathrm{Add}(x,y,z)\vee\mathrm{Add}(x,Sy,Sz) & x/S0,u/Sy,z/S0 & & \\
\mathrm{Add}(v,0,v) & & v/S0,y/0 &
\end{array}$$

b) A korrekt válasz helyettesítés: $u/S0$

6. Példa. *Formalizálja az alábbi következtetést. Vizsgálja SLD-rezolúcióval helyességét, és keresse meg a korrekt válasz helyettesítést!*

„Minden rockzenész gazdag. Ignác tanár. Mindenki rockzenész. Tehát létezik gazdag tanár.”

a) A formalizálás:

$\{\forall x(Rx\to Gx), TI, \forall y Ry\}\vDash\exists x(Tx\wedge Gx)$,

ahol Rx, Gx, Tx jelentése rendre az, hogy „x rockzenész”, „x gazdag”, és „x tanár”, I jelentése pedig „Ignác”.

Negáljuk a célt, használjunk erős Skolem-alakokat, és szeparáljuk a változókat. A kezdő klózok és a levezetés a következő:

$$\begin{array}{llll}
\neg Tx\vee Gx & \neg GI & \neg RI & \square\\
\neg Ry\vee Gy & & y/I & \\
\quad TI & x/I & & \\
\neg Rz & & & z/I
\end{array}$$

b) A korrekt válasz tehát x/I.

3.5.3 Induktív definíciók. Kapcsolatok a hagyományos programozással és az adatbázisokkal

1. Induktív definíciók. E rész első felében egy általános elmélet keretében, az úgynevezett *induktív definíciók* formális elméletébe illesztve keressük az eddig felvetett fontosabb problémákra a válaszokat (az induktív definíciók ezen elmélete nem tévesztendő össze az 1.1.3-ban tárgyalt, indukcióra vonatkozó, metadefiníciókkal). Megvilágítjuk, hogy miért érdemes éppen definit klózokra szorítkozni a logikai programozásban az axiómák felvételekor, és azt, hogy más alakú formulaosztályok is szolgálhatnak a logikai programozás alapjául. Az e részben közölt eredményeket nem bizonyítjuk.

Tekintsünk egy elsőrendű, egyenlőséget tartalmazó $\mathcal{L}'$ nyelvet. E nyelvnek a 3.5.1-ben és 3.5.2-ben használt nyelv felel meg, azzal a különbséggel, hogy ott az egyenlőséget nem engedélyeztük. Célszerű lesz $\mathcal{L}'$-t úgy tekinteni, mint egy *csak függvényjeleket tartalmazó*, szintén elsőrendű $\mathcal{L}$ nyelv, az úgynevezett *alapnyelv véges* bővítését az $r_1, \dots r_k$ relációjelekkel. Tekintsük az $r_1, \dots r_k$ relációjeleket tartalmazó következő k darab feltételt (szakmai axiómát):

$$\forall(\alpha_i \leftrightarrow r_i) \qquad i = 1, 2, \dots k, \tag{9}$$

ahol α_i az $\mathcal{L}'$ nyelv tetszőleges konkrét formulája, és az α_i-ről feltesszük, hogy rendre pontosan ugyanazok a szabad változóik, mint az r_i relációknak. A (9)-beli formulaösszesség implicit *definíció* az r_i relációkra nézve, hiszen az ekvivalenciák bal és jobb oldalain egyaránt előfordulhatnak az r_i relációjelek. A (9) alakú implicit definíciót *induktív definíciónak* nevezzük, és $\Gamma^{\leftrightarrow}$-val jelöljük. Az induktív definíció formálisan a (4)-beli Σ premisszahalmaznak felel meg, az r_i-k pedig a programklózok fejeinek (az A_j-knek).

Bevezetünk két meghatározást:

Az $r_1, \dots r_k$ relációk (9) definíciója egzisztenciális definíció*, ha az α_i-k $\exists\beta_i$ alakra hozhatók ($i = 1, \dots k$), ahol β_i már kvantormentes formula, pontosan az r_i-ben előforduló szabad változókkal ($\exists\beta_i$ tehát nem tartalmaz univerzális kvantort).*

Ha a (9) definíció egzisztenciális, akkor mondjuk, hogy pozitív*, ha a $\exists\beta_i$-ben szereplő β_i formula diszjunktív normálformájában nem szerepel negálva relációjel az $r_1, \dots r_k$ relációk közül.*

A pozitív és egzisztenciális (9) induktív definíciót röviden PE definíciónak *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy a fenti pozitivitás tulajdonság gyengébb, mintha α_i pozitivitását követelnénk meg, vagyis azt, hogy β_i diszjunktív normálformájában ne szerepeljen negált atomi formula.

A logikai programozás *általános elméletében* tehát a (4)-beli Σ-nak a PE definíciók felelnek majd meg. Az általános esetben a *cél* szintén $\exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n)$ szerkezetű, ahol B_1, $B_2, \dots B_n$ $\mathcal{L}'$-nek atomi formulái. A $\Gamma^{\leftrightarrow}$-ra vonatkozó *korrekt válasz probléma* ugyanúgy definiálható, mint az definit klózokra történt az előző részben.

A PE definíciók, hasonlóan a definit klózok összességéhez, rendelkeznek a következő fontos (A) tulajdonsággal:

Ha a (9)-beli $\Gamma^{\leftrightarrow}$ *formulahalmaz PE definíció, akkor* van *egy* $\mathcal{H}^{\leftrightarrow}$ *minimális Herbrand-modellje, és ezen igaz a következő:* $\mathcal{L}'$ *tetszőleges D zárt atomi formulájára* $\mathcal{H}^{\leftrightarrow} \models D$ *akkor és csak akkor, ha* $\Gamma^{\leftrightarrow} \models D$.

A fenti tulajdonság a PE definíciók szemantikai jellemzésének is tekinthető. $\mathcal{H}^{\leftrightarrow}$ szerepe hasonló ahhoz, ahogyan „szabad algebrákat" definiáló relációkkal adunk meg. Az (A) tulajdonság nyilván a 7. és 9. Tétel összevontjának megfelelője az általános elméletben.

A PE definíciók fenti tulajdonságából következik, hogy *a PE definícióra vonatkozó korrekt válasz probléma „ugyanúgy viselkedik" szemantikailag, mint definit klózok esetében.*

Jelöljük az r_i relációk interpretációit a $\mathcal{H}^{\leftrightarrow}$ modellen R_i-vel. Megmutatható, hogy az R_i relációk, az egzisztencialitás feltételből következően, rekurzív felsorolhatóak. A minimális Herbrand-modellhez tartozó pozitív diagram PE definíció esetében is előállítható, mint az előző részben T-vel jelölt „szemantikus következményoperátor" fixpontja, és ez a fixpont szintén kiszámítható.

Tekintsük ezután a (9)-hez és a (4)-beli szakmai axiómákhoz hasonlító, de sok szempontból (9)-nél könnyebben kezelhető

$$\forall(\alpha_i \to r_i) \qquad i = 1, 2 \ldots k \tag{10}$$

formulahalmazt. (9)-ből tehát ezt úgy kapjuk, hogy a $\leftrightarrow$-kat $\to$-ra cseréljük. Jelölje a (10)-beli formulahalmazt $\Gamma^{\to}$.

Igazolható, hogy *a fenti (A) tulajdonság* $\Gamma^{\to}$*-ra is igaz.* Jelölje $\Gamma^{\to}$ legszűkebb Herbrand-modelljét $\mathcal{H}^{\to}$. Igaz a következő fontos egybeesés:

$$\mathcal{H}^{\to} = \mathcal{H}^{\leftrightarrow} \tag{11}$$

(11) következménye az, hogy a $\Gamma^{\leftrightarrow}$-ra vonatkozó korrekt válasz probléma szempontjából *egyenértékű* $\Gamma^{\to}$*-t, illetve* $\Gamma^{\leftrightarrow}$*-t a logikai programozásban szakmai axiómáknak tekinteni*. Ugyanis az állítás értelmében minden $\mathcal{L}'$-beli D zárt atomi formula pontosan akkor igaz $\mathcal{H}^{\to}$-n, mint amikor igaz $\mathcal{H}^{\leftrightarrow}$-n. Ezért, használva 9. Tétel megfelelőit a $\mathcal{H}^{\to}$ és $\mathcal{H}^{\leftrightarrow}$ modellekre, valamint $\Gamma^{\leftrightarrow}$-ra és $\Gamma^{\leftrightarrow}$-ra, azt kapjuk, hogy $\Gamma^{\leftrightarrow} \models D$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma^{\leftrightarrow} \models D$.

A fentiek alapján elmondhatjuk, hogy a fejezet elején szereplő 1. kérdésre az általános válasz az, hogy *a logikai programozásban szakmai axiómáknak PE definíciókat érdemes választani*.

Ezután megmutatjuk, hogy $\Gamma^{\to}$ lebontható definit klózok összességére.

Mivel $\Gamma^{\to}$ pozitív egzisztenciális definícióból származik, ezért az α_i formula $\exists(D_{1i} \vee \ldots \vee D_{mi})$ alakra hozható, ahol a D_{ti}-k atomi formulák konjunkciói (utóbbiakban a pozitivitás miatt nem fordulhatnak elő negált atomi formulák). (10) ekkor ilyen alakra hozható: $\forall(\exists(D_{1i} \vee \ldots \vee D_{mi}) \to r_i)$. $\exists$ „kiemelhető” az implikációból, ezért utóbbi ekvivalens a $\forall((D_{1i} \vee \ldots \vee D_{mi}) \to r_i)$ alakkal, ez utóbbi pedig a $\forall((D_{1i} \to r_i) \wedge \ldots \wedge (D_{mi} \to r_i))$ formulával. E formula kielégíthetősége viszont ekvivalens a $\{\forall(D_{1i} \to r_i), \ldots \forall(D_{mi} \to r_i)\}$ formulahalmaz kielégíthetőségével. A szereplő formulák magjaiban szereplő formulák már *definit klózok*, ahol az r_i-k a klózok fejei (illetve a tényklózok, ha D_{ti} hiányzik). Itt a D_{ti}-k még tartalmazhatnak egyenlőségeket, míg a 3.5.1-ben használt definit klózok esetén ezt nem engedélyeztük. Az egyenlőség eliminálására több lehetőség van. Például ha egy konjunkciós tag $x = t$ alakú, ahol t term, és nem tartalmazza az x változót, akkor elhagyhatjuk e tagot annak árán, hogy mindenütt alkalmazzuk az x/t helyettesítést.

Meggondolható, hogy (9) definit klóz alakra hozásának eljárása megfordítható, azaz minden definit klózokat tartalmazó axiómarendszerhez létezik olyan PE definíció, hogy belőle a fenti eljárással éppen a kiindulásként adott definit klózokat tartalmazó axiómarendszer származtatható.

$\Gamma^{\to}$ definit klózokra bontását illetően hangsúlyozzuk, hogy nem kötelező a PE definíciókat klózokra bontani, más átalakítások, és az így kapott formulákra más bizonyítási rendszerek alkalmazása is lehetséges.

2. Kapcsolatok a hagyományos programozással és az adatbázisokkal. Eddig a logikai programozást a matematikai logika oldaláról közelítettük meg. A következőkben a *logikai programozást a hagyományos programozás oldaláról közelítjük*. Sorra vesszük, hogy a *logikai programozás* érdekében bevezetett szintaktikai és bizonyításelméleti fogalmaknak mely fogalmak felelnek meg a *hagyományos programozásban*.

matematikai logika $\searrow$ logikai programozás $\swarrow$ hagyományos programozás

Tekintsük az e rész elején felvett $\mathcal{L}'$ *nyelvet*, amely az $\mathcal{L}$ *alapnyelv* véges sok $r_1, \ldots r_k$ relációjellel történt bővítése. $\mathcal{L}$-ről feltettük, hogy csak individuumkonstansokat és függvényjeleket tartalmaz, valamint egyenlőséget. Az $\mathcal{L}'$ nyelv szabad változó nélküli termjei az *adatoknak* felelnek meg. A relációjelek *eljárások neveinek* felelnek meg.

Tekintsük a logikai programozás néhány fogalmát. Ilyenek a szakmai axiómák, a tétel, a kalkulus, a keresési stratégia fogalmak stb. Vegyük ezeket sorra: A *szakmai axiómáknak*, azaz a (9)-beli PE definíciónak (speciálisan a definit klózok összességének), mint azt már említettük, a *program* fogalma felel meg. Az r_i-knek az *eljárások fejei* felelnek meg (definit klózok esetén ezek az A_j-k). Definit klózok esetén a $\neg F_{1j} \vee \neg F_{2j} \vee \ldots \vee \neg F_{j\,m_j}$ klózoknak az *eljárások törzsei* felelnek meg. A *tételnek* a $\exists B$ *kérdés* felel meg. A tétel igazságának eldöntése és igazságának fennállása esetén a *korrekt válasz helyettesítés megtalálása* felel meg a *programozási feladatnak*. Az e feladat megoldására irányuló konkrét eljárás felel meg a *program végrehajtásának*. A választott kalkulus (például rezolúció) és a keresési stratégia együttese felel meg az *interpreternek*.

A *szemantikával* kapcsolatban elmondhatjuk, hogy az általános hagyományos programozást tekintve programok szemantikájáról, mint a szokásos logikai szemantikáról, problematikus beszélni (azonban speciálisan a logikai programozásnál a program szemantikája párhuzamba állítható a logikai szemantikával, sőt a teljességi tételnek megfelelően, a *bizonyításelméleti és a szemantikai megközelítések ekvivalensek*).

* * *

Ezután az adatbázis-elmélet és a matematikai logika kapcsolatát érintjük röviden.

Tudjuk, hogy beszélhetünk *klasszikus*, illetve *deduktív* adatbázisokról. Az úgynevezett deduktív definit adatbázisok (röviden: *definit adatbázisok)* elméletének *hasonló a státusa* az általános adatbázis-elmélethez és a matematikai logikához képest, mint a logikai programozásnak az általános programozáselmélethez és a matematikai logikához képest:

matematikai logika ↘ definit adatbázisok ↙ adatbázis-elmélet

A definit adatbázisok és a logikai programozás matematikai logikai alapjai lényegében egybeesnek (például PE definíciók, korrekt válasz probléma, minimális Herbrand-modell stb.), csupán bizonyos feltételekben van eltérés. Ilyen eltérés például az, hogy a definit adatbázisoknál az $\mathcal{L}$ alapnyelv csupán *véges sok* individuumkonstanst tartalmaz, viszont *tartalmazhat relációjeleket is*, de csak *véges* sokat ($\mathcal{L}$ tehát függvénymentes). A végesség miatt a minimális Herbrand-modell diagramját hozzávehetjük az axiómákhoz, sőt belátható, hogy az úgynevezett „klasszikus adatbázisok" kategorikusan is axiomatizálhatók.

Különbség van a definit adatbázisok és a logikai programozás között természetesen a terminológiában. Így például azokat az $r_1, \ldots r_k$ relációjeleket, amelyekkel bővítettük az $\mathcal{L}$ alapnyelvet itt „*virtuális predikátumoknak*", a PE definíciókat „*deduktív szabályoknak*" nevezzük stb.

Ha a definit adatbázisoknál alkalmazott kalkulus az SLD, és a keresési stratégia ugyanaz, mint a PROLOG-ban, akkor megkapjuk a PROLOG egy változatát a DATALOG-ot. Utóbbiban tehát nincsenek függvények, csak konstansok.

Az azonos logikai alapok miatt lehetséges a logikai programozás és a definit adatbázisok elméletét egyazon elmélet keretében tárgyalni.

3.6 A lambda-kalkulusról

A lambda-kalkulus elméletét Alonzo Church dolgozta ki a matematika megalapozása, többek között a függvényfogalom precíz megalapozása céljából. A függvényfogalom megközelítése különbözik a függvény halmazelméleti fogalmától (mely szerint a függvény egy speciális reláció). Éles különbséget teszünk majd maga a függvény és a függvényérték között. A bevezetett függvényfogalomnál a hangsúly a függvényérték procedurális kiszámításán van. A lambda-kalkulus segítségével leírható, többek között, az aritmetika, vagy a rekurzivitás fogalma is. A lambda-kalkulus fontos igazolása lett, amikor bebizonyosodott, hogy az itt definiálható függvények osztálya egybeesik a rekurzív függvények, valamint a Turing kiszámítható függvények osztályával. A lambda-kalkulus azonban akkor került igazán a figyelem középpontjába, amikor kiderült, hogy programnyelvnek is tekinthető, az első funkcionális program nyelvnek. Továbbá, alapját képezi a funkcionális program nyelveknek, ilyenek például a LISP, Miranda, ML, stb. Ez a kapcsolat hasonló ahhoz, ahogyan a kiszámítható függvények osztálya az imperatív program nyelvekkel (FORTRAN, PASCAL) rokoníthatók.

Minden funkcionális program egy „lambda-kifejezésnek” tekinthető, a funkcionális program *végrehajtása*, pedig e kifejezés értéke, azaz outputja meghatározásának. A lambda-kalkulus e kifejezés „normálformára” hozására, egyszerűsítésére ad szabályokat. Ha a kifejezés nem hozható normálformára, vagy nem „zárt”, akkor kiértékelése értelmetlen.

A következőkben csupán az úgynevezett típus nélküli, egyváltozós lambda-kalkulus elemeit vázoljuk. Nincs hely arra, hogy részletezzük a kapcsolatokat a funkcionális programozással, vagy például a kombinátor logikával.

3.6.1 A lambda-kalkulus elemei

1. A lambda-kifejezésekről

Jelölje V a *változók* $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ halmazát. A változókon kívül, a nyelv *abc*-jéhez tartozik még a pont, a bal, valamint jobb zárójel.

1. Definíció. A λ-*kifejezések* (λ-termek) Λ halmaza V-ből a következő műveletekkel áll elő:

(i) ha v változó, akkor $v \in \Lambda$

(ii) ha $M, N \in \Lambda$, akkor $(MN) \in \Lambda$
(iii) ha $M \in \Lambda$, $v \in \Lambda$, akkor $(\lambda v.M) \in \Lambda$.

A legkülső zárójeleket el szoktuk hagyni.

A (iii)-beli $\lambda x.M$ kifejezést *λ-absztrakciónak* hívjuk. A λ-operátor tehát kijelöli M-ben az aktuális változót. Itt az M kifejezés az absztrakció *hatásköre*. λ-absztrakciók egy $\lambda v_1.(\lambda v_2.(\ldots(\lambda v_n.M)\ldots))$ sorozatát, a zárójelek elhagyásával, így rövidíthetjük: $\lambda v_1 v_2 \ldots v_n.M$. Tehát azt mondhatjuk erre a jelölésre, hogy jobbasszociatív.

A (ii)-beli kifejezést *applikációnak* hívjuk. Itt M a „függvényszerű" kifejezés, N pedig az aktulis „paraméter". Speciálisan, ha M egy λ-absztrakció, akkor az MN neve *függvényapplikáció*. Applikációk egy $((M_1)\ldots M_{n-1})M_n$ sorozatát, zárójelek elhagyásával, így rövidíthetjük: $M_1 \ldots M_{n-1} M_n$. Tehát ez utóbbi jelölésnél feltételezzük a balasszociativitást (MNE jelentése tehát $(MN)E$).

A változók kötött vagy szabad előfordulásait rokoníthatjuk az egymásba ágyazott program blokkok változóinak előfordulásaival.

Megjegyzés: Vigyázzunk, az applikáció erősebben köt, mint a lambda-absztrakció. Például $\lambda.xy$ jelentése nem $(\lambda x.x)y$, hanem $\lambda.(xy)$.

A λ-kifejezéseket *bináris fákkal* szemléltethetjük. A fa csúcsain vagy egy-egy λ-absztrakció, vagy egy-egy applikáció jelzése szerepel. λ-absztrakció esetén a csúcstól függőleges ág vezet és jelezzük a változót is, amire vonatkozik. Absztrakció esetén pedig a csúcstól elágazás vezet, ahol a két leszármazott csúcson, sorrendben balról jobbra az applikáció két tényezője szerepel.

Egy M λ-kifejezés *szabad* változóinak $\mathrm{FV}(M)$ halmazát induktívan definiáljuk a következőképpen:

2. Definíció.
Ha v változó, akkor $\mathrm{FV}(v) = \{v\}$,
$\mathrm{FV}(MN) = \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$,
$\mathrm{FV}(\lambda v.M) = \mathrm{FV}(M) \sim \{v\}$.

Ezzel ekvivalens az, hogy egy M kifejezés v változója szabad, ha valamelyik előfordulása, nem esik rá vonatkozó λ-absztrakció hatáskörébe. Egy M kifejezés v változója kötött, ha nem tartozik M szabad változói közé. Egy λ-kifejezés *zárt* (vagy *kombinátor*), ha nincs szabad változója.

Az olyan kifejezéseket, amelyek csak bizonyos kötött változóinak jelöléseiben különböznek (de például szabad változóik megegyeznek) *azonosítjuk*. Az ilyen értelemben azonos M és N kifejezésekre az $M \equiv N$ jelölést használjuk. Például $\lambda x.yx \equiv \lambda z.yz$. Az $\equiv$ nyilván ekvivalencia reláció.

3. Definíció. Az N kifejezés *helyettesítése* egy M kifejezés v szabad változójába (jelölés: $M\,[v := N]$, vagy $M\left[v/N\right]$):

ha v változó, akkor $v\,[v := N] = N$,

ha x változó és $x \neq v$, akkor $x\,[v := N] = x$,

ha $M = EF$, akkor $EF\,[v := N] = E\,[v := N]\,F\,[v := N]$,

ha $M = \lambda v.E$, akkor $(\lambda v.E)\,[v := N] = \lambda v.E\,[v := N]$.

Az utóbbi két esetnél kikötjük, hogy N egyetlen szabad változója sem válik kötötté a helyettesítés után.

Azt is mondjuk, hogy a fenti helyettesítés *megengedett*. A definíció utolsó feltétele mindig teljesíthető a helyettesített formula kötött változóinak előzetes átjelölésével.

Néhány nevezetes kombinátor:

$\mathbf{I} \equiv \lambda xy.x$

$\mathbf{K}_* \equiv \lambda xy.y$

$\mathbf{K} \equiv \lambda xy.x$

I-vel és $\mathbf{K}_*$-gal a logikai igazság értékeket, azaz rendre a **true** és **false** Boole értékeket szokták modellezni.

1. Példa. Adja meg a következő kifejezések egy zárójeles alakját:

a) $\lambda xy.xyy$
$\lambda x.(\lambda y.xy)y$

b) $\lambda x.(\lambda y.x)jm$
$\lambda x.((\lambda y.x)j)m)$

c) $\lambda xy.xjm$
$\lambda x.((\lambda y.((xj)m)))$

d) $(\lambda xy.x))jm$
$((\lambda x.(\lambda y.x))j)m$

e) $(\lambda xy.zxy)jm$
$((\lambda x.(\lambda y.((zx)y)))j)m$

f) $\lambda xy.(zxy)jm$
$\lambda x.(\lambda y.(((zx)y)j))m$

g) $(\lambda xy.x)yz$
$((\lambda x.(\lambda y.x))y)z$

2. Példa. Végezze el a helyettesítéseket:

a) $\lambda y.xy\left[x/y\right]$
$\lambda z.yz$

b) $\lambda x.y\left[y/\lambda y.x\right]$
$\lambda z.\lambda y.x$

c) $\lambda x.xy\left[y/xz\right]$
$\lambda u.uxz$

2. Redukció

3. Definíció. (egylépéses β-redukció.) A $(\lambda v.M)N$ kifejezésnek az $M\,[v := N]$ kifejezés egylépéses *β-redukciója* – feltéve, hogy az utóbbi helyettesítés megengedett. Jelölés: $(\lambda v.M)N \rightarrow_\beta M\,[v := N]$.

Természetesen nem minden kifejezésnek létezik β-redukciója. A $(\lambda v.M)N$ alakú, azaz β-redukálható kifejezést *β-redex*-nek hívjuk. Ha F β-redukciója E-nek, ennek jelölése: $E \rightarrow_\beta F$. Ha fordítva, a β-redukció megfordításával, F-ből nyerjük E-t, akkor ennek jelölése $E \leftarrow_\beta F$. A β-redukciót és megfordítását közös néven egylépéses *β-konverziónak* hívjuk.

Megjegyzések:

- A β-redukciót tehát csak a $(\lambda v.M)N$ alakú kifejezéseknél alkalmazhatjuk. Például, a $\lambda x.xy$ kifejezés esetén nem, hiszen itt $M = xy$, de hiányzik a paraméter. De például a $(\lambda x.x)y$ kifejezés esetén már alkalmazható. Ezért, fontos, hogy a λ-absztrakciónak mi a hatásköre.
- A β-redukció műveletéből jól kiolvasható a $(\lambda v.M)N$ (speciálisan a $(\lambda v.v)N$) kifejezés függvénytermészete – ahol v a klasszikus értelemben vett független változó. Itt az M kifejezés a *függvény*kifejezés és a $(\lambda v.M)N$ kifejezés pedig a *függvényérték,* azaz az M függvény *kiértékelése* az N értékre.

Tekintsük a következő példákat:
$(\lambda f.f)N \rightarrow_\beta N$
$(\lambda f.fx)(\lambda u.uy) \rightarrow_\beta (\lambda u.uy)x \rightarrow_\beta xy$

4. Definíció. (β-redukció.) Ha E-ből F-et egylépéses β-redukciók és a $\equiv$ reláció alkalmazásainak egy véges sorozatával nyerjük, azt mondjuk, hogy F a *β-redukciója* E-nek. Jelölése: $E \twoheadrightarrow F$.

A β-redukció nyilván reflexív és tranzitív reláció (reflexív és tranzitív lezárása az egylépéses β-redukciónak).

5. Definíció. (β-konvertálhatóság.) E és F egymásba β-konvertálható, ha létezik egylépéses β-konverziók és a $\equiv$ reláció alkalmazásának egy olyan véges sorozata, hogy E-ből F-et kapjuk. A β-konvertálhatóság jelölése: $E =_\beta F$ (vagy röviden $E = F$).

A β-konvertálhatóság nyilván reflexív, szimmetrikus és tranzitív reláció, tehát ekvivalencia reláció.

$\equiv$ bevonását a definícióba az indokolja, hogy az egylépéses β-konverzió definíciójának megfelelően, gyakran szükség lehet a kötött változók cseréjére, azaz a $\equiv$ reláció alkalmazására. Arra is gondolhatunk, hogy az olyan kifejezéseket, amelyek között a $\equiv$ reláció áll fenn, azonosítottuk.

Az $\equiv$ alkalmazása helyett egy külön redukciós szabályt is be lehet vezetni, az α*-redukciót*:

$$\lambda v.M = \lambda y.M\left[x\,v := y\right] \text{ feltéve, hogy } y \text{ nem szabad } M\text{-ben.}$$

Az α-redukció implementálása azonban nehézkes, kikerülésére több eljárás létezik, ezekre itt nem térünk ki.

Megmutatható, hogy a β-konverzió során, részkifejezéseket is helyettesíthetünk vele (β-)egyenlő kifejezésekkel (Leibniz szabály).

3. Normálforma

6. Definíció.

(i) Egy M λ-term β normálformájú (β nf), ha M-nek már nincs β-redex alakú rész kifejezése.

(ii) Egy M kifejezésnek *létezik* β normálformája, ha $M \twoheadrightarrow_\beta N$ valamely β normálformájú N-re.

Nem minden kifejezésnek létezik normálformája, ilyen például a következő Ω kifejezés: $\Omega = (\lambda v.vv)\ (\lambda v.vv)$. Ugyanis a β-redukciónál olyan végtelen ciklusba kerülünk, amelyik mindig visszadja Ω-t.

7. Állítás. Legyen M egy β nf. Ekkor $M \twoheadrightarrow_\beta N \Longrightarrow N \equiv M$.

$\twoheadrightarrow_\beta$-t $\rightarrow_\beta$-val helyettesítve, az állítás, definíció szerint, igaz. Ezért, indukció szerint, $\twoheadrightarrow_\beta$-ra is következik.

A következő tétel a témakör egyik alaptétele.

8. Tétel (Church–Rosser) Ha $M \twoheadrightarrow_\beta N_1$, $M \twoheadrightarrow_\beta N_2$, akkor valamely N_3 kifejezésre $N_1 \twoheadrightarrow_\beta N_3$, $N_2 \twoheadrightarrow_\beta N_3$.

A bizonyítást elhagyjuk, terjedelmi okból.

9. Következmény. (Church–Rosser β-redukcióra.) Ha $M =_\beta N$, akkor létezik olyan L, hogy $M \twoheadrightarrow_\beta L$ és $N \twoheadrightarrow_\beta L$.

Bizonyítás. N-nek az M-ből történő levezetésének $\rightarrow_\beta$, illetve $\leftarrow_\beta$ lépéseinek n száma szerinti indukcióval bizonyítunk, az $\equiv$ ekvivalens kifejezéseket azonosítjuk. Az $n = 0$ eset triviális. Tegyük fel, hogy n hosszú levezetésekre igaz a Következmény állítása. Meggondoljuk, hogy $n + 1$ hosszú levezetésekre is igaz. Tehát tegyük fel, hogy $N =_\beta N'$ egy n hosszú bizonyítás, valamint $M \rightarrow_\beta N'$, vagy $M \leftarrow_\beta N'$. Az indukciós hipotézis miatt, van olyan K', amelyre $N \rightarrow_\beta K'$ és $N' \rightarrow_\beta K'$. Ezért, ha

$M \to_\beta N'$, akkor K' megfelel az állítás-beli L kifejezésnek. Ha $M \leftarrow_\beta N'$, akkor ebből és $N' \to_\beta K'$-ből a Church–Rosser tétel alapján következik, hogy van olyan L, hogy $M \to_\beta L$ és $K' \to_\beta L$. Az utóbbi, $N \to_\beta K'$-vel együtt adja $N \twoheadrightarrow_\beta L$-t és így készen vagyunk.

■

Az alábbiak a Church–Rosser tételnek fontos következményei:

10. Következmény. Egy λ-kifejezésnek legfeljebb egyetlen β normálformája lehet.

Ugyanis, ha egy M kifejezésnek két különböző, N_1 és N_2 normálformája lenne, akkor, definíció szerint, $M \twoheadrightarrow_\beta N_1 \twoheadrightarrow_\beta N_2$. Ekkor a 9. Következmény szerint, valamely L-re, $N_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ és $N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$. Mivel N_1 és N_2 normálformák, ezért $L \equiv N_1 \equiv N_2$.

A fentiekből az is következik, hogy λ-kifejezések β normálformájának keresésekor a rész kifejezéseket *tetszőleges sorrendben* redukálhatjuk (például „kivülről befelé”, vagy fordítva).

11. Következmény. A λ-kalkulus *konzisztens* abban az értelemben, hogy nem igaz, hogy $M =_\beta N$ tetszőleges M és N-re.

Például **true** $=_\beta$ **false** nem teljesülhet, hiszen **true** és **false** normálformák, ráadásul különbözők, azaz a 10. Következmény értelmében a **true** $=_\beta$ **false** fennállásának feltételezése ellentmondáshoz vezet.

3. Példa A szükséges β-redukciók alkalmazásával adja meg a következő kifejezések normálformáját:

a) $(\lambda xy.x)jm$
$(\lambda xy.x)jm \equiv (\lambda x.(\lambda y.x))jm \equiv ((\lambda x\,\lambda y.x)j)m \to_\beta (\lambda y.j)m \to_\beta j$

b) $(\lambda xy.y)\ jm$
$(\lambda xy.y)jm \equiv (\lambda x.(\lambda y.y))jm \equiv ((\lambda x\,\lambda y.y)j)m \to_\beta (\lambda y.y)m \to_\beta m$

c) $(\lambda y.(\lambda x.yx))\ uy$
$(\lambda y.(\lambda x.yx))uy \equiv (\lambda z.(\lambda x.zx))uy \to_\beta \lambda x.uyx \to_\beta uy$

d)$(\lambda x.(\lambda y.yx)z)u$
$(\lambda x.(\lambda y.yx)z)u \to_\beta (\lambda y.yu)z \to_\beta zu$

e) $(\lambda xy.(zxy))jm$
$(\lambda xy.(zxy))jm \equiv (\lambda x.(\lambda y.(zxy)))jm \to_\beta \lambda y.(zjy)m \to_\beta zjm$

f) $(\lambda yx.(zxy))jm$
$(\lambda yx.(zxy))jm \equiv (\lambda y.(\lambda x.(zxy)))jm \to_\beta \lambda x.(zxj)m \to_\beta zmj$

4. A kalkulus

A lambda-kalkulus *elmélete* $E = F$ alakú *formulák* halmaza. Az $E = F$ formula az alábbi levezetési szabály, valamint a logikai axiómák és szabályok segítségével vezethető le:

A λ-kalkulus egyetlen *levezetési szabálya:*
$(\lambda v.M)N = M\,[v := N]$, ahol $M,N \in \Lambda$.

Logikai axiómák és szabályok:
$M = M$
$M = N \Longrightarrow N = M$
$M = N,\ N = L \Longrightarrow M = L$

$M = M' \Longrightarrow MZ = MZ'$
$M = M' \Longrightarrow ZM = ZM'$
$M = M' \Longrightarrow \lambda x.M = \lambda x.M'$

Az $E = F$ levezethetőségét $\lambda \vdash E = F$-fel is jelöljük. Indukcióval igazolható az alábbi:

12. Tétel. $M =_\beta N$ akkor és csak akkor, ha $\lambda \vdash M = N$.

5. A lambda-kalkulus erejéről

A következő tétel, a Fixpont tétel biztosítja, hogy a lambda-kalkulusban modellezhető a *rekurzivitás:*

13. Tétel. (Fixpont.)
(i) Minden F-hez van olyan X, hogy $FX = X$ (azaz, $\lambda \vdash FX = X$)
(ii) Létezik egy fixpont kombinátor
$$Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)),$$
melyre
$$F(YF) = YF$$
bármely F λ-kifejezésre.

Bizonyítás.
(i) Legyen W olyan, hogy $W \equiv \lambda x.F(xx)$, továbbá legyen $X \equiv WW$. Ekkor
$$X \equiv WW \equiv (\lambda x.F(xx))W \equiv F(WW) = F(X)$$
valóban.
(ii) Lásd az (i) bizonyítását.

■

Reprezentálhatók a lambda-kalkulusban a természetes számok is, mint az úgynevezett *Church számok*.

14. Definíció.

(i) Ha F, $M \in \Lambda$, akkor definiálja az $F^n(M)$ kifejezést a következő:

$$F^0(M) \equiv M,\ F^{n+1}(M) \equiv F(F^n(M))$$

(ahol n tetszőleges természetes szám)

(ii) A $\mathbf{c}_n$ *Church számok*:

$$\mathbf{c}_n = \lambda f x . f^n(x)$$

Tekintsük a következő kombinátorokat:

$\mathbf{A}_+ \equiv \lambda xypq.xp(ypq)$

$\mathbf{A}_* \equiv \lambda xyz.x(yz)$

$\mathbf{A}_{\exp} \equiv \lambda xy.yx$.

15. Állítás. (Rosser.)

(i) $\mathbf{A}_+ \mathbf{c}_n \mathbf{c}_m = \mathbf{c}_{n+m}$

(ii) $\mathbf{A}_* \mathbf{c}_n \mathbf{c}_m = \mathbf{c}_{n*m}$

(iii) $\mathbf{A}_{\exp} \mathbf{c}_n \mathbf{c}_m = \mathbf{c}_{n^m}$ if $m \neq 0$.

A bizonyítás indukcióval történhet.

Igazolható, hogy a lambda-kalkulusban definiálható függvények osztálya *egybeesik a Turing kiszámítható függvények osztályával*. Ezt nem bizonyítjuk. A lambda-kalkulusra különböző modellek is adhatók.

4. FEJEZET

MODELLELMÉLET

Évszázadokon keresztül a matematikai vizsgálatok tárgya egy-egy konkrét struktúra volt. Az axiómák azt a célt szolgálták, hogy minél jobban leírják az adott struktúrát (ez történt például a geometriában a tér struktúrájának leírásakor, az aritmetikában a természetes számok struktúrájának leírásakor stb.).

Ez a szemlélet később kiegészült egy másik szemlélettel. Nem egy, hanem több struktúráról kezdtek el gondolkodni. A szándékolt interpretációkon kívül egyéb interpretációkat is elkezdtek vizsgálni. Úgy fogalmazhatnánk, hogy míg régebben egy rögzített struktúrához kerestek axiómákat, úgy később bizonyos rögzített axiómákhoz (rögzített elmélethez) kezdték el keresni az őket kielégítő struktúrákat. Ennek több oka is volt.

Egyrészt az inkomplettségi tételekkel világossá vált, hogy legtöbb struktúra elméletét nem lehet az axiomatikus módszerrel kimerítően leírni, és érdekessé vált, hogy egy-egy axiómarendszernek a kiindulási struktúrán kívül még melyek a lehetséges modelljei. Gondolhatunk például a párhuzamossági axióma nélküli geometria axiómarendszerére, amelyet kielégíthetnek nemeuklideszi geometriák is, vagy gondolhatunk a testaxiómákra, melyeket nemcsak számtestek elégíthetnek ki stb. Sőt azt is tudjuk (Löwenheim–Skolem-tétel), hogy általában még a struktúra egész elméletével sem lehet a struktúrát megragadni. A szándékolt interpretációt *standard struktúrának* is nevezzük, a szándékolt interpretáció elméletének egyéb, standard struktúrával nem izomorf modelljeit pedig *nemstandard struktúrának*.

Másrészt létrejöttek a matematikában a nagy általánosítások, felfigyeltek több struktúra közös tulajdonságaira. Ezek közül bizonyosakat axiómaként rögzítettek, és igyekeztek leírni azon struktúrákat, amelyek kielégítik ezen axiómákat. Létrejött a topológikus tér, metrikus tér, lineáris tér stb. fogalma. Az algebrán belül létrejött a *modern algebra*, amely elsősorban absztrakt struktúraosztályokkal foglalkozik, majd az ezt is általánosító *univerzális algebra*, mely terület már az algebra és logika határán fekszik.

Azáltal, hogy több struktúráról kezdtek el gondolkodni, érdekessé vált az áttérés egyik struktúráról a másikra (például a struktúrák közötti leképezések, homomorfizmusok, izomorfizmusok vizsgálata), érdekessé vált új struktúrák konstruálása (például az, hogy miként képezhetünk részstruktúrákat, szorzatstruktúrákat, hányadosstruktúrákat stb.).

Míg addig elsősorban azzal foglalkoztak, hogy egy adott $\mathcal{A}$ struktúra elmélete ($\mathrm{Th}\mathcal{A}$) axiomatizálható, illetve eldönthető-e, azt is elkezdték vizsgálni, hogy amennyiben egy $\mathcal{K}$ *struktúraosztályból* indulunk ki, akkor ennek elmélete ($\mathrm{Th}\mathcal{K}$) axiomatizálható, illetve eldönthető-e?

A logikának az a szelete, amikor egyszerre több struktúráról, vagy egy struktúraosztályról gondolkodunk, a *modellelmélet*. A modellelmélet közel áll az univerzális algebrához, a hangsúly azonban a logikai szemléleten van. Tágabb értelemben a modellelmélet a logikai szemantikát jelenti, szemben a bizonyításelmélettel.

Ugyanúgy, ahogyan a szemantika, a modellelmélet is szerves része a logikának. Ezért már e könyv előző fejezeteiben is elkerülhetetlen volt, hogy fontos modellelméleti fogalmakat (például részmodell, Herbrand-modell, Löwenheim–Skolem-tétel stb.) és módszereket (például redukciós tételek, modellmódszer stb.) tárgyaljunk. Érdekes és viszonylag új területe a modellelméletnek az úgynevezett „*véges modellelmélet*”. A véges modellek például a számítástudományban igen fontosak, és számos tekintetben másképpen viselkednek, mint a végtelen modellek. Terjedelmi korlátok miatt jelen fejezetben nem tudunk kitérni a véges modellek tanulmányozására.

A 4.1-ben néhány fontos modellosztályt ismertetünk, majd a nevezetes „modellmódszert” tárgyaljuk. A 4.2-ben a nemstandard modell fogalmát vázoljuk. A 4.3-ban nevezetes modellkonstrukciókkal, elsősorban ultrahatványokkal, ultraszorzatokkal ismerkedünk. A 4.4-ben modellosztályok strukturális tulajdonságai és az osztályokat definiáló axiómák szerkezetének *kapcsolatát* tárgyaljuk.

4.1 Nevezetes axiómarendszerek. Modellmódszer

4.1.1 Nevezetes axiómarendszerek

Felsorolunk néhány a matematikában fontos konkrét *modellosztályt* (absztrakt modellosztályokkal majd 4.4-ben foglalkozunk). Az alábbi modellosztályok axiómákkal adottak:

- *Csoportok*

  A csoportelmélet nyelve tartalmazza a $+$ kétváltozós, a $-$ egyváltozós műveletszimbólumokat és a 0 konstansjelet.

  Az axiómák:
  (i) $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$
  (ii) $\forall x (x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$
  (iii) $\forall x (x + -x = 0 \wedge -x + x = 0)$

  Ha ilyen jelöléseket használunk, szokás a csoportot additív csoportnak is nevezni (szemben a multiplikatív csoporttal, ahol a műveletet szokás a $\cdot$ jellel, a konstanst pedig 1-gyel jelölni). Ha csupán az első axiómát tesszük fel, akkor *félcsoportról* beszélünk. Ha a fenti axiómákon kívül még a kommutativitást is megköveteljük, tehát ha $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ igaz, akkor *Abel-csoportról* beszélünk.

- *Rendezett struktúrák*

  A rendezés nyelve egy kétváltozós, általában $<$ jellel jelölt relációszimbólumot tartalmaz.

  Axiómák a következő (i), (ii) és (iii) tulajdonságok:
  (i) $\forall x \neg x < x$ (irreflexivitás),
  (ii) $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z)$ (tranzitivitás),
  (iii) $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$ (trichotomia, másképpen linearitás).

  Rendezésekkel 4.2-ben fogunk részletesebben foglalkozni. Definiálni fogjuk a sűrű, a diszkrét, a végpont nélküli stb. tulajdonságú rendezéseket.

  A csoportok nyelve is kiegészíthető a rendezési reláció jelével. Megfelelő, a rendezésre vonatkozó axiómákkal kiegészítve a csoportaxiómákat, kapjuk a *rendezett csoportok* axiómarendszerét.

- *Testek (kommutatív testek)*

  A testek nyelve az $+$ és $\cdot$ kétváltozós, a $-$ egyváltozós műveleti jeleket és a 0, valamint 1 konstansjeleket tartalmazza.

  A testekre feltesszük a következő (i), (ii) és (iii) tulajdonságokat:
  (i) az $+$, $-$ műveletekre és 0-ra nézve teljesüljenek az Abel-csoportok axiómái.
  (ii) a $\cdot$ szorzás műveletre, valamint 0-ra és 1-re teljesüljenek a következő tulajdonságok:
  $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
  (szorzás asszociativitása)
  $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$
  (szorzás kommutativitása)
  $\forall x (x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x)$
  (egységelem létezése)
  $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (y \cdot x = 1 \wedge x \cdot y = 1))$
  (inverz létezése, 0 kivételével)
  $0 \neq 1$
  (legalább két elem létezése)
  (iii) a $\cdot$ az $+$-ra nézve disztributív mindkét oldalról, azaz teljesül
  $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$ és
  $\forall x \forall y \forall z ((y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x)$.

  A (ii) tulajdonság tömören úgy fogalmazható, hogy a test alaphalmazából elhagyva 0-t, a kapott halmaz egyrészt ne legyen üres, másrészt legyen Abel-csoport a szorzásra és 1-re nézve.
  Gyakran nem követeljük meg a test definíciójánál a szorzás kommutativitását (nemkommutatív testek).
  Egy test *algebrailag zárt*, ha benne minden legalább első fokú polinomnak van gyöke, azaz minden $n \geq 1$-re igaz a
  $$\forall a_n \forall a_{n-1} \ldots \forall a_0 \exists x (a_n \neq 0 \rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0)$$
  formula, ahol x^n x önmagával vett n-szeres szorzatát jelöli.

  Egy *test karakterisztikája* az a legkisebb n, amennyiszer a test 1 elemét önmagához adva 0-t kapunk. Ha nincs ilyen n, akkor a test 0 karakterisztikájú.

  Ha a (ii) tulajdonságokból csak az asszociativitást tartjuk meg, az (i) és (iii) tulajdonságokat változatlanul hagyva, akkor megkapjuk a *gyűrűk* axiómarendszerét.
  A gyűrű *nullosztómentes*, ha a $\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0)$ tulajdonság teljesül.
  Igazolható, hogy test *mindig nullosztómentes*.
  Egy test *valósan zárt, ha*
  (i) minden páratlan fokszámú polinomnak van gyöke,
  (ii) ha (-1) nem áll elő két négyzetszám összegeként $\big(\forall x \forall y \big(x^2 + y^2 \neq -1\big)\big)$,
  (iii) bármely szám vagy az ellentettje négyzetszám $\big(\forall x \exists y \big(x = y^2 \vee -x = y^2\big)\big)$.

Testek a valós vagy komplex számok, a megfelelő szokásos műveletekre nézve, vagy az egy rögzített p prímszámra vett maradékosztályok, a maradékosztályokkal végzett szokásos műveletekre nézve. A „standard” algebrailag zárt test a komplex számok teste. A „standard” valósan zárt test a valós számok teste.

Gyűrű például az egész számok, a valós számokon értelmezett függvények, a polinomok, az azonos méretű négyzetes mátrixok, a maradékosztályok összessége a megfelelő szokásos műveletekre nézve.

- *Rendezett testek*

  Rendezett test egy olyan test, ahol értelmezett egy $<$ rendezés, amelyik irreflexív, tranzitív és trichotom, továbbá teljesül a következő két monotonitás tulajdonság:
  $\forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z)$
  $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge z > 0 \rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$

  A legfontosabb példa rendezett testre a valós számok rendezett teste.

- *Boole-algebrák*

  A Boole-algebrák nyelve az $+$ és $\cdot$ kétváltozós, a $-$ egyváltozós műveleti jeleket és a 0, valamint 1 konstansjeleket tartalmazza.

  Feltesszük a következő *axiómapárokat*:
  (i) $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$
  $\forall x \forall y z \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
  (ii) $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
  $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$
  (iii) $\forall x \forall y (x \cdot y + y = y)$
  $\forall x \forall y ((x + y) \cdot y = y)$
  (iv) $\forall x \forall y (-(x + y) = (-x) \cdot (-y))$
  $\forall x \forall y \ (-(x \cdot y) = (-x) + (-y))$
  (v) $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$
  $\forall x \forall y \forall z \ (x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z))$
  (vi) $\forall x (x + (-x) = 1)$
  $\forall x (x \cdot (-x) = 0)$

  Nyilván, úgy kapjuk az axiómapárok második tagjait az elsőkből, hogy az $+$ és $\cdot$ műveleteket, valamint az 1-et és 0-t felcseréljük. Ez a Boole-algebrákra érvényes úgynevezett *dualitás* egy esete.

  Igazak a Boole-algebrákban a következő nevezetes, úgynevezett *idempotencia* tulajdonságok:
  $\forall x (x + x = x)$,
  $\forall x (x \cdot x = x)$,
  amelyek a (iii) *elnyelési* tulajdonságnak speciális esetei.

  $x \leq y$ Boole algebrákon akkor és csak akkor, ha $x \cdot y = x$.

Boole-algebra például egy adott tetszőleges, de rögzített H halmaz részhalmazainak összessége az unió-, metszet-, komplementerképzésre, valamint az $\emptyset$-ra és H-ra mint konstansokra nézve (Boole *hatványhalmaz-algebra*). Boole-algebra az $\uparrow$ és $\downarrow$ „igazságértékekből” álló kételemű halmaz, a $\vee$, $\wedge$, $\neg$ műveletekkel és a $\downarrow$ és $\uparrow$ értékekkel mint konstansokkal ellátva, ahol a műveleteket az ismert igazságtáblák szerint definiáljuk. Ez a Boole-algebra az úgynevezett *„igazságértékek Boole-algebrája”* (a kételemű Boole-algebra). Érdekes Boole algebra a 4.2, 18. feladatban található példa.

Egy Boole-algebra *atommentes*, ha teljesül a következő tulajdonság: $\forall x \exists y(x \neq 0 \to 0 < y \wedge y < x)$. Atommentes Boole-algebra például a racionális számokon, mint alaphalmazon, az $[a, b]$ alakú intervallumok által generált Boole-halmazalgebra. Az atommentes Boole-algebrák „ellentétei” az *atomos* Boole-algebrák. Ilyen például bármely halmaz hatványhalmaz-algebrája, ahol az atomok a halmaz elemei.

A Boole-algebra fogalmára még visszatérünk 6.1-ben.

- *Hálók*

  A hálók nyelve a kétváltozós $\cup$ és $\cap$ műveleti jeleket tartalmazza.

  E műveletekre feltételezzük a kommutativitást, asszociativitást, valamint az idempotenciát mint axiómákat (tehát minden Boole-algebra háló).

- *Gráfok*

  A gráfok nyelve egy kétváltozós E relációjelt (éllel összekötöttség) tartalmaz.

  A hurokmentes és irányítatlan gráfok axiómái:

  (i) $\forall x \neg Exx$ (irreflexivitás)

  (ii) $\forall x \forall y(Exy \to Eyx)$ (szimmetria)

Megjegyezzük, hogy a fenti axiómáknál végig kiírtuk a kvantorokat, de elfogadott gyakorlat a matematikában, hogy az univerzális kvantorokat formálisan elhagyjuk, tehát például $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ helyett csak ezt írjuk: $x + y = y + x$.

4.1.2 Modellmódszer

Megadjuk néhány logikai fogalom: az *ellentmondástalanság, a függetlenség és a komplettség* modellelméleti jellemzését, a teljességi tétel segítségével. Az előbbi fogalmakat a szintaktikai értelemben tekintjük definiáltnak (lásd 3.1.1), kalkulusként a Hilbert-kalkulust tételezzük fel, de helyette bármely teljes kalkulust is választhatnánk. A bizonyításokban kihasználjuk majd a Gödel-teljességi tétel a) változat (3.1 rész

21. Tétel) azon következményét, hogy a fenti logikai fogalmak szintaktikai és szemantikai definíciói ekvivalensek.

Legyen Σ egy elsőrendű nyelv tetszőleges formulahalmaza.

Az *ellentmondástalanság* idevágó jellemzésének a Gödel-teljességi tétel b) verzióját tekinthetjük, azaz a következőt:

Σ *ellentmondástalan* akkor és csak akkor, ha Σ-nak *van modellje*.

Hangsúlyozzuk, hogy e jellemzés általában csupán *relatív ellentmondástalanság* bizonyítását teszi lehetővé (lásd 3.4.1).

A következő tétel a *függetlenségfogalom* modellelméleti jellemzését nyújtja:

1. Tétel. (Függetlenség jellemzése.)

Egy α formula *független* a Σ formulahalmaztól akkor és csak akkor, ha $\Sigma \cup \{\alpha\}$-nak és $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$-nak is *van* modellje.

Bizonyítás.
Ekvivalenciákat sorolunk fel. α függetlensége Σ-tól azt jelenti, hogy sem $\Sigma \vdash \alpha$ sem $\Sigma \vdash \neg\alpha$ nem teljesül. Kihasználva a teljességet (másképpen: a függetlenségfogalom szintaktikai és szemantikai definícióinak ekvivalenciáját) sem $\Sigma \vDash \alpha$, sem $\Sigma \vDash \neg\alpha$ nem teljesül. Azaz a következményfogalom definíciója szerint $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$-nak és $\Sigma \cup \{\alpha\}$-nak is van modellje, mint azt állítottuk.

■

A következő tétel elméletek komplettségének modellelméleti jellemzését adja:

2. Tétel.

Egy Γ elmélet komplett akkor és csak akkor, ha Γ valamennyi modelljének ugyanaz az elmélete.

Bizonyítás. Ha Γ ellentmondásos, akkor az állítás triviális. Ha Γ ellentmondástalan, akkor tekintsük a következő ekvivalenciákat.

Γ komplettsége azt jelenti, hogy bármely α zárt formulára $\alpha \in \Gamma$ vagy $\neg\alpha \in \Gamma$ teljesül. Γ elmélet, tehát zárt a levezetésre, vagyis az előbbi tulajdonságok $\Gamma \vdash \alpha$-val, illetve $\Gamma \vdash \neg\alpha$-val ekvivalensek, ezek pedig a teljességi tétel miatt $\Gamma \vDash \alpha$-val, illetve $\Gamma \vDash \neg\alpha$-val. Ez utóbbi két tulajdonság együttesen nyilván pontosan azt jelenti, hogy a Γ elmélet modelljei megegyeznek.

■

Arra, hogy két modellnek ugyanaz az elmélete, azt fogjuk mondani (lásd majd 4.2 részt), hogy a két modell *elemien ekvivalens*.

Komplett elméletek esetén $\Gamma \vdash \alpha$ helyességét tehát úgy is verifikálhatjuk, hogy $\Gamma \vdash \alpha$ helyett Γ *tetszőleges* $\mathcal{A}$ *modelljén vizsgáljuk* $\Gamma \vDash \alpha$ *helyességét*. Itt $\mathcal{A}$-t általában Γ „standard modelljének” érdemes választani.

A Gödel-teljességi tétel b) változata, valamint a fenti két tétel fontos módszert ad rendre az ellentmondástalanság, függetlenség és komplettség vizsgálatára. **Azt a módszert, amikor az ellentmondástalanság, függetlenség és komplettség fogalmakat a fenti, modellelméleti jellemzések segítségével vizsgáljuk, modellmódszernek hívjuk.**

A „modellmódszer” mindig fontos szerepet játszott a matematikai kutatásoknál. Például alkalmazásával vizsgálták a párhuzamossági axióma függetlenségét, a hiperbolikus geometria relatív ellentmondástalanságát, a halmazelméletben a kontinuumhipotézis függetlenségét, vagy a halmazelmélet különféle relatív ellentmondástalansági kérdéseit.

* * *

Néhány *példát* mutatunk a modellmódszer alkalmazására. Az alábbiakban ellentmondástalanságon *relatív* ellentmondástalanságot értünk.

1. Példa. *α és β legyenek egyváltozós relációjelek. Igazoljuk, hogy a $\exists x(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \exists x\alpha \to \exists x\beta$, γ-val jelölt formula független a logikai axiómáktól!*

Legyen az $\mathcal{A}$ modell a következő: az alaphalmaz legyen két elemű, például $A = \{b, c\}$, valamint α és β legyenek olyan 1 argumentumú relációk, hogy $\alpha(b) = \uparrow$, $\alpha(c) = \downarrow$, $\beta(b) = \downarrow$, $\beta(c) = \downarrow$. Könnyű belátni, hogy ekkor γ hamis $\mathcal{A}$-n.

Másrészt ha α és β állításkonstansok, akkor a formula nyilván igaz.

Vagyis létezik γ-t kielégítő és $\neg\gamma$-t kielégítő modell is, tehát γ valóban független az axiómáktól.

2. Példa. *Igazoljuk, hogy a kétargumentumú relációk szimmetria tulajdonsága független a reflexivitás és tranzitivitás tulajdonság pártól!*

Például a természetes számokon a $\leq$ reflexív és tranzitív reláció, de nem szimmetrikus. Másrészt tekintsük ismét csak a természetes számokon azt a relációt, amelyik akkor áll fenn két természetes szám között, ha azok különbsége páros. Ez is reflexív és tranzitív reláció, de szimmetrikus is. Tehát van olyan reflexív és tranzitív reláció, amelyik szimmetrikus, és olyan is van, amelyik nem, azaz igaz az állított függetlenség.

3. Példa. *Ellentmondástalan-e a testaxiómák rendszere, kibővítve a* $\exists x(\neg x=0 \land x+x+x=0)$, *$\alpha$-val jelölt axiómával? Ha igen, akkor független-e α a testaxiómáktól?*

Tekintsük a 3 szerinti maradékosztályok testét. α igaz e testen, tehát a kérdéses axiómarendszernek van modellje, azaz ellentmondástalan.
Például a valós számtesten hamis az α formula, ezért α független a testaxiómáktól.

4. Példa. *Igazoljuk, hogy az Abel-csoportok axiómarendszere ellentmondástalan!*

Elég példát mutatni egy konkrét Abel-csoportra. Ilyen például az egész számok Abel-csoportja.

5. Példa. *Ellentmondástalan-e a következő axiómarendszer?*

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$$
$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow x \cdot y \neq y \cdot x)$$

Definiáljuk a természetes számok halmazán a következő $\cdot$ „szorzás” műveletet: $x \cdot y = y$. Ekkor a szorzás nyilván kielégíti a fenti axiómákat, tehát az axiómarendszernek van modellje, így ellentmondástalan.

6. Példa. *Mutassa meg, hogy a testek axiomatikus elmélete nem komplett!*

Sok olyan elsőrendű tulajdonság ismert, amelyik független a testaxiómáktól. Nyilvánvalóan ilyen például az a tulajdonság, hogy a testnek pontosan két eleme van.

7. Példa. *Igazolja, hogy a valósan zárt testek axiomatikus elméletének tétele az a tulajdonság, hogy minden másodfokú polinomnak pontosan kettő, pontosan egy valós gyöke van, vagy nincs gyöke!*

Ismert, hogy a valósan zárt testek elmélete komplett. Modelljeinek elméletei ezért megegyeznek. Elegendő ezért az állítást például a valós számok szokásos $\mathcal{R}$ modelljén vizsgálni. Itt tudjuk, hogy igaz az állítás.

4.2 Standard és nemstandard modellek

E részben a modellelmélet különböző területeit érintjük, így az elemi ekvivalencia–izomorfizmus kapcsolatot, a Löwenheim–Skolem–Tarski-tételt, a rendezések elméletét, a komplettség bizonyításának módszereit. Elsősorban azonban struktúra és elméletének kapcsolatát járjuk körül. Látni fogjuk, hogy egy struktúra elmélete általában nem határozza meg magát a struktúrát.

4.2.1 Nemstandard modell fogalma, Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel

Bevezetünk először néhány egyszerű fogalmat és konstrukciót.

1. Definíció. (Modellek izomorfiája.) Akkor mondjuk, hogy az $\mathcal{A}=\langle A, f_1,\dots f_k,\ P_1,\dots P_m\rangle$ és a $\mathcal{B}=\langle B,\ g_1,\dots g_k,\ R_1,\dots R_m\rangle$ azonos típusú struktúrák *izomorfak* ($\mathcal{A}\simeq\mathcal{B}$), ha az alaphalmazok között létezik egy $i: A\to B$ kölcsönösen egyértelmű, reláció-, valamint művelettartó leképezés, tehát

$$\mathcal{A}\vDash P_j(a_1,\dots a_l) \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathcal{B}\vDash R_j(ia_1,\dots ia_l) \qquad (j=1,2,\dots m)$$

az egymásnak megfelelő például l változós P_j, illetve R_j relációkra és $a_1,\dots a_l\in A$ elemekre, továbbá

$$if_j(a_1,\dots a_n)=g_j(ia_1,\dots ia_n) \qquad (j=1,2,\dots k)$$

az egymásnak megfelelő például n változós f_j, illetve g_j függvényekre és $a_1,\dots a_n\in A$ elemekre.

Az izomorfia már ismert fogalom a matematikai tanulmányainkból. Jelentése, hogy a két struktúra „azonosítható”. Úgy tekinthetünk egy $\mathcal{A}$-val izomorf struktúrára, mintha $\mathcal{A}$ alaphalmazának elemeit, függvényeit, relációit csupán *átjelölnénk*. Izomorf struktúrák például a síkvektorok lineáris tere és a valós számpárok lineáris tere a szokásos műveletekkel vagy a természetes számok a rendezéssel és a páros természetes számok a rendezéssel.

2. Definíció. (Modellek elemi ekvivalenciája.) Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azonos típusú struktúrák *elemien ekvivalensek* (jelölésben: $\mathcal{A}\equiv B$), ha a nyelv bármely φ zárt formulájára $\mathcal{A}\vDash\varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{B}\vDash\varphi$, azaz $\mathrm{Th}\mathcal{A}=\mathrm{Th}\mathcal{B}$.

Az elemi ekvivalencia jelentése tehát az, hogy *elsőrendű nyelv zárt formuláinak segítségével e struktúrák nem különböztethetők meg*. Azt, hogy e struktúrák elsőrendű nyelven nem különböztethetők meg, úgy is mondjuk, hogy *elsőrendű tulajdonságaik* megegyeznek.

Ha $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, *akkor* $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Hiszen az igazságértékeket nem befolyásoló különbség van csak a között, hogy egy zárt formulát $\mathcal{A}$-n vagy $\mathcal{B}$-n értékelünk-e ki.

Elemi ekvivalenciát igazolni általában nem könnyű, erre különböző módszerek léteznek. Azt, hogy két modell *nem* elemien ekvivalens, úgy igazoljuk, hogy keresünk legalább egy olyan zárt formulát (elsőrendű tulajdonságot), amelyik az egyik modellen fennáll, míg a másikon nem (így természetesen azt is igazolhatjuk, hogy két modell *nem* izomorf).

Megmutatjuk, hogy fordítva, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ *nem implikálja* $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$-t.
Legyen $\mathcal{A} = \langle \text{racionális számok}, \ < \rangle$ és $\mathcal{B} = \langle \text{valós számok}, \ < \rangle$. Látni fogjuk a következő részben, hogy $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Azonban $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ nyilván nem izomorf, hiszen alaphalmazuk számossága különböző. Ennél is egyszerűbb példa, amelyet még ebben a részben igazolni fogunk, hogy az egész számok rendezése, valamint az egész számok rendezett halmazának két példánya „összefűzve" elemien ekvivalens, de nem izomorf modellek. Igaz tehát a következő:

> Ha két struktúra elsőrendű tulajdonságai megegyeznek, nem feltétlenül izomorfak. Egy struktúra elsőrendű elmélete általában nem determinálja magát a struktúrát.

Azonban az elemien ekvivalens struktúrák úgynevezett magasabb rendű nyelvek segítségével (például másodrendű nyelvekkel) általában már megkülönböztethetőek.

Példa. *Mutassuk meg, hogy az* $\mathcal{A} = \langle \{0, 1, 2, \ldots\}, + \rangle$ *és* $\mathcal{B} = \langle \{1, 2, \ldots\}, + \rangle$ *struktúrák nem izomorfak.*

Látható, hogy $\mathcal{A}$-ban van 0 elem, míg $\mathcal{B}$-ben nincs.
Tekintsük tehát a $\exists x \forall y (y + x = y)$ formulát, a formula $\mathcal{A}$-n igaz, $\mathcal{B}$-n pedig nem, ezért $\mathcal{A}$, illetve $\mathcal{B}$ valóban nem izomorf, hiszen még csak nem is elemien ekvivalensek.

Megjegyezzük, hogy *véges struktúrák esetén az elemi ekvivalencia implikálja az izomorfiát*, mint az könnyen meggondolható.

Ezután e rész címadó fogalmaira térünk rá. A 2.1.4 (formalizálás) részben már érintettük a standard modell (másképpen szándékolt interpretáció) fogalmát. Jelen részben a *modellelmélet* szempontjából vesszük szemügyre ezt a fogalmat, pontosabban egy *logikai elmélet standard modelljének* fogalmát. Induljunk ki egy rögzített modellből, $\mathcal{A}$-ból, és *megállapodás szerint* tekintsük $\mathcal{A}$-t *standard modellnek*.

Például standard modell a geometriai tér szokásos struktúrája vagy a valós számok szokásos struktúrája stb. A standard struktúrákat általában valamilyen halmazelméleti konstrukció útján definiáljuk. Bizonyos esetekben önkényes lehet az, hogy mit tekintünk standard struktúrának, ez kontextustól is függhet.

3. Definíció. (Nemstandard modell.) Egy standardnak tekintett $\mathcal{A}$ modell elméletének ($\mathrm{Th}\mathcal{A}$-nak) *nemstandard modelljén* értünk egy olyan $\mathcal{B}$ modellt, amelynek elmélete megegyezik $\mathrm{Th}\mathcal{A}$-val, tehát $\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Th}\mathcal{B}$, de $\mathcal{B}$ nem izomorf $\mathcal{A}$-val.

Megjegyezzük, hogy néha szokták a nemstandard modell fogalmát úgy is definiálni, hogy még azt is megkövetelik, hogy az eredeti struktúra *elemien beágyazható legyen* (lásd majd 4.3.1) a nemstandard struktúrába.

Tekintsük most az aritmetikát: legyen $\mathcal{L}$ az aritmetika nyelve: $+, \cdot, S, 0, <$. *Az aritmetika standard modelljén* értjük a szokásos $\mathcal{N} = \left\langle N,\ +^{\mathcal{N}},\ \cdot^{\mathcal{N}},\ S^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}},\ <^{\mathcal{N}} \right\rangle$ modellt, ahol a felülindexelt műveletek, illetve relációk a szokásos műveletek, illetve relációk N-en.

4. Tétel. Az aritmetikának létezik nemstandard modellje.

Bizonyítás. Tekintsük a következő Σ' formulahalmazt:

$$\Sigma' = \mathrm{Th}\mathcal{N} \cup \{0 < x,\ 1 < x,\ 1+1 < x,\ 1+1+1 < x, \ldots\},$$

ahol x individuumváltozó, és 1 $S0$-t jelöli. Jelölje $1 + 1 + \ldots + 1$-et n.

Σ'-re alkalmazható a kompaktsági tétel, ugyanis Σ'-nek minden véges részhalmaza kielégíthető például az $\mathcal{N}$ standard modellen. Hiszen x interpretálható úgy valamely a-val e modellen, hogy $1^{\mathcal{N}} + 1^{\mathcal{N}} + \ldots + 1^{\mathcal{N}} < a$, tehát $1^{\mathcal{N}} + 1^{\mathcal{N}} + \ldots + 1^{\mathcal{N}}$-et $n^{\mathcal{N}}$-nel jelölve, $n^{\mathcal{N}} < a$ teljesüljön rögzített n-re. A kompaktsági tétel szerint így Σ'-nek is van egy $\mathcal{A}$ modellje. $\mathcal{A}$ egyrészt kielégíti $\mathrm{Th}\mathcal{N}$-et, másrészt van benne olyan b elem, hogy $1^{\mathcal{A}} + 1^{\mathcal{A}} + \ldots + 1^{\mathcal{A}} < b$, azaz $n^{\mathcal{A}} < b$ *minden* n-re. $\mathcal{A}$ és $\mathcal{N}$ nem izomorf, mert $\mathcal{A}$-ban van „végtelen nagy szám”.

■

Hasonlóan bizonyítható, hogy a valós számok standard struktúrájának is létezik nemstandard modellje (többek között ezen struktúrákkal foglalkozunk majd a 6.3 alfejezetben).

Megjegyezzük, hogy *nyílt elsőrendű formulák* segítségével már esetleg megkülönböztethetőek az elemien ekvivalens modellek. Példa erre a bizonyításbeli $\{n < x : n \in \omega\}$ formulahalmaz és az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ modellek.

A 2.4-ben igazoltuk a Löwenheim–Skolem-tételt. Párja a tételnek a következő Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel (másképpen: „felszálló” Löwenheim–Skolem-tétel). A két tételt és a hasonló jellegű tételeket, összefoglaló néven, szokás *Löwenheim–Skolem-tételkörként* idézni. Akárcsak a Löwenheim–Skolem-tételnél, most is kivételt teszünk azon megállapodás alól, hogy az alapnyelv legyen megszámlálható, tehát $\mathcal{L}$ legyen η számosságú.

5. Tétel. (Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel.)

> Tegyük fel, hogy zárt formulák egy Σ halmazának van végtelen modellje, és a nyelv számossága η. Ha λ egy η-nál nagyobb vagy vele egyenlő számosság, akkor Σ-nak van pontosan λ számosságú modellje is.

Bizonyítás. Bővítsük a nyelvet individuumkonstansok λ számosságú C halmazával, és jelöljük az így kapott $\mathcal{L}(C)$ nyelvet röviden $\mathcal{L}'$-vel. Tekintsük a

$$\Phi = \Sigma \cup \left\{ c_i \neq c_j : c_i, c_j \in C \right\}$$

formulahalmazt. A továbbiakban $\mathcal{L}'$ típusú modellekben gondolkodunk.
Φ-nek a kompaktsági tétel értelmében van modellje, hiszen Φ minden véges Φ' formulahalmazának van modellje. Ugyanis egyrészt, mivel Σ-nak van modellje, ez Φ' Σ-hoz tartozó részének is modellje. Másrészt a feltétel szerint választhatjuk ezt a modellt végtelennek, ezért C minden C' véges részére a C'-beli konstansok ezen a modellen interpretálhatóak úgy, hogy kielégítsék a Φ'-höz tartozó *véges* $\left\{ c_i \neq c_j : c_i, c_j \in C', i \neq j \right\}$ feltételrendszert.
Mivel Φ-nek van modellje, alkalmazható a Löwenheim–Skolem-tétel (2.4.3 rész 11. Tétel): Az $\mathcal{L}'$ nyelv számossága λ, ezért van Φ-nek egy *legfeljebb* λ számosságú modellje. Azonban e modell számossága Φ definíciója miatt legalább λ. Utóbbit a „legfeljebb λ” feltétellel összevetve, a modell számossága pontosan λ.
A nyert $\mathcal{L}'$ típusú modellt $\mathcal{L}$ típusúnak tekintve, megkapjuk a keresett $\mathcal{L}$ modellt.

■

Következmény: Legyen $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{L}$ típusú végtelen modell, és $\mathcal{L}$ számossága legyen η. Ekkor *tetszőleges végtelen $\lambda \geq \eta$ számossághoz van olyan $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-modell, hogy $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, és $\mathcal{B}$ alaphalmazának számossága λ*. Speciálisan, ha $\mathcal{L}$ megszámlálható, akkor bármely végtelen számossághoz van ilyen tulajdonságú $\mathcal{B}$.

Ugyanis alkalmazzuk a Löwenheim–Skolem–Tarski-tételt arra az esetre, amikor Σ egy végtelen rögzített $\mathcal{A}$ struktúra elmélete (Th$\mathcal{A}$). A tétel biztosítja olyan λ számosságú $\mathcal{B}$ modell létezését, amelyik modellje Th$\mathcal{A}$-nak, azaz $\mathcal{A}$-val elemien ekvivalens.

Már láttunk példát nemstandard modellekre. Láttuk, hogy egy struktúra elmélete nem feltétlenül determinálja magát a struktúrát. De a fenti Következmény szerint ennél több is igaz: *végtelen* struktúra elmélete *sohasem determinálhatja a struktúrát, azaz* **szükségszerű, hogy egy végtelen modell elméletének legyen nemstandard modell-je.** Tehát arra jutottunk, hogy egy struktúrát általában nemcsak hogy axiomatikusan nem lehet megragadni (hiszen az inkomplettségi tétel miatt általában még a struktúra elméletét sem lehet megragadni), de *a struktúrát általában egész elsőrendű elméletével* (amely általában nem axiomatikus) *sem lehet megragadni*.

A matematika legtöbb területére tehát szükségszerűen igaz, hogy *létezik egy olyan világ (nemstandard modell), hogy bár itt ugyanazon (elsőrendű) tételek igazak, mint a szokásos világban (standard modellen), mégis lényegesen különbözik e világ az eredetitől*.

Ha egy elmélet a modelljeit nem határozza is meg, de egy λ számosságot rögzítve, esetleg meghatározza a λ számosságú modelljeit. Később példát mutatunk arra, hogy általában ez sem igaz (lásd majd például a „diszkrét rendezést”).

6. Definíció. Egy Σ elmélet λ-kategorikus, ha λ számosságú modelljei izomorfak.

Ez igen erős tulajdonsága lesz egy elméletnek, csak speciális elméletek rendelkeznek e tulajdonsággal:

Például λ-kategorikus a végtelen halmazok elmélete (azaz az egyenlőség elmélete, kiegészítve a $\{\varphi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ elsőrendű mondathalmazzal, ahol φ_n jelentése az, hogy az alaphalmaz „legalább n elemű”). Ugyanis, ha csak egyenlőségrelációnk van, akkor két struktúra pontosan akkor izomorf, ha azonos a számosságuk.

Nyilvánvaló példa λ-kategorikus elméletre bármely komplett elmélet, amelynek van n elemű modellje valamely rögzített n-re, ahol n természetes szám, és $\lambda = n$. Hiszen véges modellekre az elemi ekvivalenciából következik az izomorfizmus. Ezért igazán végtelen számosságokra érdekes a λ-kategoricitás fogalma. λ-kategoricitást bizonyítani általában nem triviális, a matematika különböző területein más-más módszerek vezetnek célra. Érdekes fogalom a másodrendben kategoricitás fogalma is, erre az 5.1-ben térünk ki.

4.2.2 Rendezések, komplettség ellenőrzése

E részben példákat mutatunk nemstandard modellekre, és példákkal illusztráljuk a Löwenheim–Skolem–Tarski-tételt. Mindez elsősorban a viszonylag egyszerű elméletek, a rendezések felhasználásával történik. Először ismertetjük a rendezések néhány alapfogalmát. E fogalmak önmagukban is érdekesek, valamint ismertek azon Olvasók számára, akik jártasak a halmazelmélet alapjait illetően.

A rendezés fogalmát már bevezettük az előző 4.1-ben mint irreflexív, tranzitív és trichotom relációt, és $<$ jellel jelöltük. *Rendezett halmaz* egy olyan halmaz, amely el van látva egy konkrét rendezési relációval.

Először felsorolunk néhány fontos rendezett halmazt mint struktúrát és a jelölésüket:

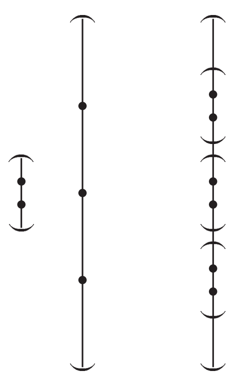
n: az első n természetes szám rendezése,
ω: a természetes számok rendezése,
ω^*: a negatív egész számok rendezése,
β: az egész számok rendezése,
η: a racionális számok rendezése,
λ: a valós számok rendezése.

Akárcsak természetes számokat, rendezéseket is tudunk összeadni és szorozni. Legyenek $\mathcal{A}$, illetve $\mathcal{B}$ rendezett halmazok A és B alaphalmazokkal, és jelölje e rendezéseket ε, illetve δ.

Az ε és δ rendezések *szorzata* az a rendezés (jelölje $\varepsilon \cdot \delta$), amelynek alaphalmaza a $C = A \times B$ szorzathalmaz, a rendezés pedig a következő: ha $\langle a, b\rangle \in C$, és $\langle c, d\rangle \in C$, akkor
$b = d$ *esetén* $\langle a, b\rangle < \langle c, d\rangle$ *pontosan akkor, ha* $a < c$,
$b < d$ *esetén* $\langle a, b\rangle < \langle c, d\rangle$ a*-tól és* c*-től függetlenül.*

Tegyük fel, hogy A és B diszjunktak. Az ε és δ rendezések *összege* az a rendezés (jelölje $\varepsilon + \delta$), amelynek alaphalmaza $A \cup B$, a rendezési reláció pedig a következő: *A-n, illetve B-n megtartjuk az eredeti rendezéseket, egyébként pedig, valamennyi A-beli elem legyen kisebb valamennyi B-beli elemnél.*

Ha a rendezéseket vertikálisan szemléltetjük, és a *nagyobb elemek a kisebbek felett* helyezkednek el, akkor a rendezések összeadásának szemléltetése az, hogy a két rendezést „egymásra helyezzük” úgy, hogy az első rendezés kerül alulra, a második felülre. Rendezések szorzásának vertikális szemléltetése pedig az lehet, hogy a *második* rendezés mindegyik eleme helyén az első rendezés egy-egy „példányát” képzeljük el.



ε δ $\varepsilon \cdot \delta$

Emlékeztetünk néhány, a rendezésekkel kapcsolatos, *halmazelméleti* fogalomra.

A naiv megközelítésben a rendezett halmazok közötti izomorfia egy ekvivalenciareláció (mint általában az azonos típusú struktúrák közötti izomorfia). Tekinthetjük ezért ekvivalenciaosztályait, azaz azonosíthatunk két rendezett halmazt, ha izomorfak. Ezen ekvivalenciaosztályokat *rendtípusoknak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy a szóban forgó ekvivalenciaosztályok maguk is osztályt alkotnak (mint azt látni fogjuk a 6.4-ben), viszont a szokásos axiomatikus halmazelméletben a relációk, függvények értelmezési tartománya halmaz, ezért a rendtípus fogalmát másképpen vezetik be.

Egy adott $\mathcal{A}$ rendezett halmazhoz tartozó rendtípust jelölhetjük $\mathcal{A}_0$-val, tehát a fenti ω, ω^*, β, η rendezett halmazokhoz tartozó rendtípusokat rendre ω_0, ω_0^*, β_0, η_0-val jelölhetjük (szoktuk ugyanazt a jelölést használni rendezett halmazra és a hozzá tartozó rendtípusra, például n, ω, β, stb. jelölhetnek rendtípusokat is, ha félreértés nem lehetséges).

A természetes számok ω rendezése rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely részhalmazának van legkisebb eleme. Az ilyen rendezések igen fontosak:

Egy rendezett halmaz jólrendezett, *ha bármely részhalmazának van legkisebb eleme.*

A jólrendezettség tulajdonság invariáns az izomorfiára, ezért értelmes a következő definíció:

Egy rendtípus rendszám, ha tetszőleges reprezentáns rendezése jólrendezett.

Megmutatható, hogy a rendezések összeadásának és szorzásának definíciói szintén invariánsak az izomorfiára, ezért értelmes *rendtípusok összegéről, illetve szorzatáról* is beszélni (itt is szoktuk a rendezések jelöléseit rendtípusokra is alkalmazni, tehát, például az $\omega + \omega$ jelölésnél rendtípusok és rendezések összeadására is gondolhatunk). Sőt az is belátható, hogy *rendszámok összege és szorzata is rendszám*, tehát a rendszámok összeadása és szorzása is értelmes művelet.

Az is megmutatható, hogy maguk a rendszámok is rendezhetők. E rendezés így kezdődik: 0_0, 1_0, $2_0, \dots n_0, \dots \omega_0$, $\omega_0 + 1$, $\omega_0 + 2, \dots$ stb., vagy egyszerűbb jelöléssel: 0, 1, $2, \dots n, \dots \omega$, $\omega + 1$, $\omega + 2, \dots$ stb. A rendszámok és rendezéseik, mint az a halmazelméletből ismert, a természetes számoknak és rendezésüknek az általánosítása a „végtelenre”.

Megjegyezzük, hogy az alábbiakban általában *nem* rendtípusokkal, hanem konkrét rendezésekkel fogunk foglalkozni.

* * *

A következőkben axiomatizáljuk bizonyos standard struktúrák elméleteit, majd példákat mutatunk nemstandard struktúrákra. E standard struktúrák tehát speciálisak lesznek annyiban, hogy a struktúrák elméletei axiomatizálhatók (lásd Gödel I. inkomplettségi tétele), sőt mint majd látjuk, végesen axiomatizálhatók. Tehát valamely véges Σ

($\Sigma \subseteq \mathrm{Th}\mathcal{A}$) mondathalmazra teljesül

$$\mathrm{Th}\mathcal{A} = \mathrm{Ded}(\Sigma). \tag{1}$$

(1)-et adott Σ esetében úgy kaphatjuk, hogy $\mathrm{Ded}(\Sigma)$-ról igazoljuk, hogy *komplett* (ugyanis (1)-ben $\mathrm{Ded}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Th}\mathcal{A}$ mindig igaz, és az egyenlőség akkor igaz, ha $\mathrm{Ded}(\Sigma)$ komplett). Elméletek komplettségének igazolása a logika más területein is érdekes probléma. Ezért a komplettség bizonyításának technikáival külön is foglalkozunk e rész végén.

- *Az egész számok rendezésének elmélete.*

Tekintsük az egész számok rendezését, β-t. Kitűzött első feladatunk $\mathrm{Th}\beta$ axiomatizálása. $\mathrm{Th}\beta$ nyilván kielégíti a rendezés axiómáit. „Kísérleteznünk” kell azonban még további axiómákkal is. Ilyen például a következő (iv) tulajdonság:

(iv) $\forall x \exists y (x < y) \wedge \forall y \exists x (x < y)$.

Ez a tulajdonság a „*végpont nélküliség*”. Azonban még további axiómákra is szükség van, hiszen az eddigi (i)–(iv) axiómákat például a β-tól lényegesen különböző η rendezés is kielégíti. Tekintsük a következő (v) tulajdonságot:

(v) $\forall x \exists y (x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y)) \wedge \forall y \exists x (x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y))$.

Ez a rendezés „*diszkrét*” tulajdonsága, vagyis az, hogy bármely elemhez van közvetlenül rákövetkező, és van közvetlenül őt megelőző elem.

Megmutatható, hogy az (i)–(v) axiómák együttese, jelölje ezt Σ_β, valóban axiomatizálja $\mathrm{Th}\beta$-t. Mint azt már említettük, ezt például úgy lehet igazolni, hogy $\mathrm{Ded}(\Sigma_\beta)$ komplettségét bizonyítjuk, ez utóbbi bizonyítást itt azonban nem részletezzük.

Könnyen látható, hogy Σ_β-nak (ezért $\mathrm{Th}\beta$-nak) modellje $\beta + \beta$, azaz $\beta \cdot 2$ is. Ebből már megállapítható, hogy a β rendezés *nem megszámlálható* kategorikus, hiszen β és $\beta + \beta$ nem izomorfak (lásd majd az 1. Példát), ezért $\beta + \beta$ *nemstandard modellje* Th β-nak.

Általában Σ_β-nak (ezért $\mathrm{Th}\beta$-nak) $\beta \cdot \varepsilon$ is modellje, ahol ε tetszőleges rendezés lehet. Ez a körülmény jól illusztrálja a Löwenheim–Skolem–Tarski-tételt, és azt, hogy „fújható fel” egy struktúra, most nevezetesen β. Hiszen egy $\beta \cdot \varepsilon$ típusú rendezés számossága akármekkora lehet, ezért általában nem izomorf β-val, de elmélete megegyezik β elméletével.

- *A racionális számok rendezésének elmélete.*

E rész végén igazolni fogjuk, hogy a következő (i)–(iv) és (v) axiómák Σ_η-val jelölhető együttese által generált $\mathrm{Ded}(\Sigma_\eta)$ elmélet *komplett*, ezért $\mathrm{Ded}(\Sigma_\eta)$ *pontosan* a racionális számok rendezésének elmélete.

Legyenek az (i)–(iv) axiómák ugyanazok, mint az egész számok rendezésének előző (i)–(iv) axiómái, továbbá legyen az (v) axióma:

(v) $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$.

Ez a „*sűrű rendezés*” tulajdonság, amely azt írja le, hogy bármely két elemhez található egy közöttük elhelyezkedő elem.

Σ_β-hoz hasonlóan most is könnyen belátható, hogy az $\eta \cdot \varepsilon$ típusú rendezések is kielégítik az (i)–(v) axiómákat, ahol ε tetszőleges rendezés lehet. Tehát, ha ε nagyobb megszámlálhatónál, akkor *nemstandard modellt kapunk*. **Ez is illusztrálja a Löwenheim–Skolem–Tarski-tételt és a modellek „felfújását”**.
Megmutatható azonban, hogy szemben Thβ-val, a Thη elmélet ω-kategorikus.

Felvetődik a kérdés, hogy ha az egy, illetve két végponttal rendelkező (de a másik irányban nem korlátos) diszkrét rendezéseket vagy a sűrű rendezéseket tekintjük, megmarad-e az axiomatizálhatóság? Érdekes eset például a természetes számoknak a szokásos rendezése. Megmutatható, hogy az axiomatizálhatóság csak a felső és alsó végponttal is rendelkező diszkrét rendezések esetében romlik el, az összes többi esetben megmarad.

Nevezetes eredmény a végpont nélküli diszkrét rendezések axiomatizálhatósága (a fenti (i)–(v) például egy alkalmas axiómarendszer).

Már láttunk példát a természetes számok nemstandard modelljére, amelyben van végtelen nagy elem (lásd 4. Tétel). Most a természetes számok egy korlátozott modelljének elméletére mutatunk nemstandard modellt:

- *A természetes számok egy szűkített struktúrájának elmélete.*

Tekintsük az $\mathcal{L}$: S, 0, $<$ nyelvet és a természetes számok standard modelljét erre a nyelvre korlátozva: $\mathcal{N}'' = \left\langle N, S^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}} \right\rangle$. Igazolható, hogy a következő (i)–(vii) axiómák által generált elmélet *komplett*. Mivel a természetes számok standard modelljének korlátozása kielégíti az (i)–(vii) axiómákat, ezért a szóban forgó elmélet *pontosan* a természetes számok szűkített standard modelljének elmélete Th$\left\langle N, S^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}} \right\rangle$.

Az (i)–(iii) axiómák legyenek a rendezés axiómái, a többi axióma pedig a következő:
(iv) $\forall x \forall y (x < y \to \neg y < x)$ (aszimmetria),
(v) $\forall y (y \neq 0 \to \exists x (y = Sx))$,
(vi) $\forall x \forall y (x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y)$,
(vii) $\forall x \neg (x < 0)$.

A természetes számok fenti szűkített struktúrájának elmélete még axiomatizálható és komplett. Azonban az inkomplettségi tételből következően, ha a nyelvet kibővítjük az $+$ és $\cdot$ műveletekkel, és az axiómákhoz hozzávesszük a Peano-axiómákat, akkor az elmélet komplettsége már „elromlik”.
Könnyen ellenőrizhető, hogy Th$\mathcal{N}''$ *nemstandard modelljét* adja a $\omega + \beta \cdot \varepsilon$ rendezés, ahol ε tetszőleges rendezés. A 0-nak jelöljük ki e rendezés legkisebb elemét, az S interpretációja pedig legyen a szokásos rákövetkezés.

- *A valós számok szokásos struktúrájának elmélete.*

Igazolható, hogy a valósan zárt testek elmélete *komplett*. A valós számok standard $\mathcal{R} = \langle R, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ struktúrája kielégíti ezen axiómákat, így a valósan zárt testek szóban forgó elmélete és $\mathrm{Th}\mathcal{R}$ egybeesik.
Nemstandard modell $\mathrm{Th}\mathcal{R}$-nek például az a modellje, amely végtelen nagy számot (vagy végtelen kicsiny számot) is tartalmaz (lásd 6.3 rész).

- *A komplex számok szokásos struktúrájának az elmélete.*

Igazolható, hogy *a* 0 *karakterisztikájú, algebrailag zárt testek* Γ *elmélete komplett*. A komplex számok standard $\mathcal{Z} = \langle Z, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ struktúrája kielégíti ezen axiómákat, így a 0 karakterisztikájú, algebrailag zárt testek elmélete és $\mathrm{Th}\mathcal{Z}$ valóban egybeesnek.

Γ komplettségének igazolása majd a Łoś–Vaught-tétel (8. Tétel) alkalmazásával történhet, kihasználva Steinitz egy klasszikus tételét, miszerint bármely két, algebrailag zárt, ugyanazon p karakterisztikájú és λ számosságú ($\lambda > \omega$) test izomorf.

* * *

A következőkben igazoljuk: a végpont nélküli, sűrű rendezés elmélete komplett. *Két módszert mutatunk arra, hogy hogyan lehet elméletek komplettségét bizonyítani.* Az egyik a *kvantorelimináció* módszere, a másik a *Łoś–Vaught-tétel* alkalmazása.

A *kvantorelimináció* módszerének lényege: bizonyos esetekben létezik formuláknak, az úgynevezett *alapformuláknak* egy Σ halmaza, hogy a nyelv minden φ formulájához található vele ekvivalens olyan formula, amely Σ-beli formulákból épül fel a $\neg$, $\vee$, $\wedge$ műveletek segítségével. Ezt az ekvivalencia tulajdonságot formulaindukcióval lehet ellenőrizni.

7. Tétel. A végpont nélküli, sűrű rendezés elmélete komplett.

Bizonyítás. A nyelv legyen a rendezés nyelve. A fent említett Σ formulahalmaz legyen a rendezés nyelvében az atomi formulák halmaza, azaz az $x < y$ és $x = y$ alakú formulák összessége.
Igazoljuk a következő (A) állítást:

A nyelv bármely formulája logikailag ekvivalens egy olyan diszjunktív normálformájú formulával (tehát egy speciális kvantormentes formulával), amelynek konjunkciós tagjai atomi formulák (Σ-beli formulák), továbbá szabad változóinak összessége megegyezik az eredeti formula szabad változóinak összességével.

Ebből a tétel állítása már következik. A nyelvben csak az egyik kvantort engedjük meg, például a $\exists$-t. Például ha egy zárt formula $\exists x\delta$ alakú, és δ egyetlen szabad változója x, valamint δ' jelöli δ-nak egy a fenti tulajdonságú diszjunktív normálformáját, akkor

a benne szereplő atomi formulák $x=x$ vagy $x<x$ alakúak (tehát érvényesek, vagy azonosan hamisak), így δ' és ezért δ is érvényes, vagy azonosan hamis. A formulák induktív definícióját használva a tétel állítása következik.
Az (A) állítást a formulák definíciója szerinti indukcióval bizonyítjuk.
Atomi formulákra az állítás Σ definíciója szerint igaz.
Először meggondoljuk, hogy (A) igaz atomi formulák tetszőleges Boole-kombinációjára.

Tekintsük α *diszjunktív* normálalakját, utóbbi szabad változói nyilván megegyeznek az eredeti formula szabad változóival. A diszjunktív normálalakban szereplő atomi formulák *negáltjait* a következőképpen alakíthatjuk át: $\neg x=y$ a rendezés trichotomia tulajdonsága miatt, a rendezések elméletében ekvivalens az $x<y\vee y<x$ formulával, $\neg x<y$ pedig ekvivalens az $y<x\vee x=y$ formulával. Helyettesítve a negáltakat az ekvivalensükkel, és használva $\wedge$-nak $\vee$-ra vonatkozó disztributivitását, elérhető, hogy a kívánt (csak atomi formulákat tartalmazó) diszjunktív normálformájú alakot kapjuk.

Tegyük fel, hogy az α formulára igaz az (A) állítás. Megmutatjuk, hogy $\exists x\alpha$-ra is igaz.

Tehát α ekvivalens egy olyan diszjunktív normálalakú formulával, hogy benne a konjunkciós tagok atomi formulák. E normálforma legyen $\alpha_1\vee\ldots\vee\alpha_n$ alakú, ahol α_i tehát atomi formulák konjunkciója. Ekkor $\exists x\alpha$ mindig ekvivalens $\exists x\alpha_1\vee\ldots\vee\exists x\alpha_n$-nel. Tekintsük a diszjunkció valamely tagját, például $\exists x\alpha_i$-t, elegendő erre meggondolni az (A) állítást. Három eset van:

Ha α_i-ben *nem szerepel* x, akkor $\exists x$-et elhagyhatjuk, és készen vagyunk. A szabad változók halmaza most sem változott.

Ha α_i-ben *szerepel* x *valamely egyenlőségben*, tehát szerepel $x=y$ vagy $y=x$ valamely y individuumváltozóra, akkor α_i-ben *valamennyi* x-et helyettesítsük y-nal, és $\exists x$-et szintén elhagyhatjuk. A szabad változók halmaza nem változott.

Ha *szerepel az* x *individuumváltozó* α_i*-ben, de nem egyenlőségben*, akkor gyűjtsük össze az x-et tartalmazó konjunkciós tagokat, tehát alakítsuk át α_i-t $\gamma_i\wedge\beta_i$ alakúvá, ahol γ_i már nem tartalmazza x-et, β_i pedig

$$y_1<x\wedge\ldots\wedge y_k<x\wedge x<z_1\wedge\ldots\wedge x<z_m \tag{2}$$

alakú, vagy

$$y_1<x\wedge\ldots\wedge y_k<x \tag{3}$$

alakú, vagy

$$x<z_1\wedge\ldots\wedge x<z_m \tag{4}$$

alakú valamely $y_1,\ldots y_k$, $z_1,\ldots z_m$ individuumváltozókra.
$\exists x\alpha_i$ nyilván ekvivalens $\gamma_i\wedge\exists x\beta_i$-vel.
Ha β_i pontosan (2) alakú, akkor $\exists x\beta_i$-t cseréljük ki a $\wedge_{1\le i\le k,1\le j\le m}y_i<z_j$ formulával. A *„sűrű” tulajdonság* és a tranzitivitás miatt az utóbbi formula ekvivalens $\exists x\beta_i$-vel, mint az oda-vissza meggondolható, és szabad változóinak halmaza is megegyezik $\exists x\beta_i$-ével. Ha β_i (3) alakú, akkor pedig cseréljük ki $\exists x\beta_i$-t például az

$y_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge y_k = y_k$ formulával, hiszen $\exists x \beta_i$ a felső végpont nélküliség miatt mindig teljesül. Hasonlóan járhatunk el a (4) alakú formula esetén is.

Ezzel az állítást igazoltuk.

■

A kvantorelimináció módszerével igazolható többek között az *egyenlőség elméletének vagy a természetes számok* fent definiált korlátozott elméletének *komplettsége*.

A jelzett másik módszer komplettség bizonyítására az, hogy, bizonyos feltételek mellett, az elmélet λ-kategoricitása *elégséges feltétel* a komplettségéhez:

8. Tétel. (Łoś–Vaught-tétel.) Tegyük fel, hogy a Σ elmélet λ-kategorikus, a nyelv számossága legfeljebb λ, továbbá Σ-nak csak végtelen modelljei léteznek. Ekkor Σ komplett.

Bizonyítás. Indirekt, tegyük fel, hogy Σ nem komplett, azaz van olyan α formula, amelyre $\Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg\alpha$ egyike sem teljesül. Kihasználva a 3.1 rész 19. Tételt, ez azt jelenti, hogy a $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ és a $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\alpha\}$ elméletek ellentmondástalanok, azaz a teljességi tétel értelmében van modelljük, sőt a feltétel értelmében végtelen modelljük is van. Így alkalmazhatjuk Σ_1-re és Σ_2-re a Löwenheim–Skolem–Tarski-tételt, amelynek értelmében mindkét elméletnek van λ számosságú modellje. A λ-kategoricitás miatt ezen modellek izomorfak, ami viszont ellentmond annak, hogy az egyik modellen α, a másik modellen $\neg\alpha$ igaz. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát Σ valóban komplett.

■

Igazolható, hogy a végpont nélküli, sűrű rendezés elmélete ω-kategorikus, ezért a Łoś–Vaught-tétel értelmében az elmélet valóban komplett.

A 8. Tétel alkalmazható például a *végtelen halmazok* elméletének, a *p karakterisztikájú algebrailag zárt testek* elméletének, az *atommentes Boole-algebrák* elmélete komplettségének igazolására. A tétel megfordítása nem igaz, például a diszkrét végpont nélküli rendezések elméletének csak végtelen modelljei vannak, de *nem kategorikus egyetlen λ-ra sem.*

* * *

E rész végén az elemi ekvivalencia, illetve izomorfia fogalmával kapcsolatos néhány példát mutatunk.

Elemien ekvivalensek-e, illetve izomorfak-e a következő rendezések?

1. Példa. β*, illetve* $\beta \cdot 2$.

Elemien ekvivalensek, hiszen mindkettő diszkrét, végpont nélküli rendezés (kielégítik az (i)–(v) axiómákat), azaz egy komplett elmélet modellje. Azonban nem izomorfak, hiszen $\beta \cdot 2$-ben van két olyan elem, amelyek között végtelen sok elem található (jelölje ez utóbbi tulajdonságot T), míg β-ban ilyen elempár nincs. A T tulajdonság leírható egy $\alpha_n(x, y)$ formulahalmazzal, ahol az $\alpha_n(x, y)$ formula jelentse azt, hogy x és y között legalább n különböző elem van (ez utóbbi könnyen formalizálható). Tehát az $\{\alpha_n(x, y) \colon n = 1, 2, \ldots\}$ formulahalmaz $\beta \cdot 2$-n kielégíthető, β-n pedig nem, ezért a két rendezés nem izomorf.

2. Példa. $\beta \cdot \omega$*, illetve* $\omega \cdot \beta$.

Nem elemien ekvivalensek, mivel $\beta \cdot \omega$ diszkrét, míg $\omega \cdot \beta$ nem, hiszen nem minden elemnek van közvetlen megelőzője. Tehát nem izomorfak.

3. Példa. $\eta \cdot \beta$*, illetve* $\beta \cdot \eta$.

Nem elemien ekvivalensek, mivel $\eta \cdot \beta$ sűrű, míg $\beta \cdot \eta$ nem.

4. Példa. $\omega + 1$*, illetve* $1 + \omega$.

Nem elemien ekvivalensek, mivel $\omega + 1$-ben van olyan elem, amelyhez nincs őt közvetlen megelőző, tehát $\omega + 1$ nem diszkrét, míg $1 + \omega$ diszkrét.

5. Példa. η*, illetve* $\eta \cdot 2$.

Mindkettő sűrű, végpont nélküli rendezés, így egy komplett elmélet modelljei. Tehát elemien ekvivalensek. Belátható, az izomorfia definícióját használva, hogy izomorfak is.

4.3 Modellkonstrukciók

Fontos módszer a matematikában az, hogy egy struktúrából vagy struktúrákból új struktúrát vagy struktúrákat konstruálunk. 2.4.2-ben már definiáltuk a részstruktúraképzés fogalmát. Jelen részben a direkt szorzatot, az elemi rész képzést (elemi kiterjesztés képzést), a homomorf struktúra képzést, az ultrahatványt és ultraszorzatot ismertetjük, valamint az utóbbi kettő egy-egy alkalmazását.

4.3.1 Néhány modellkonstrukció

1. Definíció. $\mathcal{A}$-nak egy $\mathcal{B}$ részstruktúrája *elemi részstruktúra* ($\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$), ha bármely α formulára és $\mathcal{B}$ *feletti* σ *értékelésre*

$$\mathcal{B} \vDash \alpha^{\sigma} \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathcal{A} \vDash \alpha^{\sigma}. \tag{1}$$

$\mathcal{A}$-ról azt mondjuk, hogy *elemi kiterjesztése* $\mathcal{B}$-nek.

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$-ból nem következik $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$, hiszen például $\mathcal{A} = \left\langle \{1, 2, 3\}, <^{\mathcal{A}} \right\rangle$ részstruktúrája $\mathcal{B} = \left\langle \{1, 2, 3, \ldots\}, <^{\mathcal{B}} \right\rangle$-nek, de nem elemi része, mert például $\mathcal{A}$ felülről korlátos ($\exists x \forall y x \leq y$ teljesül).

A $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ definíciót zárt formulákra alkalmazva kapjuk, hogy $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$-ból következik $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$. Azonban fordítva, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ és $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$-ból *együttesen sem következik* $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$. Például $\mathcal{B} = \left\langle \{1, 2, 3, \ldots\}, <^{\mathcal{B}} \right\rangle$ részstruktúrája az $\mathcal{A} = \left\langle \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, <^{\mathcal{A}} \right\rangle$-nak, $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ (sőt $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$), mégsem teljesül $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$. Ugyanis például a $\neg \exists x (x < y)$-t, α formulát $y = 1$ kielégíti $\mathcal{B}$-ben, de $\mathcal{A}$-ban nem.

2. Tétel. (Tarski–Vaught-tétel.) Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azonos típusú struktúrák, amelyekre $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Ekkor $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ fennáll akkor és csak akkor, ha a nyelv bármely α formulájára és $\mathcal{B}$ feletti σ értékelésre $\mathcal{A} \vDash (\exists x \alpha)^{\sigma}$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{B} \vDash \alpha^{\sigma_b^x}$ valamely $b \in B$-re.

Bizonyítás.

Tegyük fel először, hogy $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$. (1) szerint $\mathcal{A} \vDash (\exists x \alpha)^{\sigma}$ tetszőleges $\mathcal{B}$ feletti σ értékelésre pontosan akkor, ha ugyanezen σ értékelésre $\mathcal{B} \vDash (\exists x \alpha)^{\sigma}$. Utóbbi jelentése, az értékelés definíciója szerint, $\mathcal{B} \vDash \alpha^{\sigma_b^x}$ valamely $b \in B$-re.

Fordítva, igazoljuk az (1) feltételt a formulák definíciója szerinti indukcióval. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a nyelv csak a $\neg$, $\wedge$ és $\exists$ logikai konstansokat tartalmazza.
Atomi formulákra (1) igaz a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ feltétel miatt.
Könnyű meggondolni, hogy (1) a Boole-kombinációkra is igaz. Például a konjunkció esete: ha (1) igaz α-ra és β-ra, akkor igaz $\alpha \wedge \beta$-ra is. Ugyanis $\mathcal{B} \vDash (\alpha \wedge \beta)^{\sigma}$ valamely $\mathcal{B}$ feletti σ értékelésre pontosan akkor, ha $\mathcal{B} \vDash \alpha^{\sigma}$ és $\mathcal{B} \vDash \beta^{\sigma}$. $\mathcal{A} \vDash (\alpha \wedge \beta)^{\sigma}$ is pontosan akkor teljesül valamely $\mathcal{B}$ feletti σ értékelésre, ha $\mathcal{A} \vDash \alpha^{\sigma}$ és $\mathcal{A} \vDash \beta^{\sigma}$. Azonban az indukciós feltételt használva, például $\mathcal{A} \vDash \alpha^{\sigma}$ és $\mathcal{B} \vDash \alpha^{\sigma}$ ekvivalensek. Hasonló igaz β-ra is.
Tegyük fel, hogy (1) igaz α-ra. Megmutatjuk, hogy $\exists x \alpha$-ra is igaz. $\mathcal{B} \vDash (\exists x \alpha)^{\sigma}$ fennáll valamely $\mathcal{B}$ feletti σ értékelésre pontosan akkor, ha $\mathcal{B} \vDash \alpha^{\sigma_b^x}$ valamely $b \in B$-re. Az indukciós feltételt használva utóbbi pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{A} \vDash \alpha^{\sigma_b^x}$. Ez viszont azt jelenti, hogy $\mathcal{A} \vDash (\exists x \alpha)^{\sigma}$, mint azt bizonyítani kellett.

■

Megjegyezzük, hogy a matematikában használatos *permanenciaelv* egyik lehetséges értelmezése mögött az elemi kiterjesztés fogalma áll.

A 4.2.1-ben már érintettük az *elemi beágyazás* fogalmát, amely az izomorf beágyazás és az elemi kiterjesztés tulajdonságok ötvözete:

3. Definíció. Egy $\mathcal{A}$ struktúra *elemien beágyazható* egy C struktúrába, ha beágyazható, valamint a beágyazás elemi része C-nek.

Másképpen: $\mathcal{A}$ elemien beágyazható egy $\mathcal{C}$ struktúrába, ha $\mathcal{A}$ izomorf $\mathcal{C}$ egy elemi részével.

Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azonos típusú struktúrák. A következő definíciók speciális esetei jól ismertek az algebrából.

4. Definíció. Egy $\mathcal{B}$ struktúra az $\mathcal{A}$ struktúra *homomorf képe*, ha van olyan $h\colon A \to B$ leképezés, amelyik reláció- és művelettartó, valamint ráképezés (azaz szürjektív).

Az izomorfizmus- és homomorfizmus-képzés között tehát az a különbség, hogy utóbbinál a leképezés nem feltétlenül invertálható. Homomorfizmusra az egyik legismertebb példa, lineáris algebrából a lineáris leképezés (lineáris operátor) fogalma, ilyen például a vetítés.

5. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ formula igazsága *megőrződik* az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák alaphalmazai közötti $h\colon A \to B$ leképezésnél, ha $\mathcal{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots a_n)$ teljesüléséből következik $\mathcal{B} \vDash \varphi(ha_1, \ldots ha_n)$ teljesülése tetszőleges $a_1, \ldots a_n \in A$-ra.

A 3.5-ben már megfogalmaztuk normálformára, mit jelent az, hogy egy mondat pozitív. Az alábbiakban a következő, az ottanival ekvivalens meghatározást fogjuk használni: *Egy mondat* pozitív*, ha a logikai műveletek közül legfeljebb csak a* $\vee, \wedge, \forall$ *és* $\exists$ *műveleteket tartalmazza.*

A következő tétel a homomorfizmusok egy fontos tulajdonságára vonatkozik.

6. Tétel. Ha a $\mathcal{B}$ struktúra az $\mathcal{A}$ struktúra homomorf képe valamely $h: A \to B$ leképezésre és φ pozitív formula, akkor α igazsága megőrződik a h leképezésnél.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a nyelv nem tartalmaz függvényszimbólumot, ez nem jelenti az általánosság korlátozását. A tételt formulaindukcióval igazoljuk.

1. Atomi formulákra megőrződik az igazság a homomorfizmus definíciójából következően, tehát $\mathcal{A} \vDash P(a_1, \dots a_n)$ teljesüléséből következik $\mathcal{B} \vDash P(ha_1, \dots ha_n)$ teljesülése tetszőleges $a_1, \dots a_n \in A$-ra.

2. Tegyük fel, hogy az $\alpha(x_1, \dots x_n)$ és $\beta(x_1, \dots x_n)$ formulák igazsága megőrződik. Igazolandó, hogy az $\alpha \wedge \beta$ formula igazsága is megőrződik.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \vDash (\alpha \wedge \beta)(a_1, \dots a_n)$ valamely $a_1, \dots a_n \in A$ elemekre. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{A} \vDash \alpha(a_1, \dots a_n)$ és $\mathcal{A} \vDash \beta(a_1, \dots a_n)$ egyszerre teljesül. Az indukciós feltétel miatt egyenként következik $\mathcal{B} \vDash \alpha(ha_1, \dots ha_n)$, illetve $\mathcal{B} \vDash \beta(ha_1, \dots ha_n)$. Utóbbi viszont ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{B} \vDash (\alpha \wedge \beta)(ha_1, \dots ha_n)$.

Hasonlóan igazolható a diszjunkció esete is.

3. Tegyük fel, hogy az $\alpha(x_1, \dots x_n)$ formula igazsága megőrződik. Megmutatjuk, hogy a $\forall x_1 \alpha(x_1, \dots x_n)$ formula igazsága is megőrződik.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \vDash \forall x_1 \alpha(x_1,\, a_2, \dots a_n)$ valamely $a_2, \dots a_n \in A$ tetszőleges, de rögzített elemekre. Igazolandó, hogy $\mathcal{B} \vDash \forall x_1 \alpha(x_1,\, ha_2, \dots ha_n)$. $\mathcal{A} \vDash \forall x_1 \alpha(x_1,\, a_2, \dots a_n)$ azt jelenti, hogy $\mathcal{A} \vDash \alpha(a_1, \dots a_n)$ tetszőleges $a_1 \in A$-ra. Az indukciós feltételből következik, hogy

$$\mathcal{B} \vDash \alpha(ha_1, \dots ha_n) \qquad (2)$$

tetszőleges $a_1 \in A$-ra. $\mathcal{B} \vDash \forall x_1 \alpha(x_1,\, ha_2, \dots ha_n)$ azt jelenti, hogy $\mathcal{B} \vDash \alpha(b, \dots ha_n)$ tetszőleges $b \in B$-re. Mivel h egy ráképezés B-re, ezért a ha_1 elemek befutják B-t, azaz (2)-ből következik az állítás.

Az univerzálishoz hasonlóan igazolható az egzisztenciális kvantor esete is.

■

A matematikából már ismert konstrukció a *direkt szorzat képzése*. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azonos típusú struktúrák. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a nyelv csupán egy kétváltozós R relációjelet és egy kétargumentumú f függvényjelet tartalmaz mint nemlogikai jeleket.

7. Definíció. Az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ struktúrák *direkt szorzatán* értjük azt a $\mathcal{C}$ struktúrát (jelölés: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$), amelynek alaphalmaza $C = A \times B$, és az $R^{\mathcal{C}}$ reláció és $f^{\mathcal{C}}$ függvény értelmezése a következő:

$R^{\mathcal{C}}\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \uparrow$ akkor és csak akkor, ha $R^{\mathcal{A}}\langle a,c\rangle = \uparrow$ és $R^{\mathcal{B}}\langle b,d\rangle = \uparrow$
$(a, c \in A,\ b, d \in B)$,

$f^{\mathcal{C}}\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle = \langle e,g\rangle$ akkor és csak akkor, ha $f^{\mathcal{A}}ac = e$ és $f^{\mathcal{B}}bd = g$
$(a, c, e \in A$ és $b, d, g \in B)$.

Hasonlóan definiálható *véges sok* struktúra direkt szorzata is. Ha $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, akkor a direkt szorzatot második *direkt hatványnak* nevezzük. Például a 3 dimenziós geometriai tér, mint vektortér, direkt szorzata a síknak, mint 2 dimenziós vektortérnek; és az egyenesnek, mint 1 dimenziós vektortérnek. Vagy harmadik direkt hatványa az egyenesnek, mint 1 dimenziós vektortérnek. A direkt szorzat, direkt hatvány képzés konstrukciója általánosítható *végtelen sok* komponens esetére is. Az $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ struktúrák direkt szorzatának jelölése $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$, a direkt hatványé pedig ${}^{I}\mathcal{A}$.

A *direkt szorzat konstrukció* „hiányossága”, hogy nem feltétlenül örökli a komponensstruktúrák tulajdonságait. Például a rendezett valós számok direkt hatványa (a sík rendezett számpárjai) *nem örökli* a rendezés szokásos tulajdonságait. Az alább ismertetendő konstrukció, az *ultrahatvány* (és az *ultraszorzat*) viszont *örökli* a „domináló” elsőrendű tulajdonságokat. Ez az oka, hogy e konstrukció viszonylagos újkeletűsége ellenére a logika és az algebra egyik központi jelentőségű technikájává vált. Érdekes, hogy, mint látni fogjuk, szemben a hagyományos szorzatokkal, ez a konstrukció igazán csak *végtelen sok* struktúra szorzatára hatékony.

4.3.2 Ultrahatvány, ultraszorzat

1. Fogalmak, alaptételek. E részben a modellelmélet két igen fontos konstrukcióját, az ultrahatványt és az ultraszorzatot ismertetjük. Az ultrahatványok speciális ultraszorzatok. Az egyszerűbb kezelhetőség miatt e részben csupán az ultrahatvány fogalmát részletezzük, az ultraszorzatokra vonatkozó eredmények teljesen hasonlóan igazolhatók.

A következő fogalom a matematika több területén is fontos szerepet játszik.

8. Definíció. (Ultraszűrő.) Egy I halmaz *részhalmazainak* $\mathcal{F}$ *rendszere ultraszűrő* I-n, ha $\mathcal{F}$ teljesíti az alábbi (i)–(iv) tulajdonságokat.

(i) $I \in \mathcal{F}$

(ii) ha $A \in \mathcal{F}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) ha $A \in \mathcal{F}$ és $A \subseteq B$, akkor $B \in \mathcal{F}$
(iv) tetszőleges $A \subseteq I$-re, $A \in \mathcal{F}$ vagy $\sim A \in \mathcal{F}$.

Az ultraszűrő fogalmára több fontos *motivációt* is lehet találni a matematikában.

- A *logika* szempontjából az ultraszűrő fogalmának a *komplett logikai elmélet* fogalma feleltethető meg (lásd még 6.1.1-et). A-nak, illetve B-nek formulák felelnek meg, $\cap$-nek, illetve $\sim$-nak a $\wedge$ és a $\neg$ műveletek, a $\subseteq$ relációnak pedig a $\vdash$ következtetésreláció felel meg.
- A *mértékelmélet* (vagy a valószínűségszámítás) felől közelítve, az ultraszűrő fogalmának, a hatványhalmaz-algebrán értelmezett 0–1 mértékek esetén, az 1 mértékű halmazok összessége felel meg. Emlékeztetünk arra, hogy egy μ nemnegatív, valós halmazfüggvény *mérték* (valószínűségi mérték) egy H alaphalmazú $\mathcal{H}$ (Boole)-halmazalgebrán, ha a következő a), b) és c) tulajdonságok teljesülnek:

  a) $0 \leq \mu(A) \leq 1$ minden $A \in H$-ra,
  b) $\mu(I) = 1$, ahol I H-ban az egységhalmaz,
  c) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, feltéve, hogy $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in H$.

  Legyen I rögzített halmaz, és jelölje $\mathcal{P}$ az I hatványhalmaz algebráját (mint speciális Boole-halmaz algebrát). Legyen *μ 0–1 mérték $\mathcal{P}$-n*, azaz csak 0 és 1 értékeket felvevő mérték $\mathcal{P}$-n, és legyen $\mathcal{F}$ az *1 mértékű halmazok összessége*, tehát $\mathcal{F} = \{A \colon A \subseteq I, \mu(A) = 1\}$.
  Meggondoljuk, hogy *az 1 valószínűségű halmazok $\mathcal{F}$ összessége ultraszűrőt alkot*: (i) közvetlenül a mérték definíciója szerint teljesül, (iv) pedig azért, mert $\mathcal{P}$ hatványhalmaz-algebra. Mivel az additivitás miatt igaz $\mu(\sim A) = 1 - \mu(A)$, (ii)-höz ezért elég belátni, hogy $\mu(\sim(A \cap B)) = 0$, azaz $\mu(\sim A \cup \sim B) = 0$. Azonban ez igaz, mert 0 mértékű halmazok uniója is 0 mértékű (a c) tulajdonság miatt). (iii) a 0–1 mérték tulajdonságból és az additivitásból következik.

  Igazolható a fentiek megfordítása is: *ha $\mathcal{F}$ egy ultraszűrő I-n, akkor $\mu(A) = 1$, ha $A \in \mathcal{F}$, és $\mu(A) = 0$, ha $\sim A \in \mathcal{F}$ definíciójú halmazfüggvény 0–1 mérték I hatványhalmaz-algebráján*.

  Igaz a következő is: *kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat* az I-n értelmezett ultraszűrők és az I hatványhalmaz-algebráján értelmezett 0–1 mértékek között.

Ezután egy terminológiát vezetünk be. Legyen $\mathcal{F}$ ultraszűrő I-n. Legyen $\{T_i : i \in I\}$ „tulajdonságoknak” egy I-vel indexezett összessége (ahol T_i minden i-re igaz vagy hamis). Amennyiben $\{i \colon T_i \text{ igaz}\} \in \mathcal{F}$, akkor azt mondjuk, hogy T_i *majdnem minden* i-re (rövidítve: m. m i-re.) teljesül.
E szóhasználat eredete is a mértékelméletben található. Ugyanis, ha μ rögzített 0–1 mérték I hatványhalmaz-algebráján és az $\{i \colon T_i \text{ igaz}\}$ halmaz 1 valószínűségű halmaz, akkor a mértékelméletben azt szokták mondani, hogy T_i *majdnem mindenütt* (röviden m. m.) teljesül, másképpen, 1 valószínűséggel teljesül.

Legyen I rögzített, de tetszőleges halmaz. Jelen alfejezetben az *I elemeivel indexezett sorozatokat jelöljük* (a_i)-vel $(i \in I)$. *Sorozaton* e részben végig I elemeivel indexezett sorozatokat értünk. Legyen $\mathcal{L}$ rögzített elsőrendű nyelv. Egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $\mathcal{L}$ csupán egy R kétargumentumú relációjelet és egy f kétargumentumú függvényjelet tartalmaz mint nemlogikai jeleket. Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges ultraszűrő I-n.

Az $\mathcal{A}$ struktúra I-edik, $\mathcal{F}$ szerinti ultrahatványát (jelölés: ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$) *két lépésben definiáljuk*. Először definiáljuk az $\mathcal{A}' = \langle A', R', f' \rangle$-vel jelölt struktúrát, majd ezután ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$-et.

Az $\mathcal{A}'$ struktúra A' alaphalmaza legyen az A-beli elemekből alkotott, I-vel indexezett sorozatok (röviden az A-sorozatok) összessége. R'-re és f'-re legyenek igazak a következők:

$$R'(a_i)(b_i) = \uparrow \ \mathcal{A}'\text{-n akkor és csak akkor, ha } Ra_ib_i = \uparrow \ \mathcal{A}\text{-n m. m. } i \in I\text{-re,} \tag{3}$$

$$f'(a_i)(b_i) = (c_i) \ \mathcal{A}'\text{-n akkor és csak akkor, ha } f a_i b_i = c_i \ \mathcal{A}\text{-n m. m. } i \in I\text{-re.} \tag{4}$$

Meggondolható, hogy itt f' általában még *nem* függvény, hanem egy általános reláció, mivel többértékű is lehet. A definíció következő lépcsőjére többek között azért is van szükség, hogy f' helyett függvényt kapjunk, és ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$ ugyanolyan típusú struktúra legyen, mint $\mathcal{A}$.

Két A-sorozatot, (a_i)-t és (b_i)-t, ezután akkor tekintsünk $\sim$ ekvivalensnek, ha $a_i = b_i$ m. m. $i \in I$-re.

Könnyű ellenőrizni, hogy $\sim$ valóban ekvivalenciareláció (tehát maga egy (a_i) sorozat *reprezentánsa* az őt tartalmazó $\sim$-ra vett ekvivalenciaosztálynak). Jelölje az (a_i) sorozatot tartalmazó osztályt $\widehat{(a_i)}$, ezen osztályok összességét pedig $\widehat{A}$.

Megmutatható, hogy a (3) és (4)-beli definíciók kompatibilisek a $\sim$ relációval, tehát ha az (a_i), (b_i) és (c_i) sorozatok helyett velük ekvivalens sorozatokat választunk, akkor R' igazságértéke nem változik, f' értéke pedig ekvivalens az eredetivel.

Például ha $(a_i) \sim (d_i)$ és $(b_i) \sim (f_i)$, akkor $R'(a_i)(b_i) = \uparrow$ akkor és csak akkor, ha $R'(d_i)(f_i) = \uparrow$. Hiszen ha $a_i = d_i$ és $b_i = f_i$ m. m., akkor a (ii) ultraszűrő tulajdonság szerint $a_i = d_i$ és $b_i = f_i$ *egyidejűleg* is m. m. $i \in I$-re fennáll. Tehát nyilván $Ra_ib_i = Rd_if_i$ m. m. Ezért ha $R'(a_i)(b_i) = \uparrow$ $\mathcal{A}'$-n, azaz $Ra_ib_i = \uparrow$ m. m. I-n, akkor $Ra_ib_i = Rd_if_i$ m. m. miatt $Rd_if_i = \uparrow$ m. m. I-n, tehát $R'(d_i)(f_i) = \uparrow$ $\mathcal{A}'$-n valóban. Mindennek megfordítása is igaz. Hasonlóan gondolható meg f' definíciójának esete is.

Azt kaptuk, hogy R' és f' tekinthető „lényegében” az $\widehat{A}$-beli ekvivalenciaosztályokon definiáltnak, és így f' már függvény.

Tehát az ultrahatvány definíciójának második és befejező lépése, azaz ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$ (struktúrajelöléssel az $\widehat{\mathcal{A}} = \left\langle \widehat{A}, \widehat{R}, \widehat{f} \right\rangle$) definíciója:

9. Definíció. (Ultrahatvány.)
${}^{I}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ alaphalmaza legyen $\widehat{A}$,
$\widehat{R}$-re teljesüljön
$\widehat{R}(\widehat{a_i})(\widehat{b_i}) = \uparrow$ $\widehat{\mathcal{A}}$-n akkor és csak akkor, ha $R'(a_i)(b_i) = \uparrow$ $\mathcal{A}'$-n, (5)
$\widehat{f}$-re teljesüljön
$\widehat{f}(\widehat{a_i})(\widehat{b_i}) = (\widehat{c_i})$ $\widehat{\mathcal{A}}$-n akkor és csak akkor, ha $f'(a_i)(b_i) = (c_i)$ $\mathcal{A}'$-n. (6)

A fentiek értelmében a definíció nem függ az (a_i), (b_i) és (c_i) reprezentáns sorozatok választásától.

A következőkben bizonyítjuk, hogy a (3) tulajdonság $\mathcal{L}$ *tetszőleges formulájára* is igaz, nemcsak atomi formulákra, sőt ennél általánosabban az ${}^{I}\mathcal{A}/\mathcal{F}$ definíciójában szereplő (5) tulajdonság is öröklődik *tetszőleges* φ formulára. Hasonlóan igazolható, hogy a (4) és (6) tulajdonság öröklődik a nyelv *tetszőleges termjére*.

Legyen φ a nyelv egy tetszőleges, de rögzített k szabad változós formulája.

10. Tétel. $\varphi(\widehat{(a_i)}, \widehat{(b_i)}, \ldots \widehat{(g_i)}) = \uparrow \widehat{\mathcal{A}}$-n akkor és csak akkor, ha $\varphi(a_i, b_i, \ldots g_i) = \uparrow$ $\mathcal{A}$-n m. m. $i \in I$-re, ahol az $\widehat{(a_i)}$, $\widehat{(b_i)}, \ldots \widehat{(g_i)}$-k rendre az (a_i), $(b_i), \ldots (g_i)$ sorozatokhoz tartozó ekvivalenciaosztályok. (7)

Bizonyítás. Az ultrahatvány kétlépcsős definíciójának megfelelően, először a következő, a tételbeli (7)-nek megfelelő, (8) állítást igazoljuk:

$\varphi((a_i), (b_i), \ldots (g_i)) = \uparrow$ $\mathcal{A}'$-n akkor és csak akkor, ha $\varphi(a_i, b_i, \ldots, g_i) = \uparrow$ $\mathcal{A}$-n m. m. $i \in I$-re, ahol (a_i), $(b_i), \ldots (g_i)$ tetszőleges A-sorozatok. (8)

Feltehetjük, hogy a nyelv csak a $\wedge$, $\neg$ és $\exists$ logikai konstansokat tartalmazza. Formulaindukcióval bizonyítunk.

Atomi formulákra (8) a definíció szerint igaz.

Tegyük fel, hogy α és β csak egyetlen szabad változótól függő formulák (ez nem jelenti majd az általánosság korlátozását), és tegyük fel, hogy az α és β formulákra igaz (8).

Megmutatjuk, hogy az $\alpha \wedge \beta$ formulára is igaz (8).

$\mathcal{A} \vDash (\alpha \wedge \beta)(a_i)$ m. m. i-re akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \vDash \alpha(a_i)$ és $\mathcal{A} \vDash \beta(a_i)$ egyidejűleg teljesül m. m. i-re. Az indukciós feltétel szerint $\mathcal{A}' \vDash \alpha((a_i))$ és $\mathcal{A}' \vDash \beta((a_i))$, tehát $\mathcal{A}' \vDash (\alpha \wedge \beta)((a_i))$ valóban.

Megmutatjuk, hogy (8) $\neg\alpha$-ra is igaz. $\mathcal{A} \vDash \neg\alpha(a_i)$ m. m., ha $\mathcal{A} \nvDash \alpha(a_i)$ m. m., azaz az indukciós feltétel szerint $\mathcal{A}' \nvDash \alpha((a_i))$, azaz $\mathcal{A}' \vDash \neg\alpha((a_i))$.

Tekintsünk ezután egy $\exists x\gamma$ alakú formulát, és az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy γ-nak x-en kívül csak egy szabad változója van.

Tegyük fel, hogy a (8) állítás igaz $\gamma(x/(b_i), (a_i))$-re valamely (a_i) és (b_i) A-sorozatokra, azaz $\mathcal{A}' \vDash \gamma\big((b_i), (a_i)\big)$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A} \vDash \gamma(b_i, a_i)$ m. m. I-re.
Megmutatjuk, hogy ekkor (8) igaz $\exists x \gamma(x, (a_i))$-re is.
Ugyanis $\mathcal{A} \vDash \exists x \gamma(x, a_i)$ m. m. I-re akkor és csak akkor, ha az előbbi i-kre $\mathcal{A} \vDash \gamma(b_i, a_i)$ valamely (b_i) sorozatra, $\exists$ definíciója miatt. Utóbbi az indukciós feltétel miatt akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}' \vDash \gamma((b_i), (a_i))$ az (a_i) és (b_i) A-sorozatokra. Ez ismét a $\exists$ definíciója miatt viszont akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}' \vDash \exists x \gamma(x, (a_i))$, mint azt igazolni kellett.

Végül, rátérve a tételbeli (7) állításra, vegyük észre, hogy φ*-t tekinthetjük A' helyett az A-sorozatok $\sim$ ekvivalenciaosztályain értelmezettnek.* φ igazságértéke ugyanis nem függ a reprezentáns pontsorozat választásától. Ha $\mathcal{A} \vDash \varphi(a_i,\ b_i, \dots g_i)$ m. m. I-n, és egy $\tau = (a_i{}',\ b_i{}', \dots g_i{}')$ sorozat $\sim$ ekvivalens $(a_i,\ b_i, \dots g_i)$-vel, azaz m. m. megegyezik vele, akkor nyilván erre a τ sorozatra is $\varphi^\tau = \uparrow$ $\mathcal{A}$-n m. m. I-n, a (ii) ultraszűrő tulajdonság miatt.

Tehát valóban állíthatjuk, hogy $\varphi(\widehat{(a_i)}, \widehat{(b_i)}, \dots \widehat{(g_i)}) = \uparrow$ $\widehat{\mathcal{A}}$-n.

■

Megjegyezzük, hogy a tételből közvetlenül következik $\mathcal{A} \equiv {}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$, hiszen zárt formula vagy minden $i \in I$-re igaz, vagy egyetlen $i \in I$-re sem. A következő fontos tétel ennél többet állít:

11. Tétel.

$$\boxed{\mathcal{A} \textit{ elemien beágyazható } {}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}\text{-be.}}$$

Bizonyítás.
Az egyszerűség kedvéért először azt gondoljuk meg, hogy ha $\mathcal{A}$ nem tartalmaz függvényt, akkor $\mathcal{A}$ elemien beágyazható $\mathcal{A}'$-be (az ${}^I\mathcal{A}/\mathcal{F}$ definíciójához bevezetett struktúrába).
A h beágyazás definíciója legyen a következő: $ha = (a)$, ahol (a) az $(a,\ a,\ a, \dots)$ sorozatot jelöli, $a \in A$. Ellenőrizzük a beágyazási tulajdonságot.
h egy-egyértelmű, mert ha $a \neq b$, akkor nyilván $ha \neq hb$.
h relációtartó: ugyanis, ha $\mathcal{A} \vDash Rab$, akkor $\mathcal{A}' \vDash R'(a)(b)$ igaz R' definíciója szerint. Jelölje $\mathcal{B}'$ $\mathcal{A}$ izomorf képét $\mathcal{A}'$-ben h szerint, ahol nyilván $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$.
Az elemi beágyazás tulajdonság igazolásához a *Tarski–Vaught*-kritériumot használjuk (2. Tétel).

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}' \vDash \exists x \alpha(x, (a))$ $(a \in A)$ teljesül, és azt, hogy α x-en kívül csak egyetlen szabad változót tartalmaz. Igazolandó, hogy az előbbi pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{B}' \vDash \alpha\ \big(x/(b), (a)\big)$ valamely $b \in A$-ra (azaz $(b) \in B'$-re).

De $\mathcal{A}' \vDash \exists x \alpha(x, (a))$ pontosan akkor, ha $\mathcal{A} \vDash \exists x \alpha(x, a)$ teljesül. Utóbbi a $\exists$ definíciója miatt ekvivalens $\mathcal{A} \vDash \alpha(x/b, a)$ $(b \in A)$ teljesülésével. Utóbbi viszont ekvivalens $\mathcal{B}' \vDash \alpha\ \big(x/(b), (a)\big)$ teljesülésével, mint azt igazolni kellett.

Áttérve $\mathcal{A}'$-ről ${}^{I}\mathcal{A}/\mathcal{F}$-re, nyilván érvényes a fenti gondolatmenet, és a relációtartás mellett igaz lesz a függvénytartás is. Csupán a leképezés egy-egyértelműségét kell meggondolni. De $a \neq b$ valóban implikálja $\widehat{(a)} \neq \widehat{(b)}$-t, hiszen (a) és (b) *minden* komponense különböző.

■

Legyen $\mathcal{L}$ az eddig használt, rögzített elsőrendű nyelv, és legyen $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ $\mathcal{L}$ típusú struktúrák egy *összessége*, ahol $\mathcal{A}_i = \left\langle A_i, R^{\mathcal{A}_i}, f^{\mathcal{A}_i} \right\rangle$. Legyen $\mathcal{F}$ rögzített ultraszűrő I-n. Az ultrahatvány-konstrukció a következőképpen általánosítható:

12. Definíció. (Ultraszorzat.) Az $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ struktúrák $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{F}$ ultraszorzata $\mathcal{F}$-re nézve (röviden $\left\langle \widehat{\prod_{i\in I} A_i}, \widehat{R}, \widehat{f} \right\rangle$) a következő:

A $\widehat{\prod_{i\in I} A_i}$ alaphalmaz a $\prod_{i\in I} A_i$-beli sorozatok $\sim$ ekvivalenciaosztályainak összessége, ahol

$(a_i) \sim (b_i)$ akkor és csak akkor, ha $a_i = b_i$ m. m. $i \in I$-re $(a_i, b_i \in A_i)$.

$\widehat{R}\widehat{(a_i)}\widehat{(b_i)} = \uparrow$ akkor és csak akkor, ha $R^{\mathcal{A}_i} a_i b_i = \uparrow$ m. m. $i \in I$-re,

$\widehat{f}\,\widehat{(a_i)}\widehat{(b_i)} = \widehat{(c_i)}$ akkor és csak akkor, ha $f^{\mathcal{A}_i} a_i b_i = c_i$ m. m. $i \in I$-re,

ahol (a_i), (b_i) és (c_i) $\prod_{i\in I} A_i$-beli sorozatok, $\widehat{(a_i)}$, $\widehat{(b_i)}$ és $\widehat{(c_i)}$ a nekik rendre megfelelő osztályok a $\sim$ relációnál.

Az ultrahatványokhoz hasonlóan belátható, hogy a definíció értelmes, tehát $\widehat{R}$ és $\widehat{f}$ definíciója *nem függ* a reprezentáns sorozatok választásától. A következő tétel a 10. Tételnek felel meg ultraszorzatokra, és bizonyítása is hasonló.

13. Tétel. (Łoś.) $\varphi(\widehat{(a_i)}, \widehat{(b_i)}, \ldots \widehat{(g_i)}) = \uparrow$ $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{F}$-en akkor és csak akkor, ha $\varphi(a_i, b_i, \ldots g_i) = \uparrow$ $\mathcal{A}_i$-n m. m. i-re, ahol az (a_i), $(b_i), \ldots (g_i)$ $\prod_{i\in I} A_i$-beli sorozatok, $\widehat{(a_i)}$, $\widehat{(b_i)}, \ldots, \widehat{(g_i)}$ pedig a nekik rendre megfelelő ekvivalenciaosztályok.

Következmény: Ha φ zárt formula, akkor

$$\boxed{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{F} \vDash \varphi \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathcal{A}_i \vDash \varphi \text{ m. m. } i\text{-re.}}$$

2. Alkalmazásokról, az ultraszűrők tulajdonságairól. Először az ultrakonstrukcióknál fontos szerepet játszó *ultraszűrő* fogalmat vizsgáljuk közelebbről. Az egyszerűbb állítások igazolását az Olvasóra bízzuk.
Felvetődik a kérdés: hogyan lehet egy I halmazon ultraszűrőt nyerni, vagy ami ezzel ekvivalens, az I halmazhoz tartozó hatványhalmaz-algebrán hogyan konstruálhatunk 0–1 mértéket.
A legegyszerűbb ultraszűrő egy I halmazon az egyetlen, rögzített a elem által generált úgynevezett *főszűrő*: $\{S : a \in S,\, S \subseteq I\}$. Ha egy ultraszűrő végtelen halmazon nem főszűrő, akkor nem tartalmazhat egyelemű halmazt, sőt véges halmazt sem, ez könnyen belátható indirekt, kihasználva az ultraszűrőt definiáló négy tulajdonságot. Megmutatható, ha I véges, akkor minden ultraszűrő főszűrő. Ha egy ultraszűrő nem főszűrő, akkor *nem-főszűrőnek* hívjuk.

Legyen I tetszőleges halmaz.

14. Definíció. (Szűrő.) Egy I halmaz részhalmazainak rendszere *szűrő*, ha a 8. Definícióbeli (i), (ii) és (iii) tulajdonságok teljesülnek rá.

Ha I *végtelen*, akkor nevezetes szűrő az úgynevezett *ko-véges* halmazok összessége: $\{S : I \sim S \text{ véges},\, S \subseteq I\}$.
A nem-főszűrők fontos tulajdonsága, hogy tartalmazzák a ko-véges halmazokat (mivel nem tartalmaznak véges halmazokat). Ne tévesszük össze a nem-főszűrőket a nemfőszűrőkkel, mivel az előbbiek ultraszűrők, míg az utóbbiak csak szűrők.
Ahogyan a logika szempontjából az ultraszűrők a komplett elméleteknek feleltethetők meg, úgy a szűrők a logikai elméleteknek. Mértékelméleti megközelítésben, ha egy μ 0–1 mérték egy I-n vett *tetszőleges* halmazalgebrán értelmezett, akkor az 1 mértékű halmazok szűrőt alkotnak. Ennek megfordítása is igaz: minden I-n vett szűrő tekinthető, mint valamely I egységgel rendelkező halmazalgebrán vett 0–1 mérték 1 mértékű halmazainak összessége.

Fontos halmaztulajdonság a következő:

Egy I halmazon értelmezett $\{S_\gamma : S_\gamma \subseteq I\}$ halmazrendszer véges metszet *tulajdonságú, ha bármely véges sok tagjának a metszete nem üres.*

A véges metszet tulajdonságból nem következik, hogy az összes S_γ metszete sem üres. Szűrők *generálásával* kapcsolatos a következő állítás, mely állítás tulajdonképpen egy mértékkiterjesztési tétel:

15. Tétel. Tetszőleges I halmazon értelmezett véges metszet tulajdonságú $\mathcal{H}$ halmazrendszer *kiterjeszthető* szűrővé I-n.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H}=\emptyset$, akkor legyen $\mathcal{F}$ a triviális szűrő: $\{I\}$.
Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}\neq\emptyset$. Azt állítjuk, hogy egy megfelelő tulajdonságú $\mathcal{F}$ szűrő a következő halmazrendszer:

$$\mathcal{F}=\{\,Y:\ Y\subseteq I,\ X_1\cap\ldots\cap X_n\subseteq Y \text{ valamely } n\text{-re és } X_1,\ldots X_n\in\mathcal{H}\text{-ra}\}.$$

Nyilván $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{F}$, valamint (i) teljesül a $\mathcal{H}\neq\emptyset$ feltétel miatt. (iii) szintén nyilvánvaló. Továbbá, ha $X_1\cap\ldots\cap X_n\subseteq Y_1$ és $Z_1\cap\ldots\cap Z_m\subseteq Y_2$, akkor

$$X_1\cap\ldots\cap X_n\ \cap\ Z_1\cap\ldots\cap Z_m\ \subseteq\ Y_1\ \cap\ Y_2,\ (X_1,\ldots X_n\in\mathcal{H}, Z_1,\ldots Z_m\in\mathcal{H}),$$

ezért a (ii) tulajdonság is teljesül.

■

Tehát a véges metszet tulajdonság és a szűrő tulajdonság igen közel állnak egymáshoz. A szűrők nyilván véges metszet tulajdonságú halmazrendszerek.

A következő tétel már *szűrők kiterjesztésére* vonatkozik:

16. Tétel. Tetszőleges szűrő kiterjeszthető ultraszűrővé.

Az állítást nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy Lindenbaum tételével állítható párhuzamba, miszerint tetszőleges ellentmondástalan elmélet kiterjeszthető komplett elméletté.

A 15. és 16. Tétel következménye a következő: *Tetszőleges I halmazon vett véges metszet tulajdonságú $\mathcal{H}$ halmazrendszer kiterjeszthető I-n értelmezett ultraszűrővé.*

* * *

Az ultrahatvány- és ultraszorzat-konstrukcióknak sok fontos *alkalmazása* van. Ilyen alkalmazások találhatók például a következő részben tárgyalandó karakterizációs tételeknél. Másik alkalmazás a nemstandard aritmetika vagy a nemstandard analízis, ez utóbbit a 6.3-ban fogjuk tárgyalni.

Először az *ultrahatvány* fogalmának említjük meg egy alkalmazását. Igazolható, hogy *ha a* 11. *(beágyazási) Tételben $\mathcal{F}$ főszűrő, akkor speciálisan*

$$\mathcal{A}\simeq {}^{I}\mathcal{A}/\mathcal{F} \tag{9}$$

Ha I megszámlálható, és A is végtelen, akkor a megfordítás is igaz, azaz, *ha $\mathcal{F}$ nem-főszűrő, akkor a* (9) *izomorfia nem teljesül, vagyis az ultrahatvány valódi kiterjesztése $\mathcal{A}$-nak.*

Ugyanis például, ha a beágyazás a természetes beágyazás, tehát az alaphalmaz egy elemének a konstanssorozat ekvivalenciaosztálya felel meg, akkor könnyű belátni, hogy egy nem-főszűrőre vonatkozó ultrahatvány *valódi* kiterjesztés. Tekintsünk ugyanis egy olyan A-sorozatot, amely csupa *különböző* A-elemből áll, ilyen létezik, mivel I

megszámlálható, és A végtelen. E sorozat nem lehet $\sim$-ra nézve ekvivalens a konstanssorozattal (utóbbiak ekvivalenciaosztályai alkotják A izomorf képének alaphalmazát), mert vele legfeljebb 1 helyen egyezhet meg. Egyelemű halmazt nem-főszűrő viszont nem tartalmazhat.

Mindezen meggondolások következményeként kapjuk a következőt:

17. Tétel. Végtelen alaphalmazú struktúrának létezik *valódi elemi bővítése*.

Az *ultraszorzat-fogalom* érdekes alkalmazása, hogy segítségével a logikában centrális szerepet játszó *kompaktsági tételre* olyan bizonyítás adható, amelyik *nem használja a teljességi tételt*. Ezért azok a tételek, amelyek kompaktsági tétel segítségével igazolhatóak, igazolhatóak ultraszorzat segítségével is, azaz a teljességi tétel felhasználása nélkül is (sokszor ez fordítva is igaz: ultraszorzattal igazolható tételek kompaktsági tétel segítségével is igazolhatók).

Most bebizonyítjuk a kompaktsági tétel egyik változatát (2.4-beli 1. Tétel Következménye) elsőrendű esetre, ultraszorzat segítségével is. Legyen Σ zárt elsőrendű formuláknak tetszőleges halmaza.

18. Tétel. (Kompaktsági.) Zárt formulák egy Σ halmazának van modellje akkor és csak akkor, ha Σ bármely véges részének van modellje.

Bizonyítás. Ha Σ-nak van modellje, akkor nyilván bármely véges részének is van modellje. Tekintsük a fordított állítást.
Legyen $I = \{\Theta\colon \Theta$ véges részhalmaza Σ-nak$\}$. Egy ultraszorzatot fogunk képezni I indexhalmazzal, bizonyos modellekből, adott ultraszűrő szerint. A szóban forgó ultraszűrő definíciója a következő:
Jelölje Θ Σ egy tetszőleges rögzített *véges* részhalmazát.
Tekintsük az $M_\Theta = \{\Omega \in I\colon \Theta \subseteq \Omega\}$ halmazokat, tehát M_Θ a Θ-t tartalmazó *véges* (Ω-val jelölt), Σ-beli részhalmazok összessége. Θ-t I-n futtatva, $\langle M_\Theta\colon \Theta \in I\rangle$ definíció szerint egy véges metszet tulajdonságú halmazrendszer I-n. Ezért a fentiek szerint e halmazrendszer kiterjeszthető egy $\mathcal{F}$ ultraszűrővé. Ezen $\mathcal{F}$ szerint képezzük majd az ultraszorzatot.

A tétel feltétele szerint, ha $\Theta \in I$, akkor van Θ-nak legalább egy $\mathcal{A}_\Theta$ modellje. Rögzítsünk minden Θ-hoz egy ilyen $\mathcal{A}_\Theta$ modellt, és tekintsük a következő $\mathcal{B}$ ultraszorzatot: $\mathcal{B} = \prod_{\Theta\in I} \mathcal{A}_\Theta/\mathcal{F}$. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{B}$ modellje Σ-nak.

Tekintve ugyanis tetszőleges $\varphi \in \Sigma$-t, a $\{\Theta\colon \Theta \in I,\, \mathcal{A}_\Theta \vDash \varphi\}$ halmaz bővebb az $M_{\{\varphi\}} = \{\Theta\colon \Theta \in I,\ \{\varphi\} \subseteq \Theta\}$ halmaznál. Mivel $\{\varphi\}$ véges, utóbbit definíció szerint tartalmazza $\mathcal{F}$, tehát a (ii) ultraszűrő tulajdonság szerint, tartalmazza az előbbit is. Ezért a 13. Tétel következménye szerint az állításunk bizonyított.

■

4.4 Karakterizációs tételek

A címben foglalt tételek egymástól látszólag távol eső fogalmakat, tulajdonságokat kapcsolnak össze, szép példaként arra, hogy a matematika távolinak tűnő területei hogyan kerülhetnek egymással szoros kapcsolatba.
Ezen alfejezetben gyakran szerepelnek *osztályok*. Számos, halmazokra bevezetett fogalmat, jelölést osztályokra is alkalmazunk (ennek jogosságára nézve lásd a 6.4 alfejezetet). *E részben végig feltesszük, hogy az általunk vizsgált modellosztályok zártak az izomorfizmusra.* Továbbá csak zárt formulákkal (mondatokkal) fogunk foglalkozni.

Legyen Σ az $\mathcal{L}$ nyelven mondatok egy tetszőleges halmaza, és $\mathcal{K}$ $\mathcal{L}$ típusú modellek egy tetszőleges osztálya.
Emlékeztetünk arra, hogy Σ modelljeinek $\{\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \vDash \Sigma\}$ összességét $\mathrm{Mod}\,\Sigma$-val jelöltük.
A $\mathcal{K}$ *modellösszesség* $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ *elméletén* értettük a $\{\varphi : \mathcal{A} \vDash \varphi$ minden $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$-ra$\}$ mondathalmazt.

Egy modell elmélete, mint tudjuk, általában *nem* határozza meg izomorfia erejéig a modellt. Érvényben marad-e ez a tulajdonság tetszőleges modellösszességre is, azaz felvetődik az a *probléma*, hogy:

Ha $\mathcal{K}$ *modellek egy adott típusú összessége, akkor* $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ *mikor határozza meg a* $\mathcal{K}$ *összességet izomorfia erejéig, tehát mely* $\mathcal{K}$*-kra igaz, hogy*

$$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\,\mathcal{K}? \tag{1}$$

A $\mathcal{K}$ modellosztályra vonatkozó másik *probléma:*

A $\mathcal{K}$ *modellosztály mikor jellemezhető bizonyos adott tulajdonságú* Σ_0 *mondathalmazzal* (például csak univerzális mondatokkal, vagy csak azonosságokkal stb.)? *Azaz teljesül-e*

$$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma_0 \tag{2}$$

valamely Σ_0 *mondathalmazra?*

A fenti problémákkal kapcsolatos tételeket *karakterizációs tételeknek* nevezzük. E tételek közül csak néhányat tudunk itt ismertetni. Legyen $\mathcal{K}$ modellek egy adott típusú osztálya.

1. Definíció. (Néhány nevezetes modellosztály.)
$\mathcal{K}$ *elemi osztály* ($\mathcal{K} \in EC$), ha van olyan σ mondat, hogy $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\{\sigma\}$.
$\mathcal{K}$ Δ*-elemi osztály* ($K \in EC_\Delta$), ha $\mathcal{K} = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Mod}\,\{\sigma_i\}$ mondatok valamely $\Sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ halmazára (azaz $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$).

$\mathcal{K}$ *Σ-elemi osztály ($K \in EC_\Sigma$), ha* $\mathcal{K} = \bigcup_{i \in I} \text{Mod}\,\{\sigma_i\}$ mondatok valamely $\Gamma = \{\sigma_i : i \in I\}$ halmazára. Vigyázzunk, EC_Σ-ban Σ nem formulahalmazt jelöl!

Például a véges halmazok összessége Σ-elemi osztály, míg a *végtelen* halmazoké Δ-elemi osztály. Hiszen, ha $\mathcal{L}$ az egyenlőség nyelve, és σ_i jelöli annak formalizálását, hogy *legfeljebb i elemű* egy halmaz, akkor rendre éppen az $\bigcup_{i \in \omega} \text{Mod}\,\{\sigma_i\}$, illetve $\bigcap_{i \in \omega} \text{Mod}\,\{\neg\sigma_i\}$ modellösszességekről van szó. Δ-elemi osztály például a *zéró karakterisztikájú, kommutatív testek* vagy az *algebrailag zárt testek* osztálya. Ugyanakkor megmutatható (lásd a példáknál), hogy mindezen osztályok *nem* elemi osztályok.

Felhívjuk a figyelmet a fenti fogalmak topológiai vonatkozására. Tekintsük az $\mathcal{L}$ típusú modellek összességét. Könnyű ellenőrizni (lásd majd 6.1-et), hogy az elemi osztályok egy halmazalgebrát alkotnak. Ez az algebra, mint bázis, egy topológiát definiál, az úgynevezett *elemi topológiát*. Az elemi osztályok tehát a *nyílt-zárt* halmazok ebben a topológiában. Mivel az EC_Δ osztályok pontosan az elemi osztályok lehetséges metszetei, ezért pontosan az EC_Δ osztályok képezik az elemi topológiában a *zárt* halmazokat. Könnyű belátni, hogy *a logika kompaktsági tétele éppen az elemi topológia kompaktságát állítja*.
A következő két tétel az 1. Definícióbeli osztályok néhány fontos tulajdonságát írja le:

2. Tétel.

a) $\mathcal{K} \in EC$ akkor és csak akkor, ha $\sim\mathcal{K} \in EC$

b) $\mathcal{K} \in EC_\Delta$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{K} = \text{Mod}\,\text{Th}\,\mathcal{K}$

c) $\mathcal{K} \in EC_\Delta$ akkor és csak akkor, ha $\sim\mathcal{K} \in EC_\Sigma$,

ahol $\sim$ az összes adott típusú modellek összességére vonatkozó komplementerképzés.

Bizonyítás.

a) Legyen $\mathcal{K} = \text{Mod}\,\{\sigma\}$ valamely σ-ra. Ekkor $\sim\mathcal{K} = \text{Mod}\,\{\neg\sigma\}$, és fordítva.

b) Ha $\mathcal{K} = \text{Mod}\,\text{Th}\mathcal{K}$, akkor $\mathcal{K} \in EC_\Delta$, ahol $\Sigma = \text{Th}\mathcal{K}$. Fordítva, ha $\mathcal{K} \in EC_\Delta$, akkor egyrészt $\mathcal{K} = \text{Mod}\,\Sigma$ valamely Σ-ra, másrészt $\text{Th}\mathcal{K}$ definíciójából adódik, hogy tetszőleges Σ-ra

$$\text{Mod}\,\text{Th}\,(\text{Mod}\,\Sigma) = \text{Mod}\,\Sigma \tag{3}$$

Ezért $\text{Mod}\,\text{Th}\mathcal{K} = \text{Mod}\,\text{Th}(\text{Mod}\,\Sigma) = \text{Mod}\,\Sigma = \mathcal{K}$, valóban.

c) $\mathcal{K} \in EC_\Delta$, azaz $\mathcal{K} = \text{Mod}\,\Sigma$ valamely Σ-ra pontosan akkor, ha

$$\sim\mathcal{K} = \sim\text{Mod}\,\Sigma = \sim\bigcap_{i \in I} \text{Mod}\,\{\sigma_i\} = \bigcup_{i \in I} \sim\text{Mod}\,\{\sigma_i\} = \bigcup_{i \in I} \text{Mod}\,\{\neg\sigma_i\},$$

ahol a $\sim$ komplementerképzés az összes adott típusú modellek osztályára vonatkozik. Tehát az EC_Σ-ban szereplő formulahalmaz $\Lambda' = \{\neg\sigma_i : i \in I\}$.

■

Vegyük észre, hogy az (1) *problémára választ ad a* b) *állítás: pontosan az EC_Δ osztályok jellemezhetőek elméletükkel.*

3. Tétel. $EC = EC_\Delta \cap EC_\Sigma$.

Bizonyítás. $EC \subseteq EC_\Delta \cap EC_\Sigma$ nyilvánvaló.
A fordított tartalmazás igazolásához tegyük fel, hogy $\mathcal{K} \in EC_\Delta \cap EC_\Sigma$. $\mathcal{K} \in EC_\Delta$ miatt

$$\mathcal{K} = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Mod}\,\{\sigma_i\}, \tag{4}$$

továbbá az előző tétel c) állítása miatt $\sim\mathcal{K} \in EC_\Delta$, vagyis

$$\sim\mathcal{K} = \bigcap_{j\in J} \mathrm{Mod}\left\{\tau_j\right\} \tag{5}$$

valamely I-vel, illetve J-vel indexezett formulahalmazokra.
Tehát $\mathcal{K} \cap \sim\mathcal{K} = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Mod}\,\{\sigma_i\} \cap \bigcap_{j\in J} \mathrm{Mod}\left\{\tau_j\right\} = \emptyset$.
Ezért a $\{\sigma_i : i \in I\} \cup \left\{\tau_j : j \in J\right\}$ formulahalmaznak nincs modellje. A kompaktsági tétel miatt léteznek olyan I_0, J_0 véges halmazok, hogy

$$\bigcap_{i\in I_0} \mathrm{Mod}\,\{\sigma_i\} \cap \bigcap_{j\in J_0} \mathrm{Mod}\left\{\tau_j\right\} = \emptyset \tag{6}$$

szintén.

Legyen $\sigma = \wedge_{i\in I_0}\sigma_i$. Ekkor $\mathrm{Mod}\{\sigma\} = \bigcap_{i\in I_0} \mathrm{Mod}\,\{\sigma_i\}$.
Állítás: $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\{\sigma\}$.
$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\{\sigma\}$ definíció szerint nyilvánvaló. Fordítva, egyrészt (6)-ból

$$\mathrm{Mod}\,\{\sigma\} \subseteq \sim \bigcap_{j\in J_0} \mathrm{Mod}\left\{\tau_j\right\}, \tag{7}$$

másrészt (5)-ből

$$\sim\mathcal{K} \subseteq \bigcap_{j\in J_0} \mathrm{Mod}\left\{\tau_j\right\},$$

azaz a komplementerre áttérve

$$\sim \bigcap_{j\in J_0} \mathrm{Mod}\left\{\tau_j\right\} \subseteq \mathcal{K}. \tag{8}$$

(7)-et és (8)-at és $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\{\sigma\}$-t összevetve kapjuk, hogy $\mathrm{Mod}\{\sigma\} = \mathcal{K}$, és készen vagyunk.

■

A következő fogalmak jól ismertek az univerzális algebrából.

4. Definíció. (Modellosztályok lezárásai.)
Egy $\mathcal{K}$ modellosztály lezárása az *elemi ekvivalencia képzésre* nézve azon modellekből álló osztály ($E\mathcal{K}$), amelynek tagjai valamely $\mathcal{K}$-beli modellel elemien ekvivalensek, azaz

$$E\mathcal{K} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}, \text{ valamely } \mathcal{B} \in \mathcal{K}\text{-ra}\}.$$

Egy $\mathcal{K}$ modellosztály lezárása a *részstruktúraképzésre* nézve, azon modellekből álló osztály ($S\mathcal{K}$), amelynek tagjai valamely $\mathcal{K}$-beli modell részstruktúrái, azaz

$$S\mathcal{K} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \text{ valamely } \mathcal{B} \in \mathcal{K}\text{-ra}\}.$$

Egy $\mathcal{K}$ modellosztály lezárása a *homomorfizmus-képzésre* nézve azon modellekből álló osztály ($H\mathcal{K}$), amelynek tagjai valamely $\mathcal{K}$-beli modell homomorf képei (lásd 4.3.1 4. Definíció), azaz

$$H\mathcal{K} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ homomorf képe valamely } \mathcal{K}\text{-beli modellnek}\}.$$

Egy $\mathcal{K}$ modellosztály lezárása az *ultraszorzatképzésre* nézve azon modellekből álló osztály ($Up\mathcal{K}$), amelynek tagjai valamely $\mathcal{K}$-beli modelleknek ultraszorzatai, azaz

$$Up\mathcal{K} = \{\mathcal{A}\colon\ \mathcal{A} \text{ ultraszorzata valamely } \mathcal{K}\text{-beli modelleknek}\}.$$

$Up\mathcal{K}$-hoz hasonlóan definiálható $\mathcal{K}$ lezárása a *direkt szorzat képzésére* is ($P\mathcal{K}$).

A következő tételben az EC_Δ osztályt jellemezzük.

5. Tétel.

> $\mathcal{K} \in EC_\Delta$ akkor és csak akkor, ha a következő két feltétel együttesen teljesül:
> (i) $\mathcal{K}$ zárt az ultraszorzatképzésre ($\mathcal{K} = Up\mathcal{K}$),
> (ii) $\mathcal{K}$ zárt az elemi ekvivalencia képzésre ($\mathcal{K} = E\mathcal{K}$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K} \in EC_\Delta$. Tehát $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$ valamely Σ formulahalmazra. $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$ miatt $\mathcal{K}$ zárt az elemi ekvivalencia képzésre, és a 4.3.2-beli 13. Tétel (Łoś-ultraszorzattétel) következménye szerint az ultraszorzatképzésre is zárt.
A fordított irányú állítás igazolásához a 2. Tétel b) állítását használjuk.
$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\mathcal{K}$ mindig igaz, azaz elég megmutatni, hogy ha $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\mathcal{K}$, akkor $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$.
Tekintsük $\mathrm{Th}\mathcal{A}$-t, és indexezzük formuláit, tehát legyen $\mathrm{Th}\mathcal{A} = \{\delta_i : i \in I\}$.
Ha $\delta_j \in \mathrm{Th}\mathcal{A}$, akkor van olyan $\mathcal{B}_j \in \mathcal{K}$, hogy $\mathcal{B}_j \vDash \delta_j$. Ugyanis, ha ez nem teljesülne, akkor $\neg\delta_j \in \mathrm{Th}\mathcal{K}$, és így $\mathcal{A} \notin \mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\mathcal{K}$ következne.
Egyrészt rögzítsünk minden $i \in I$-re egy $\mathcal{B}_i \vDash \delta_i$ tulajdonságú $\mathcal{B}_i \in \mathcal{K}$ struktúrát. Másrészt adott δ_j-hez tekintsük az *összes* ilyen rögzített $\mathcal{B}_i$ struktúrát, tehát rögzített j-re legyen

$$J_j = \left\{ i \in I\colon\ \mathcal{B}_i \vDash \delta_j \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy a J_j halmazokra teljesül I-n a véges metszet tulajdonság (lásd 4.3.2). Ugyanis $J_{j_1} \cap J_{j_2} \ldots \cap J_{j_n} \neq \emptyset$, hiszen tekintsük a $\delta_k = \delta_{j_1} \wedge \delta_{j_2} \wedge \ldots \wedge \delta_{j_n}$ formulát. $\delta_k \in \mathrm{Th}\mathcal{A}$, így $\mathcal{B}_k \vDash \delta_k$, ezért $\mathcal{B}_k \vDash \delta_{j_i}$ $i = 1, 2, \ldots n$, tehát $k \in J_{j_1} \cap J_{j_2} \ldots \cap J_{j_n}$.
Ezért a J_j halmazok kiterjeszthetőek valamely $\mathcal{F}$ ultraszűrővé I-n.
Tekintsük a $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i / \mathcal{F}$ ultraszorzatot. $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$, mivel $\mathcal{K}$ zárt az ultraszorzatképzésre. $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, hiszen pontosan úgy definiáltuk a J_j halmazokat, hogy ha $\delta_j \in \mathrm{Th}\mathcal{A}$, akkor $J_j \in \mathcal{F}$, ezért a Łoś-ultraszorzattétel Következménye szerint $\mathcal{B} \vDash \delta_j$.
Mivel $\mathcal{K}$ zárt az elemi ekvivalenciára, ezért $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, és ezt kellett igazolni.

■

A fenti tétel újabb jellemzést szolgáltat az (1)-*beli problémában* szereplő $\mathcal{K}$ modellosztályra. Felhasználva ugyanis a 2. Tétel b) feltételét, azt kapjuk, hogy a *megfelelő $\mathcal{K}$ modellosztályok pontosan azok, amelyek zártak az ultraszorzatra és az elemi ekvivalenciára.*

A következő tételben az elemi osztályokat jellemezzük.

6. Tétel.

> $\mathcal{K}$ *elemi osztály* ($\mathcal{K} \in EC$) akkor és csak akkor, ha a következő két tulajdonság egyidejűleg teljesül:
> (i) $\mathcal{K}$ és $\sim\mathcal{K}$ is zárt az ultraszorzatképzésre,
> (ii) $\mathcal{K}$ zárt az elemi ekvivalenciára ($\mathcal{K} = E\mathcal{K}$).

Bizonyítás. Ha $\mathcal{K}$ elemi osztály, akkor $\sim\mathcal{K}$ is elemi osztály, és az előző tételből következik, hogy $\mathcal{K}$ és $\sim\mathcal{K}$ is zárt az elemi ekvivalenciára és az ultraszorzatképzésre.

Fordítva nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{K}$ zárt az elemi ekvivalenciára, akkor $\sim\mathcal{K}$ is zárt. Ezért az (i) feltételt és az előző tételt használva következik $\mathcal{K} \in EC_\Delta$ és $\sim\mathcal{K} \in EC_\Delta$. Utóbbiból a 2 Tétel c) része szerint $\sim(\sim\mathcal{K}) = \mathcal{K} \in EC_\Sigma$. Ezért a 3. Tételben állított $EC = EC_\Delta \cap EC_\Sigma$ miatt $\mathcal{K} \in EC$ valóban.

■

Ezután *példákat* mutatunk a fenti tételek alkalmazására.

1. Példa. *Igazoljuk, hogy a 0 karakterisztikájú testek $\mathcal{T}$ osztálya nem elemi osztály.*

Tudjuk, hogy a szóban forgó osztály EC_Δ-beli. Megmutatjuk, hogy $\sim\mathcal{T}$ nem zárt az ultraszorzatra (ezért nem elemi osztály).

Vegyük fel a testek nyelvén azt a φ_p formulát, amelynek jelentése az, hogy egy test p karakterisztikájú (ahol p tetszőleges, de rögzített prím), e tulajdonság könnyen formalizálható. Rögzítsünk minden p prímre egy $\mathcal{A}_p$, p karakterisztikájú testet. Vegyünk fel a prímek P halmazán egy nem-főszűrőt, $\mathcal{F}$-et. Tekintsük az $\mathcal{A} = \prod_{p \in P} \mathcal{A}_p / \mathcal{F}$ ultraszorzatot.

Rögzített p-re a φ_p formula csak $\mathcal{A}_p$-re igaz, tehát csak $p \in P$-re. Mivel az egyelemű $\{p\}$ halmaz nem tartozik $\mathcal{F}$-hez (mivel $\mathcal{F}$ nem-főszűrő), ezért φ_p hamis $\mathcal{A}$-n. Ez a gondolatmenet igaz minden $p \in P$-re, ezért definíció szerint $\mathcal{A}$ valóban 0 karakterisztikájú, vagyis $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$. Tehát az ultraszorzat valóban kivezet $\sim\mathcal{T}$-ből, így a 6. Tétel értelmében $\mathcal{T}$ nem lehet elemi osztály.

2. Példa. *Igazoljuk, hogy a véges halmazok összessége nem EC_Δ-beli osztály.*

2.4.1-ben már igazoltuk az állítást a kompaktsági tétel segítségével. Most ultraszorzat segítségével bizonyítjuk azzal, hogy megmutatjuk, a véges halmazok $\mathcal{V}$ osztálya nem zárt az ultraszorzatra. (Megjegyezzük, hogy e témakörre is igaz, hogy ami ultraszorzatokkal igazolható, az általában kompaktsági tétellel is igazolható, és fordítva.)

Legyen ugyanis az α_n formula jelentése az, hogy egy halmaz n elemű. Adott n-re legyen $\mathcal{A}_n$ egy pontosan n elemű struktúra. Rögzítsünk ω-n egy $\mathcal{F}$ nem-főszűrőt. Képezzük a $\mathcal{B} = \prod_{n\in\omega} \mathcal{A}_n/\mathcal{F}$ ultraszorzatot. Bármely rögzített n-re α_n csak $\mathcal{A}_n$-en teljesül, azaz csak az $\{n\}$ egyelemű halmazra, ezért α_n hamis $\mathcal{B}$-n. Mivel ez minden $n \in \omega$-ra igaz, ezért $\mathcal{B}$ végtelen struktúra, vagyis az ultraszorzat valóban kivezet $\mathcal{V}$-ből, így az 5. tétel értelmében $\mathcal{V}$ nem EC_Δ-beli.

Mint azt e rész elején említettük, a véges halmazok összessége EC_Σ-beli osztály (mivel alakja $\bigcup_n$ Mod „legfeljebb n elemű”). A végtelen halmazok pedig EC_Δ osztály, mivel a következő alakban áll elő: $\bigcap_n$ Mod („legalább n elemű”). A pontosan n elemű halmazok osztálya pedig nyilván elemi osztály.

3. Példa. *Igazoljuk, hogy a véges csoportok nem alkotnak EC_Δ osztályt.*

Az állítás több módszerrel is meggondolható:

A véges csoportok nem zártak az ultraszozatra. Ugyanis tekintsük például az n-ed rendű ciklikus csoportokat. Mindegyikük véges. Tekintsük valamely nem-főszűrőre vett ultraszorzatukat. Ez nem véges, hiszen az a formula, amelynek jelentése: „legalább n elemű” (rögzített n-re), véges sok kivétellel mindegyik ciklikus csoportra igaz. Tehát tetszőleges n mellett igaz, hogy az ultraszorzat legalább n elemű, vagyis az ultraszorzat végtelen. Az 5. Tétel értelmében a véges csoportok tehát nem EC_Δ-beli osztály.

Visszavezethető a feladat arra is, hogy mint azt igazoltuk már, a véges halmazok osztálya nem EC_Δ-beli. Mivel a csoportok elemi osztályt alkotnak, ezért a két osztály metszete sem lehet valódi EC_Δ-beli. Sőt mivel tudjuk, a véges halmazok EC_Σ-beliek, ezért ugyanez igaz a véges csoportokra is.

Könnyű meggondolni, hogy a feladat igazolható közvetlenül a kompaktsági tétel segítségével is.

4. Példa. *Igazoljuk, hogy a körgráfok osztálya nem EC_Δ*-beli.

Tekintsük a 2, 3, 4, … hosszúságú körök egy ultraszorzatát. Legyen φ_n annak formalizálása, hogy „van pontosan n hosszúságú kör”. Ez majdnem minden komponensre hamis, ezért az ultraszorzaton is hamis, azaz az ultraszorzat körmentes. Az 5. Tétel miatt tehát teljesül az állítás.

* * *

A következő tételek a rész elején felvetett (2) *problémához kapcsolódnak*, azaz ahhoz, hogy adott típusú modellek adott $\mathcal{K}$ osztálya leírható-e $\mathrm{Mod}\Sigma_0$-ként valamely adott Σ_0-ra.

Akkor mondjuk, hogy *egy mondat univerzális, ha valamely prenex alakjában a kvantorblokk csak univerzális kvantorokból áll* (az ilyen mondatokat az előzőekben Skolem-normálformájúaknak is hívtuk).

7. Definíció. Egy $\mathcal{K}$ modellosztály *univerzális*, ha univerzális mondatok egy Σ_0 összességével axiomatizálható (tehát $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma_0$). Egy $\mathcal{K}$ modellosztály *pozitív*, ha pozitív mondatok egy összességével axiomatizálható.

8. Tétel. (Łoś-tétel.) Egy $\mathcal{K}$ modellosztály univerzális akkor és csak akkor, ha $\mathcal{K}$ egyidejűleg zárt a részstruktúraképzésre ($\mathcal{K} = S\mathcal{K}$) és az ultraszorzatképzésre ($\mathcal{K} = Up\mathcal{K}$).

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{K}$ axiomatizálható, ezért a 4.3.2-beli 13. Tétel következménye szerint zárt az ultraszorzatképzésre, továbbá $S\mathcal{K} = \mathcal{K}$, hiszen az univerzális mondatok igazsága a részstruktúrán megőrződik.

Fordítva, legyen $\mathcal{K}$ zárt a részstruktúra- és ultraszorzatképzésre. Tekintsük a következő Σ formulahalmazt:

$$\Sigma = \{\varphi : \varphi \text{ univerzális mondat, és minden } \mathcal{A} \in \mathcal{K}\text{-ra } \mathcal{A} \vDash \varphi\}\,.$$

$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\Sigma$ igaz Σ definíciója szerint. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{K} \supseteq \mathrm{Mod}\,\Sigma$, azaz ha tetszőleges $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}\Sigma$ rögzített, akkor $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. $\mathcal{K} = S\mathcal{K}$ és $\mathcal{K} = Up\mathcal{K}$ miatt elég belátni, hogy $\mathcal{A} \in S\,Up\mathcal{K}$.

Tekintsük $\mathcal{A}$ diagramját, legyen ez a Δ mondathalmaz, és legyen $\mathcal{L}'$ a diagram szerint kibővített nyelv.

Legyen $I = \{\Theta : \Theta$ véges részhalmaza Δ-nak$\}$. Egy ultraszorzatot fogunk képezni I indexhalmazzal bizonyos $\mathcal{K}$-beli modellekből.

Az ultraszűrő: Jelölje Θ Δ egy tetszőleges rögzített *véges* részhalmazát. Tekintsük az $M_\Theta = \{\Omega \in I : \Theta \subseteq \Omega\}$ halmazokat, tehát M_Θ a Θ-t tartalmazó *véges*, Δ-beli részhalmazok összessége. Ez nyilván egy véges metszet tulajdonságú halmazrendszer I-n, mivel véges sok M_Θ metszete tartalmazza az egyes Θ-k unióhalmazát. Ezért a halmazrendszer kiterjeszthető egy $\mathcal{F}$ ultraszűrővé. Rögzítsük $\mathcal{F}$-et, e szerint képezzük majd az ultraszorzatot.

Egy $\Theta \in I$-hez a következőképpen rendelünk egy $\mathcal{B}_\Theta \in \mathcal{K}$ modellt:

Rögzítsük $\mathcal{A}$ alaphalmazának, A-nak egy r *jólrendezését*, és az A-beli elemeknek $\mathcal{L}'$-ben megfelelő konstansok ugyanezen jólrendezését. Jelölje az A-beli b elemnek megfelelő $\mathcal{L}'$-beli nyelvi konstanst b'.

Tekintsük a Θ-beli individuumkonstansok m_Θ darab r szerint rendezett összességéhez (tehát ez m_Θ darab, A-beli elemnek megfelelő új konstans $\mathcal{L}'$-ben) az $\mathcal{L}$-beli individuumváltozók sorozatában az első m_Θ darabot, tehát a $v_1, \ldots v_{m_\Theta}$ individuumváltozókat. Legyen β_Θ az a nyílt $\mathcal{L}$-beli formula, amelyet úgy nyerünk a Θ-beli formulák konjunkciójából, hogy a Θ-beli konstansokat rendre, az r szerint nekik előbb megfeleltetett

$v_1, \dots v_{m_\Theta}$ individuumváltozókkal cseréljük ki. Tekintsük β_Θ-hoz a következő φ_Θ univerzális formulát: $\forall v_1 \dots \forall v_{m_\Theta} \neg \beta_\Theta$.

Δ és a diagram definíciója miatt φ_Θ hamis $\mathcal{A}$-n, azaz $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi_\Theta$. $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}\Sigma$ miatt $\varphi_\Theta \notin \Sigma$. Mivel φ_Θ univerzális formula, Σ definíciója miatt $\varphi_\Theta \notin \Sigma$, ezért Θ-hoz *van olyan* $\mathcal{B}_\Theta \in \mathcal{K}$ is, amelyre $\mathcal{B} \nvDash \varphi_\Theta$, azaz $\mathcal{B}_\Theta \vDash \neg\varphi_\Theta$, azaz van a v_1, $v_2, \dots$ individuumváltozóknak egy $\sigma^\Theta = \langle c_1, c_2, \dots \rangle$ értékelése $\mathcal{B}_\Theta$-n (tehát $\sigma_i^\Theta = c_i$), amelyre β_Θ igaz $\mathcal{B}_\Theta$-n. Rögzítsünk ilyen tulajdonságú σ^Θ értékeléseket.

Képezzük a következő ultraszorzatot: $\prod_{\Theta \in I} \mathcal{B}_\Theta / \mathcal{F}$. Jelölje e szorzatot $\mathcal{C}$. Mivel $\mathcal{C} \in Up\mathcal{K}$, ezért elég belátni, hogy $\mathcal{A}$ beágyazható $\mathcal{C}$-be.

Definiáljuk $\mathcal{A}$-nak egy beágyazását. Először definiáljuk az A alaphalmazból a $\prod_{\Theta \in I} B_\Theta$-ba képező g függvényt.
Legyen tetszőleges $b \in A$-ra

$$(gb)_\Theta = \sigma_i^\Theta,$$

ha a b-nek megfelelő b' konstans *szerepel* Θ-ban, és a Θ-beli konstansok közül b' az r jólrendezés szerint az i-edik, és σ^Θ értékelés a fenti rögzített értékelés $\mathcal{B}_\Theta$-n, és legyen

$$(gb)_\Theta = \sigma_1^\Theta,$$

ha a b-nek megfelelő b' konstans *nem szerepel* Θ-ban.
Ezután $\mathcal{A}$-nak f beágyazása legyen $\mathcal{C}$-be a következő: $fb = \widehat{gb}$, ahol $\widehat{gb}$ a gb-nek megfelelő ekvivalenciaosztály $\mathcal{F}$ szerint.
Igazolandó tehát f művelet- és relációtartása, valamint egy-egyértelműsége.
Tegyük fel például, hogy h speciálisan egy kétváltozós művelet (hasonlóan kezelhető majd az általános eset).
Legyen például $h^{\mathcal{A}}(b_1, b_2) = d$ $\mathcal{A}$-n, (b_1, b_2 és $d \in A$).
Igazolandó, hogy $f(h^{\mathcal{A}}(b_1, b_2)) = h^{\mathcal{C}}(fb_1, fb_2)$, azaz

$$h^{\mathcal{C}}(fb_1, fb_2) = fd. \tag{9}$$

Először azt gondoljuk meg, hogy $h^{\mathcal{C}}(gb_1, gb_2) = gd$ igaz, ha $\Theta = \{h(b_1', b_2') = d'\}$, vagy ezt tartalmazó véges Ω. Álljon tehát a $\widetilde{\Theta}$ ($\widetilde{\Theta} \subseteq \Delta$) formulahalmaz az egyetlen $h(b_1', b_2') = d'$ formulából.
Tegyük fel, hogy b_1, b_2 és d rendre az i_1, i_2 és i-edik elemek az r rendezés szerint. A Θ-t tartalmazó véges Ω-khoz tekintsük a fent bevezetett β_Ω-t, $\mathcal{B}_\Omega$-t és a σ^Ω értékelést. σ^Ω definíciója szerint, mivel a β_Ω konjunkció igaz $\mathcal{B}_\Omega$-n, ezért az egyik tagjára is

$$h^{\mathcal{B}_\Omega}(\sigma_{i_1}^\Omega, \sigma_{i_2}^\Omega) = \sigma_i^\Omega \tag{10}$$

fennáll $\mathcal{B}_\Omega$-n.

$h^{\mathcal{C}}(fb_1, fb_2) = fd$ valóban igaz. Ugyanis g definíciója szerint, a fenti $\widetilde{\Theta}$-t tartalmazó véges Ω-kal (a fenti M_Θ elemeivel) indexezett struktúrákon, tehát koordinátáként, biztosan igaz (10) miatt. Továbbá $M_{\widetilde{\Theta}} \in \mathcal{F}$ teljesül definíció szerint, így az $M_{\widetilde{\Theta}}$-nál esetleg bővebb $\left\{\Theta : \mathcal{B}_\Theta \vDash h^{\mathcal{B}}(\sigma_{i_1}^\Theta, \sigma_{i_2}^\Theta) = \sigma_i^\Theta\right\}$ halmaz is benne van $\mathcal{F}$-ben.
f relációtartása ugyanúgy igazolható, mint a művelettartás.

f egy-egyértelműségének igazolásához legyen $b_1 \neq b_2$ ($b_1, b_2 \in A$). Igazolni kell, hogy $fb_1 \neq fb_2$. Válasszuk a Δ-beli Θ-nak a $b_1' \neq b_2'$ formulát. Ezután az állítás teljesen hasonlóan igazolható, mint a művelettartás.

■

- A tétel segítségével például megmutatható, hogy az algebrailag zárt testek nem alkotnak univerzális osztályt.
- A tételt összevetve az 5. Tétellel, azt kapjuk, hogy egy $\mathcal{K} \in EC_\Delta$ osztály *univerzális* akkor és csak akkor, ha $\mathcal{K} = S\mathcal{K}$.
- A tételhez hasonló tétel fogalmazható meg egzisztenciális modellosztályok és egzisztenciális formulák esetére is: részstruktúraképzés helyett itt struktúrák *bővítése* segítségével lehet alkalmas feltételt megadni.

Legyenek t és s egy tetszőleges $\mathcal{L}$ nyelv tetszőleges termjei.

9. Definíció. A $t = s$ formula univerzális lezártját *azonosságnak* nevezzük. Egy $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ típusú modellosztály *varietás*, ha azonosságok egy Σ_0 összességével axiomatizálható, azaz ha $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma_0$. Egy $\mathcal{K}$ modellosztály *kvázivarietás*, ha Horn-klózok univerzális lezártjainak egy Σ_0 összességével (Horn-formulákkal) axiomatizálható, azaz $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma_0$.

Például a $\forall x\,(x^2 = x \to x = 0)$ tulajdonságú kommutatív gyűrűk kvázivarietást alkotnak, de nem alkotnak varietást.

A következő tétel az (univerzális) *algebra és a modellelmélet egyik alaptétele*.

10. Tétel. (Birkhoff-tétel.)

$$\boxed{\mathcal{K} \textit{ varietás} \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathcal{K} = HSP\mathcal{K}}$$

A tétel a 8. Tételhez hasonlóan bizonyítható.

A következő tétel a kvázivarietások jellemzését adja.

11. Tétel. Egy $\mathcal{K}$ modellosztály *kvázivarietás* akkor és csak akkor, ha $\mathcal{K}$ univerzális osztály, és zárt a direkt szorzatra ($\mathcal{K} = P\mathcal{K}$), az ultraszorzatra ($\mathcal{K} = Up\mathcal{K}$) és a részstruktúraképzésre ($\mathcal{K} = S\mathcal{K}$).

A tételt nem bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy $K \in EC_\Delta$, tehát $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$ valamely Σ mondathalmazra. A következő tétel a $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ osztály pozitivitására ad feltételt:

12. Tétel. (Lyndon-tétel.) A $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$ osztály *pozitív* akkor és csak akkor, ha $\mathcal{K}$ zárt a homomorfizmusra ($\mathcal{K} = H\mathcal{K}$).

A tétel egyik irányú állítása a 4.3.1-beli 6. Tételnek következménye. A másik irányú állítást nem bizonyítjuk.

A karakterizációs tételek *alkalmazása kétirányú*. Ha az a probléma, hogy egy $\mathcal{K}$ osztály zárt-e bizonyos algebrai operációkra, akkor erre következtetni tudunk a modell-osztályt leíró formulák szerkezetéből. Fordítva, ha ismerjük $\mathcal{K}$ viselkedését bizonyos algebrai operációkra, akkor következtetni tudunk $\mathcal{K}$ lehetséges axiómáinak felépítésére.

5. FEJEZET

KLASSZIKUS LOGIKÁK, MODÁLIS LOGIKA

Az úgynevezett „klasszikus logikák” szorosan kapcsolódnak az elsőrendű (vagy állítás-) logikához. E logikákat nagyjából az elsőrendű logikával párhuzamosan vizsgálták, egyúttal az elsőrendű logika korlátait és lehetőségeit is jobban megismerték. E logikákon kívül nagy számban jöttek létre új logikák a számítástudományi, a nyelvészeti és a mesterséges intelligencia kutatások során, bár ezek közül többre már korábban felfigyeltek a filozófiai logikai kutatások során is. E logikák alkotják az úgynevezett „nemklasszikus logikákat” (például dinamikus logika, nemmonoton logika, nyíllogika stb.).

Jelen részben először két klasszikus logikát tárgyalunk. A *másodrendű logika* közvetlen általánosítása az elsőrendűnek, matematikai alkalmazása lényeges. A *többfajtájú logikának* az elsőrendű logika formailag speciális esete (mint „egyfajtájú” logika) azonban igazolható, hogy a többfajtájú és az elsőrendű logikák maradéktalanul visszavezethetők egymásra, ezért a többfajtájú logika az elsőrendű logika egy változatának tekinthető. A harmadik részben tárgyalandó logika, a *modális logika* (és fontos változatai, mint például a multimodális logikák, a temporális vagy a dinamikus logika) már nemklasszikus logikának számít, egyes speciális eseteitől eltekintve (például $S5$). A *modális logikákon* belül elsősorban a modális állításlogikával foglalkozunk. Ez általánosítása a klasszikus állításlogikának, és lényegesen új szemléletet igényel. A modális logika alapjainak megismerése jó kiindulópont a nemklasszikus logikák elsajátításához. A nemklasszikus logikák átfogó tárgyalása jelen könyv folytatásának lehet feladata.

5.1 Másodrendű logika

Az úgynevezett „magasabb rendű” (n-ed rendű, $n > 1$) logikák közül jelen részben a matematikában alkalmazott legfontosabbat, a másodrendűt tárgyaljuk.

Másodrendű logikát akkor használunk, amikor arra van szükség, hogy *relációkat, illetve függvényeket kvantáljunk*. Az elsőrendű logikában a struktúrák *alaphalmazának elemeire kétféleképpen tudunk a nyelvben utalni*, egyrészt *individuumkonstansként*, másrészt *individuumváltozóként*. Utóbbiakat kvantálni is tudjuk. Relációkra és függvényekre azonban csak *konstansként* tudunk utalni. A másodrendű logika lényege tehát az, hogy megjelennek a *függvény*-, illetve *relációváltozók* is, amelyeket már kvantálni is tudunk. Például egy 1 argumentumú relációváltozó a modell alaphalmazának *részhalmazain*, másképpen az A alaphalmaz $\mathcal{P}A$ hatványhalmazán fut. Harmadrendű logikában már olyan változókkal bővül a nyelv, amelyek $\mathcal{P}A$ hatványhalmazán futnak, ilyen változókra lehet szükség például a „szűrő” formális definíciójánál stb. A formalizálás szintjén, a matematikai gyakorlatban, azonban legfeljebb másodrendű formulákat szoktak használni. A másodrendű logika kifejezőereje nagyobb, mint az elsőrendű logikáé, de látni fogjuk, hogy számos korláttal rendelkezik az elsőrendű logikához képest. Jelen részben nem építjük fel elölről a másodrendű logikát, csupán a lényeges különbségeket említjük az elsőrendű logikához képest.

1. A másodrendű logika nyelve. Az elsőrendű logika „abc”-jét kibővítjük *függvényváltozók*, illetve *relációváltozók* egy $X_1, X_2, \ldots$, illetve $U_1, U_2, \ldots$ sorozatával. Továbbá e sorozatokhoz megadunk egy-egy sorozatot, amelyek rendre leírják a függvényváltozók és relációváltozók argumentumainak számát. Az eredeti individuumváltozók 0 változós függvényváltozóknak tekinthetők.

A másodrendű nyelveknél módosítjuk az elsőrendű nyelv termjeinek és formuláinak definícióját úgy, hogy mindenütt, ahol *függvény-* és *relációkonstans* előfordul, most a *függvény-* és *relációváltozó* is megengedett. Az egyetlen lényeges különbség a kvantálás definíciójánál van, a kvantálás kiterjesztésénél individuumváltozókról tetszőleges változókra. Itt a formula induktív definíciójának következő kiegészítésére van szükség:

Ha α formula, és Z tetszőleges függvény- vagy relációváltozó, akkor $\forall Z\alpha$ és $\exists Z\alpha$ is formula.

A változók szabad és kötött előfordulása, a nyílt és zárt formula fogalma stb. hasonlóan értelmezhető, mint elsőrendű logikában.

2. Másodrendű formulák igazságértékelése struktúrán, logikai következmény fogalma, bizonyítási rendszer. Az első-, illetve másodrendű *struktúra* fogalma egybeesik, hiszen az első- és másodrendű logika konstansai megegyeznek.
Formulák *igazságértékelésénél*, ahogyan az elsőrendű esetben az *individuumváltozók* a struktúra alaphalmazán „futnak”, úgy másodrendű esetben az adott argumentumszámú *függvény-*, illetve *relációváltozók* értékei a struktúra alaphalmazán értelmezett megfelelő argumentumszámú *összes lehetséges konkrét függvényeken*, illetve *relációkon futnak*. Az igazságértékelés induktív definíciójánál ki kell egészíteni a kvantorokkal kapcsolatos részeket. Például:

Ha Z n változós relációváltozó, és az α formula egyetlen szabad változója Z, akkor $\forall Z\alpha$ igaz az $\mathcal{A}$ struktúrán akkor és csak akkor, ha minden lehetséges módon rögzítve Z-t mint A-n értelmezett konkrét n változós relációt, α „igaz” $\mathcal{A}$-n.

Hasonlóan értelmezhető $\forall Z\alpha$ akkor is, amikor Z függvényváltozó. Hasonlóan definiálható $\exists Z\alpha$ is.

A logikai *következmény* fogalma megegyezik az elsőrendű esettel.
Igazolható, hogy másodrendű logikában is igaz a prenex normálforma tétel. Sőt az is igaz, hogy olyan normálforma is létezik, ahol a másodrendű kvantorok *megelőzik* az összes elsőrendű kvantort.

Bizonyítási rendszert másodrendű logikában a következőképpen nyerhetünk. Tekintsük például a Hilbert-féle axiómarendszert. Ezt úgy módosítjuk, hogy az előforduló formulák a *másodrendű nyelv* formulái lehetnek, a kvantifikációkat pedig kiterjesztjük reláció-, illetve függvényváltozókra. Az =-re vonatkozó axiómákat elejthetjük, mert másodrendű logikában definiálható az =. Továbbá minden n-re felvesszük még a következő axiómasémát:

$$\exists X\forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots x_n)\leftrightarrow\alpha(x_1,\ldots x_n)),$$

ahol α elsőrendű formula. E séma jelentése az, hogy bármely α elsőrendű nyílt formula igazsághalmaza megegyezik valamely *predikátumváltozó* értékének igazsághalmazával.

Példákat adunk néhány a matematikában előforduló másodrendű formulára:

1. Példa. *„Bármely nem üres korlátos valós számhalmaznak van legkisebb felső korlátja”.*

A formalizálás a következő:

$$\forall X(\exists y\,Ky\wedge\exists z\,Xz\rightarrow\exists v(Kv\wedge\forall u(Ku\rightarrow v\le u))), \tag{1}$$

ahol Ks jelöli a $\forall z(Xz\rightarrow z\le s)$ formulát, és $y\le z$ rövidíti az $y<z\vee y=z$ formulát.

2. Példa. *A teljes indukció másodrendű axiómája:*

$$\forall X(X0\wedge\forall y(Xy\rightarrow XSy)\rightarrow\forall y\,Xy) \tag{2}$$

Megjegyezzük, hogy a teljes indukciós másodrendű axióma nyilván erősebb feltétel, mint az eredeti elsőrendű indukciós séma. Ugyanis, míg az elsőrendű sémánál a relációkonstans a nyelv által *definiálható* részhalmazokon „fut", addig másodrendű formula esetén a kvantor *tetszőleges részhalmazokon* futhat.

3. Példa. *A jólrendezési tulajdonság:*

Elégítse ki a $<$ reláció a rendezési reláció ismert három tulajdonságán felül (lásd 4.1) a következő tulajdonságot:

$$\forall X(\exists y Xy \to \exists y(Xy \wedge \forall z(Xz \to y \leq z)), \tag{3}$$

ahol $y \leq z$ rövidíti $y < z \vee y = z$-t.

3. A másodrendű logika korlátairól. Megmutatjuk, hogy a másodrendű logika lényegesen másképpen viselkedik, mint az elsőrendű logika. Másodrendű logikában ugyanis *nem igaz* az elsőrendű logika számos fontos tétele: például *a Gödel-teljességi tétel*, a *kompaktsági tétel* és a *Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel*.

Először példát mutatunk arra, hogy *a kompaktsági tétel nem igaz.* Tudjuk, hogy a „végtelennek lenni" nem elsőrendű tulajdonság. Könnyű meggondolni, hogy egy halmaz végtelen akkor és csak akkor, ha értelmezhető rajta felső korlát nélküli rendezés, jelölje e rendezési relációt most X. E tulajdonság a következőképpen fejezhető ki a másodrendű logikában:

$$\exists X(\forall y \neg Xyy \wedge \forall y \forall z \forall w(Xyz \wedge Xzw \to Xyw) \wedge \forall y \forall z(Xyz \vee Xzy \vee y{=}z) \wedge \exists z \forall y Xyz)$$

Jelölje α ezt a formulát. $\neg\alpha$ jelentése tehát az, hogy egy halmaz véges. Jelentse β_n azt az elsőrendű formulát, hogy egy halmaz legalább n elemű.

Ekkor a $\Sigma = \{\beta_n : n \in \omega\} \cup \{\neg\alpha\}$ formulahalmaz bármely véges része kielégíthető, azonban Σ nyilván nem kielégíthető, tehát a kompaktsági tétel valóban nem igaz.

Nem igaz a Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel sem. Ennek illusztrálására azt az ismert tényt használhatjuk fel, hogy a rendezett testek véges elsőrendű axiómarendszerét kiegészítve a fenti (1) supremumaxiómával, az így nyert Σ axiómarendszer modelljei izomorfak a valós számok standard modelljével. Σ-nak tehát nem lehet kontinuum számosságúnál nagyobb modellje, ellentétben a Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel állításával.

Nem igaz a teljességi tétel sem. Tekintsük például az úgynevezett *másodrendű Peano-aritmetikát*. Ebben az axiómarendszerben az elsőrendű teljes indukciós *séma* helyett (lásd 3.1.1) egy másodrendű *axiómát, a* (2)-beli másodrendű indukciós axiómát tesszük fel.

Egyrészt igazolható, hogy a másodrendű Peano-aritmetika, szemben az elsőrendűvel, *kategorikus*, azaz bármely két modellje izomorf. Másrészt megmutatható, hogy a másodrendű Peano-aritmetikára is igaz Gödel inkomplettségi tétele, tehát létezik a másodrendű Peano-aritmetikától független φ formula. Viszont a szemantikában, a kategoricitás miatt, igaz $\Sigma \vDash \varphi$ és $\Sigma \vDash \neg\varphi$ valamelyike, ezért a másodrendű Hilbert-kalkulus nem lehet teljes.

Vagyis a másodrendű logikában *az elsőrendű logikánál megszokott értelemben nem tudunk bizonyításelmélet és szemantika kapcsolatáról beszélni*. Általánosabban, az is megmutatható, hogy a másodrendű aritmetika szemantikájához *nem is létezik teljes kalkulus*.

4. A másodrendű logika használatáról és általánosításairól. A másodrendű logika fenti „gyengéi" miatt *egyrészt* létezik olyan törekvés, hogy lehetőleg elkerüljük a másodrendű logika használatát, illetve egy-egy jól viselkedő szeletére vagy módosítására szorítkozunk. Például meggondolható, hogy az (1)–(3) formulák kielégíthetősége a szándékolt interpretáción ekvivalens egy alkalmas *végtelen* elsőrendű formulahalmaz kielégíthetőségével.
Másrészt a másodrendű logika, gyenge oldalai ellenére, fontos eszköze a matematikának, helyenként igen természetes, hogy használjuk nyelvét és szemantikáját. Érdekesek a *másodrendű kategorikus* elméletek (bár ezen elméleteknek, a fentiek szerint, nincs a szokásos szemantikát tükröző bizonyításelméletük). Ilyen a fent említett másodrendű Peano-aritmetika, vagy a valós számok testének másodrendű elmélete. Tehát a természetes számok és a valós számok is, *elsőrendben nem, de másodrendben kategorikusan axiomatizálhatók*. A valós számoknál az (1) tulajdonságnak hasonló a szerepe, mint a másodrendű indukciós axiómának a természetes számok axiomatizálásakor, tehát a többi testaxiómával együtt biztosítja a kategoricitást.

Fontos szerepet játszanak a másodrendű logika bizonyos szeletei. Ezt a 6.2 (bonyolultságelméleti) részben tudjuk majd illusztrálni. Ilyen például az úgynevezett *másodrendű, egzisztenciális formulák* összessége.

A másodrendű logikához hasonlóan definiálható a *harmad-, negyed- stb. n-ed rendű logika*. A matematikai gyakorlatban csak helyenként találkozhatunk másodrendűnél magasabb rendű logikát igénylő állításokkal. A másodrendű logikánál felmerült nehézségek természetesen érvényben maradnak *minden magasabb rendű logikára*.

Lehetséges az összes magasabb rendű logikát egyszerre, egyetlen logika keretén belül is tárgyalni. Többek között ez történik a Russell által megalapozott típuselméletben, az úgynevezett *típuslogika* esetén. A típuslogika hiányosságai nagyjából ugyanazok, mint a másodrendű logikáé.

A magasabb rendű logikáknál felmerült nehézségeket többféleképpen kezelhetjük. Az *egyik* lehetőség, hogy csak a szemantikával vagy csak a bizonyításelmélettel dolgozunk, tudomásul véve, hogy nincs teljességi tétel.

A *másik* lehetséges utat Henkin mutatta meg típuslogikára. A modell fogalmát úgy definiálta, hogy redukálta a modellben fellépő halmazok összességét, azaz redukálta azon halmazok összességét, amelyeken a megfelelő rendű változók futhatnak. Megmutatta, hogy elegendő itt csak azokat a konkrét lehetséges relációkat és függvényeket megengedni, amelyek az igazságértékelés definíciójában „feltétlenül szükségesek" (ilyenek például a nyelven definiálható halmazok). Az ilyen modelleket „*gyenge modelleknek*" (másképpen Henkin modelleknek vagy szekunder modelleknek) nevezzük, az ezen modellfogalomra épülő szemantikát pedig *általánosított* szemantikának. Igazolható, hogy az általánosított szemantikára már megadható olyan bizonyítási rendszer, amelyik *teljes* e szemantikára nézve, továbbá igaz a kompaktsági tétel és a Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel. Ezen előnyös tulajdonságoknak az az ára, hogy a formulák olvasata nem a hagyományos, a kvantorok *korlátozott* kvantorok bizonyos szemantikai értelemben. Például, a már mondottak szerint, az egyváltozós relációváltozók kvantálásánál a változók értékei nem lehetnek az alaphalmaz tetszőleges részhalmazai, hanem e részhalmazok egy előre rögzített összességéből kerülnek ki. Hasonló történik az n-ed rendű változók esetén is ($n \geq 1$). Ezt a tulajdonságot jól kiemeli az a felépítés, amely a Henkin-féle általánosított szemantikát mint *többfajtájú logikát* mutatja be (lásd még az 5.2-t). A típuslogika Henkin-féle felépítését *reguláris* típuslogikának is nevezik, e logika egyik fontos alkalmazása például a nemstandard analízis.

Vizsgálták már ezen logikák algebraizációit is, a szemantikának úgynevezett *relativizált* halmazalgebrák felelnek meg.

5.2 Többfajtájú logika

A többfajtájú logika bizonyos esetekben természetesebb és kényelmesebb, mint az elsőrendű logika, és mint látni fogjuk, ekvivalens az elsőrendű logikával. Többfajtájú logikát akkor használunk, ha a vizsgált objektumok „nemhomogének”. Például a vektorterek nemhomogén struktúrák, más-más kezelést igényelnek a skalárok, illetve vektorok. Vagy nemhomogének a valós számok, ha a valós számokon belül külön kívánunk a természetes számokról is beszélni. A matematikai logika szinte minden alkalmazási területén használunk többfajtájú logikákat, így például a programspecifikációnál, az adatbázis-elméletben, a nemstandard analízisben.

Legyen adott egy tetszőleges I halmaz, a *fajták* halmaza.

1. A többfajtájú logika nyelve.

a) Az „*abc*”.

Az elsőrendű logika *logikai konstansai* közül szerepel $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$ és $\forall$.

Az *individuumváltozókat* és az =-et „megsokszorozzuk” az I halmaz elemeivel, tehát legyen adott individuumváltozók egy $x_1^i, x_2^i, x_3^i, \ldots$ összessége ($i \in I$) és egyenlőségek egy $=_i$ összessége ($i \in I$).

Mint *nemlogikai konstansokat*, tartalmazza a nyelv az elsőrendű logikához hasonlóan

függvényjelek egy $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sorozatát és

relációjelek egy P_1, P_2, $P_3, \ldots$ sorozatát.

A függvény-, illetve relációjelek argumentumszámai helyett a *függvény-, illetve relációjelek* úgynevezett *fajtáit* adjuk meg. A fajta nemcsak arra utal, hogy hány argumentumú a függvény, illetve reláció, hanem arra is, hogy az egyes argumentumokat, illetve a függvények értékeit, rendre, milyen indexű halmazokon kívánjuk majd interpretálni.

Tehát megadunk minden konkrét függvényjel esetén egy $\langle i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}\rangle$ véges indexsorozatot ($i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1} \in I$), $n = 0, 1, 2, \ldots$, ahol n az argumentumszám, és i_{n+1} a *függvényérték* fajtája, minden konkrét relációjel esetén pedig egy $\langle i_1, i_2, \ldots i_n\rangle$ véges indexsorozatot ($i_1, i_2, \ldots i_n \in I$), ahol n a reláció argumentumszáma. Az $=_i$-hez is rendelünk fajtát, legyen $\langle i, i\rangle$.

Mint az elsőrendű esetben, most is feltesszük, hogy a nyelv szimbólumai valamennyien különbözők.

b) *Termek és formulák.*

Termek.

(i) Az individuumváltozók és a konstansszimbólumok termek, értékeik fajtája azonos fajtájukkal.
(ii) Ha $t_1, t_2, \ldots t_n$ termek és értékeik fajtái rendre $i_1, i_2, \ldots i_n$, valamint az f függvényszimbólum fajtája $\langle i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}\rangle$, akkor $f t_1 t_2 \ldots t_n$ is term, és értékének fajtája i_{n+1}.

A termek a fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával nyert kifejezések.

Formulák.

(i) Ha P egy $\langle i_1, i_2, \ldots i_n\rangle$ fajtájú relációjel, és $t_1, t_2, \ldots t_n$ olyan termek, hogy értékeik fajtája rendre $i_1, i_2, \ldots i_n$, akkor $Pt_1 t_2 \ldots t_n$ *atomi formula*.
(ii) Ha t_1 és t_2 értékeinek fajtája i, és $=_i$ egy $\langle i, i\rangle$ fajtájú egyenlőség, akkor $t_1 =_i t_2$ atomi formula.
(iii) Ha α és β formulák, akkor α, $\neg\alpha$, $\wedge\alpha\beta$, $\vee\alpha\beta$, $\rightarrow\alpha\beta$, $\leftrightarrow\alpha\beta$ mindegyike formula.
(iv) Ha α formula, x_n^i individuumváltozó, akkor $\forall x_n^i\alpha$ és $\exists x_n^i\alpha$ is formula.

A formulák a fenti négy szabály véges sokszori alkalmazásával nyert kifejezések.

2. Többfajtájú struktúrák, igazságértékelés struktúrán, bizonyítási rendszer.

Egy többfajtájú $\mathcal{A}$ struktúra *alaphalmaza* az I-vel indexezett A_i $(i \in I)$ halmazok egy összessége.
Az f, $\langle i_1, i_2, \ldots\ i_n, i_{n+1}\rangle$ fajtájú *függvényszimbólum interpretációja* $\mathcal{A}$-n, azaz $f^{\mathcal{A}}$, egy $f^{\mathcal{A}}$: $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n} \rightarrow A_{i_{n+1}}$ rögzített függvény. Speciálisan az i fajtájú konstans interpretációja egy A_i-beli elem.
A P, $\langle i_1, i_2, \ldots\ i_n\rangle$ fajtájú *relációszimbólum interpretációja* $\mathcal{A}$-n, azaz $P^{\mathcal{A}}$:
az $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}$ halmaz egy rögzített részhalmaza.
Formulák *igazságértékelése* egy $\mathcal{A}$ struktúrán értelemszerűen történik, hasonlóan az elsőrendű definícióhoz, figyelembe véve, hogy az x_n^i i fajtájú individuumváltozók A_i-n futnak.

A *logikai következmény* fogalmának definíciója teljesen hasonló az elsőrendű esethez. *Bizonyítási rendszer* is megadható a többfajtájú logikára, és igazolható, hogy létezik teljes rendszer is.

3. Többfajtájú logika fordítása elsőrendű logikára. Az nyilvánvaló, hogy a hagyományos elsőrendű logika tekinthető 1 fajtájú logikának. Fordítva, induljunk ki egy adott többfajtájú nyelvből. A következőkben azzal foglalkozunk, hogy a többfajtájú logika hogyan fordítható le elsőrendű logikára.
Vegyünk fel a többfajtájú nyelvhez egy Q_i $(i \in I)$ hagyományos 1 argumentumú relációszimbólum összességet és individuumváltozók egy $y_1, y_2, \ldots$ sorozatát.
A formulák konvertálása a következőképpen történik:

A formulák fenti, induktív definícióját követve, az (i)–(iii) lépéseknél nincs szükség konverzióra (az $=_i$-ket relációjeleknek tekintjük). A (iv) lépésnél a következőképpen járunk el:

$$\forall x_n^i \alpha(\ldots x_n^i, \ldots)$$

szerkezetű formulát a

$$\forall y(Q_i y \to \alpha(\ldots x_n^i / y, \ldots)) \tag{1}$$

szerkezetű elsőrendű formulára cseréljük (feltételezzük, hogy y nem fordul elő a formulában). Tehát az x_n^i fajtájú $\forall$-nel kvantált változót, a Q_i premissza (1)-beli beiktatása mellett, kicseréljük a közönséges y individuumváltozóra.

Hasonló eljárás követhető az egzisztenciális kvantorok esetén is: a

$$\exists x_n^i \alpha(\ldots x_n^i, \ldots)$$

szerkezetű formulát a

$$\forall y(Q_i y \wedge \alpha(\ldots x_n^i / y, \ldots)) \tag{2}$$

szerkezetű elsőrendű formulára cseréljük.

Egy többfajtájú $\mathcal{A}$ *struktúrát* a következőképpen konvertálunk egy hagyományos $\mathcal{A}^*$ struktúrává, felhasználva a formulák fenti konverzióját:
$\mathcal{A}^*$ *alaphalmaza* legyen $A^* = \bigcup_{i \in I} A_i$,
A *relációk* definíciója legyen ugyanaz, mint többfajtájú esetben, ezért tekinthetjük őket $\mathcal{A}^*$-on értelmezettnek.
A *függvények* értelmezési tartományát terjesszük ki $\mathcal{A}^*$-ra tetszőlegesen, változatlanul hagyva a korábbi értékeket.

A többfajtájúból egyfajtájúba a már ismertetett módon konvertált formulák *interpretációja* $\mathcal{A}^*$-on a szokásos módon értelmezhető. Q_i *interpretációja* legyen A_i.

Tegyük fel, hogy ezen értelmezés mellett a többfajtájú β *mondatnak* az elsőrendű β^* *mondat* felel meg. Könnyen meggondolható a következő állítás:

β igaz $\mathcal{A}$-n akkor és csak akkor, ha β^* igaz $\mathcal{A}^*$-on.

Az állítás segítségével igazolható, hogy az elsőrendű logika tételeinek igazsága öröklődik a többfajtájú logikára (teljességi tétel, kompaktsági tétel stb.).

4. A másodrendű logika mint többfajtájú logika. Mint azt a fejezet elején említettük, a másodrendű logika kezelhető egy speciális többfajtájú logikaként. Az alapgondolat az, hogy az individuumváltozóknak, valamint minden konkrét természetes $n > 0$ argumentumra az n argumentumú relációváltozóknak és függvényváltozóknak feleljen meg egy-egy fajta. A többfajtájú nyelvek definíciójának megfelelően így minden fajtára adott változók egy végtelen sorozata, továbbá minden fajtára legyen adott egy a fajtára vonatkozó egyenlőség. A konstrukciót nem részletezzük, de a nyelv bizonyos bővítésével (jelölje ezt $\mathcal{S}$) és bizonyos Σ axiómák felvételével elérhető, hogy minden közönséges másodrendű α formulához és őt kielégítő modellhez található olyan $\mathcal{S}$-beli α' formula és a Σ axiómákat kielégítő többfajtájú $\mathcal{S}$ típusú modell, hogy itt α és α' egyszerre igazak vagy hamisak. Nemcsak a másodrendű logikát, hanem minden n-ed rendű logikát, valamint a típuslogikát is lehet többfajtájú logikaként kezelni.

1. Példa. *Formalizáljuk a vektorterek axiómáit kétfajtájú logikában!*

Az 1. fajta vonatkozzon a *vektor* tulajdonságra, a 2. fajta vonatkozzon a *testelem* tulajdonságaira. x és y legyen 1. fajtájú, λ és μ pedig 2. fajtájú változók.
Továbbá például a kétváltozós, $\langle 2, 1, 1\rangle$ fajtájú p függvény legyen a skalárral szorzás (értékének fajtája tehát 1).
Ekkor például a belső kommutativitás formalizálása:

$$\forall x \forall y (x +' y = y +' x),$$

ahol $+'$ jelöli a vektorok összeadását, azaz az $+'$ fajtája $\langle 1, 1, 1\rangle$ (értékének fajtája tehát 1).
Például a skalárral szorzás összeadásra vonatkozó disztributivitásának formalizálása:

$$\forall x \forall y \forall \lambda (p(\lambda, x +' y) = p(\lambda, x) +' p(\lambda, y)).$$

A másik disztributív tulajdonság:

$$\forall \lambda \forall \mu \forall x (p(\lambda +'' \mu, x) = p(\lambda, x) +' p(\mu, x)),$$

ahol $+''$ az összeadás a testben és fajtája $\langle 2, 2, 2\rangle$.

A többi axióma formalizálása hasonlóan történhet.

2. Példa. *Formalizáljuk többfajtájú logikában a következőt:* „Van olyan nő, akinek minden férfi tetszik, és van olyan férfi, aki minden nőnek tetszik.

Az 1. fajta vonatkozzon arra, hogy valaki férfi, a 2. fajta pedig vonatkozzon arra, hogy valaki nő. Legyen n 2. típusú, f pedig 1. típusú individuumváltozó. A Txy kétargumentumú, $\langle 1, 2\rangle$ fajtájú reláció pedig jelentse azt, hogy egy y nőnek tetszik egy x férfi. Ekkor az állítás formalizálása:

$$\exists n \forall f\, Tfn \wedge \exists f \forall n\, Tfn$$

3. Példa. *Formalizáljuk többfajtájú logikában a Cauchy-konvergenciakritériumot!*

A megoldás: $\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \to \exists N \forall n \forall m (n > N \wedge m > N \to |a(n) - a(m)| < \varepsilon)$.
Az 1. fajta vonatkozzon a valós szám tulajdonságra, a 2. fajta pedig a természetes szám tulajdonságra. ε legyen 1. fajtájú változó, N, n és m pedig 2. fajtájú változók. 0 legyen 1. fajtájú konstans, az a függvény fajtája legyen $\langle 2, 1\rangle$, az $||$ abszolútérték-függvény fajtája $\langle 1, 1\rangle$, a $-$ kivonás fajtája $\langle 1, 1, 1\rangle$, és a $<$ és $>$ reláció fajtája $\langle 1, 1\rangle$.

Megjegyezzük, hogy ha a szokásos *elsőrendű logikában* kívánjuk formalizálni a Cauchy-kritériumot, akkor a megoldásban például jelezni kell, hogy az N, n és m változók természetes számok, tehát ekkor a megoldás:

$\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists N\forall n\forall m(TN \wedge Tn \wedge Tm \wedge n > N \wedge m > N \to |a(n) - a(m)| < \varepsilon)$,

ahol T jelentése „természetes szám”.

5.3 Modális logika

A *modalitás* vizsgálata a logikában az ókorra nyúlik vissza, de az első átfogó modális rendszer kidolgozása Lewis-tól ered (20. század eleje). A modális logika elsősorban a számítógépek, a mesterséges intelligencia (tudásreprezentáció) kutatásával vált fontossá az alkalmazások szempontjából. A modális logika fejlődésében is lezajlott az a folyamat, amely a logika egész fejlődésére is jellemző, nevezetesen bizonyos filozófiai-logikai vizsgálatok új értelmezést nyertek a számításstudományban, és kibővültek számos új kutatási iránnyal. A kutatás sok tekintetben gyakorlativá és alkalmazott jellegűvé vált. A klasszikus modális logikából nőttek ki a nemklasszikus logikák olyan fontos fejezetei, mint a temporális (idő-) logika vagy a dinamikus logika.

A modális logika eredetileg a klasszikus logika olyan bővítése, amely a „szükségszerű” és a „lehetséges” (másképpen, „szükségszerű, hogy igaz”, „lehetséges, hogy igaz”) kifejezésére szolgált, e kifejezéseket rendre a $\Box$ (box, doboz, nec), illetve a $\Diamond$ (káró, posz) egyargumentumú műveletekkel modellezték. A „szükségszerű”-t itt egy erős értelemben értjük, tehát úgy, hogy valamely *törvény* (például fizikai törvény) alapján szükségszerű, és nem a véletlen folytán szükségszerű (például szükségszerű, hogy az éjszakák és nappalok váltsák egymást, de erős értelemben nem szükségszerű, hogy a zongorának három lába van). Hasonlóan, erős értelemben használjuk a „lehetséges” kifejezést. Tagadása, a „nem lehetséges, hogy igaz” azzal ekvivalens, hogy „szükségszerű, hogy nem igaz”. Később majd rátérünk arra, hogy milyen értelemben használhatjuk még a $\Box$ és $\Diamond$ modális operátorokat. A modális logika lényege, hogy a használt modális operátorok *módosítani* képesek az állítások eredeti jelentését.

Jelen részben elsősorban a modális *állításlogika* rendszerével fogunk foglalkozni. Egy hagyományos $\mathcal{L}'$ állításlogikai nyelvből indulunk ki. Bővítjük a nyelvet a $\Box$ és $\Diamond$ egyargumentumú műveletekkel. Jelölje az így kapott nyelvet $\mathcal{L}$. A formula ismert induktív definícióját kiegészítjük azzal, hogy ha φ formula, akkor $\Box\varphi$, illetve $\Diamond\varphi$ is formula.

5.3.1 Szemantika

A modális logika szemantikája *általánosítása* a klasszikus állításlogika szemantikájának. Definiáljuk a modális állításlogika modelljeit.

1. Definíció. Egy $\mathcal{L}$ típusú *interpretáción* (*$\mathcal{L}$-frame* vagy *frame)* értjük a

$$\mathcal{C} = \langle W,\ S,\ \{\mathcal{C}(p)\colon p \in W\}\rangle$$

sorozatot, ahol

W egy tetszőleges nem üres halmaz, a lehetséges p világok (vagy a lehetséges világok címkéinek, $p \in W$) halmaza.

S egy kétváltozós reláció W-n, az *alternatívareláció* (másképpen elérhetőségi reláció),

$C(p)$ minden $p \in W$-re az atomi formulák egy klasszikus *igazságértékelése*, tehát ha A atomi formula, akkor A igaz vagy hamis $C(p)$-n.

A következő egy fontos segédfogalom a frame-en definiálandó igazság fogalmához. Történeti okokból a bináris relációkra, a könyv egyéb helyein használt Swp jelölés helyett a wSp infix jelölést fogjuk használni.

2. Definíció. Az α formula *igazságértékelése rögzített $\mathcal{C}$ frame-re* a w $(w \in W)$ *világban* (jelölése: $w \Vdash \alpha$ vagy $w \overset{\mathcal{C}}{\Vdash} \alpha$) a következő: α *igaz* a $\mathcal{C}$ frame w világában,

(i) ha α atomi formula, akkor
$w \Vdash \alpha$ akkor és csak akkor, ha α igaz a $C(w)$ értékelésre,

(ii) $w \Vdash \neg\alpha$ akkor és csak akkor, ha $w \nVdash \alpha$,

(iii) $w \Vdash \alpha \wedge \beta$ akkor és csak akkor, ha $w \Vdash \alpha$ *és* $w \Vdash \beta$,

(iv) $w \Vdash \alpha \vee \beta$ akkor és csak akkor, ha $w \Vdash \alpha$ *vagy* $w \Vdash \beta$,

(v) $w \nVdash \alpha \to \beta$ akkor és csak akkor, ha $w \Vdash \alpha$ *és* $w \nVdash \beta$,

(vi) $w \Vdash \Box\alpha$ akkor és csak akkor, ha *minden* $p \in W$-re, amelyre wSp, $p \Vdash \alpha$,

(vii) $w \Vdash \Diamond\alpha$ akkor és csak akkor, ha *van olyan* $p \in W$, amelyre wSp és $p \Vdash \alpha$.

Intuitív szinten W elemei a lehetséges világok, az S reláció pedig azt írja le, hogy az egyes világoknak mely világok lehetnek alternatívái. A $\Box$ és $\Diamond$ műveletek értelmezése, mint *szükségszerű* és *lehetséges*, a definíció (vi) és (vii) pontjai segítségével adott. Például ezek szerint $\Box\alpha$ akkor igaz, azaz α akkor *igaz szükségszerűen* a w világban $(w \in W)$, ha igaz minden olyan p világban $(p \in W)$, amely elérhető w-ből (tehát wSp és $p \Vdash \alpha$ teljesül).

A fenti szemantikai definíciókat lényegében *Carnap* vezette be, majd általánosították, pontosították őket. A legelterjedtebb változat Kripkétől származik, ezért a fent definiált szemantika elnevezése *Kripke-szemantika*. A definíció mutatja, hogy α igazsága egy világban *nem határozza meg* $\Box\alpha$ és $\Diamond\alpha$ igazságát e világban, ezért azt mondjuk, hogy e logika (és a $\Box$ és $\Diamond$ művelet) *nem extenzionális*, hanem *intenzionális*.

Ezután definiáljuk az *igazság* fogalmát modális állításlogikára.

3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az α formula *igaz* a

$$\mathcal{C} = \langle W,\ S,\ \{\mathcal{C}(p)\colon p \in W\}\rangle$$

$\mathcal{L}$-interpretáción ($\mathcal{L}$-frame-en, jelölés: $\mathcal{C} \vDash \alpha$), ha *minden* $w \in W$-re $w \Vdash \alpha$.

4. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az α formula *érvényes*, ha minden $\mathcal{L}$-interpretációra igaz.

A Kripke-szemantika lényeges *általánosítása a klasszikus állításszemantikának*, hiszen ez utóbbinak a modellje olyan speciális frame-nek tekinthető, amelynél W egyelemű.

Legyen Σ formulák egy tetszőleges halmaza, α pedig tetszőleges formula.

5. Definíció. α *logikai következménye* Σ*-nak* (jelölésben: $\Sigma \vDash \alpha$), ha minden olyan $\mathcal{L}$-interpretációra, amelyen Σ valamennyi formulája igaz, α is igaz.

6. Tétel.

(i) *Érvényes* modális formulasémák többek között a következők:

$\Box\alpha \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\alpha$
$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$
$\Diamond(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Diamond\beta)$
$\Diamond(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$
$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$
$\Box(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$
$(\Box\alpha \vee \Box\beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$

(ii) *Nem érvényes* modális formulasémák többek között a következők:

$\alpha \to \Box\alpha$
$\Box\alpha \to \alpha$
$\Box(\alpha \vee \beta) \to (\Box\alpha \vee \Box\beta)$
$\Box\alpha \to \Diamond\alpha$
$(\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \to \Diamond(\alpha \wedge \beta)$
$\alpha \to \Diamond\alpha$
$\Diamond\alpha \to \alpha$

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{C} = \langle W, S, \{\mathcal{C}(p) \colon p \in W\}\rangle$ frame-et, és $p \in W$ legyen tetszőleges.

(i) Megmutatjuk, hogy $\Box\alpha \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\alpha$ érvényes.

Először azt igazoljuk, hogy $p \Vdash \Box\alpha \to \neg\Diamond\neg\alpha$. Indirekt, tegyük fel, hogy $p \Vdash \Box\alpha$, de $p \nVdash \neg\Diamond\neg\alpha$. Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy $p \Vdash \Diamond\neg\alpha$, azaz valamely $q \in W$-re, amelyre pSq fennáll, $q \Vdash \neg\alpha$. De $p \Vdash \Box\alpha$ implikálja, hogy minden q-ra, amelyre pSq fennáll, $q \Vdash \alpha$. Ez ellentmondás.

Fordítva, igazoljuk, hogy $p \Vdash \neg\Diamond\neg\alpha \to \Box\alpha$. Indirekt tegyük fel, hogy $p \Vdash \neg\Diamond\neg\alpha$, de $p \nVdash \Box\alpha$. $p \Vdash \neg\Diamond\neg\alpha$ ekvivalens azzal, hogy $p \nVdash \Diamond\neg\alpha$, azaz nincs olyan q, amelyre $q \Vdash \neg\alpha$ (azaz $q \nVdash \alpha$) és pSq fennáll. $p \nVdash \Box\alpha$ azt jelenti, hogy van olyan q, hogy $q \nVdash \alpha$ és pSq fennáll. Ez ellentmondás.

Megmutatjuk, hogy $(\Box\alpha \vee \Box\beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$ érvényes.

Tegyük fel, hogy $p \Vdash \Box\alpha \vee \Box\beta$. Ekkor $p \Vdash \Box\alpha$ vagy $p \Vdash \Box\beta$. Ha $p \Vdash \Box\alpha$, akkor minden olyan q-ra, amelyre pSq fennáll, teljesül $q \Vdash \alpha$. Ekkor $q \Vdash \alpha \vee \beta$ is következik, így, definíció szerint $p \Vdash \Box(\alpha \vee \beta)$. Hasonlóan következtethetünk a $p \Vdash \Box\beta$ esetben is.

(ii) Megmutatjuk, hogy a $\Box(\alpha \vee \beta) \to (\Box\alpha \vee \Box\beta)$ formulaséma nem érvényes.

Megmutatjuk, hogy lehetséges az, hogy valamely $p \in W$-re $p \Vdash \Box(\alpha \vee \beta)$, azaz minden olyan q-ra, amelyre pSq fennáll, $q \Vdash \alpha \vee \beta$, de $p \nVdash \Box\alpha \vee \Box\beta$, azaz $p \nVdash \Box\alpha$ és $p \nVdash \Box\beta$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy van olyan q_1 és q_2, amelyre pSq_1 és pSq_2 fennáll, és teljesül, hogy $q_1 \nVdash \alpha$ és $q_2 \nVdash \beta$.

Konstruálunk egy ilyen frame-et. Legyen W 3 elemű: $W = \{p, q_1, q_2\}$, és S legyen olyan, hogy pSq_1 és pSq_2 fennáll, pSp pedig nem. Az α és a β formulák legyenek olyanok, hogy q_1-ben legyen α igaz, β pedig hamis, q_2-ben pedig legyen β igaz, és α hamis. Ez a szituáció p-re teljesíti az előző kívánalmakat.

Megmutatjuk, hogy a $\Box\alpha \to \alpha$ formulaséma nem érvényes.

Megmutatjuk, hogy van olyan frame, amelyben van olyan $p \in W$, hogy $p \Vdash \Box\alpha$, de $p \nVdash \alpha$. Ugyanis legyen S olyan, hogy pSp nem teljesül, de $p \neq q$-ra pSq teljesül. α legyen olyan formula, hogy hamis p-ben, és igaz minden más q-ban.

Megmutatjuk, hogy az $\alpha \to \Box\alpha$ formulaséma sem érvényes.

Megmutatjuk, hogy van olyan frame, amelyben van olyan $p \in W$, hogy $p \Vdash \alpha$, de $p \nVdash \Box\alpha$. Legyen W 2 elemű: $W = \{p, q\}$. Legyen S olyan, hogy pSq fennáll. α legyen olyan formula, hogy igaz p-ben, és hamis q-ban. Ekkor p-ben α igaz, $\Box\alpha$ hamis, tehát $\alpha \to \Box\alpha$ hamis. Ez a szituáció megfelelő.

A tétel többi állításai hasonlóan igazolhatók.

■

- Modális logikában teljes általánosságban *nem igaz a Dedukció tétel* (abban a formában, ahogyan azt 2.2-ben kimondtuk).

  Láttuk, hogy $\alpha \to \Box\alpha$ nem érvényes. Viszont $\alpha \vDash \Box\alpha$ teljesül, ugyanis legyen $\langle W, S, \{\mathcal{C}(p) \colon p \in W\}\rangle$ tetszőleges olyan frame, ahol α igaz, azaz $p \Vdash \alpha$, minden $p \in W$-re. Ekkor, definíció szerint, $\Box\alpha$ is igaz ezen a frame-en. Tehát a Dedukció tétel valóban nem teljesül.
- Megjegyezzük, hogy nyilvánvaló, hogy a $\Box$ és $\Diamond$ operátorok 2. Definícióbeli szemantikai értelmezése kvantorokat rejt, ahol a „kvantifikációs tartomány” az egy adott frame-hez tartozó lehetséges világok halmaza: W.
- A $\Box$ és $\Diamond$ operátorok modellezhetők a klasszikus elsőrendű logikában. Ugyanis bővítsük a modális állításnyelvet elsőrendű nyelvvé, és ha P' egy állításjel, akkor rendeljünk P'-höz egy P egyváltozós relációjelet. S' legyen a nyelvben egy az S relációnak megfelelő kétváltozós relációszimbólum. Ekkor minden rögzített

$\langle W, S, \{\mathcal{C}(p) \colon p \in W\}\rangle$ frame-re igaz, hogy

$p \Vdash \Box P'$ akkor és csak akkor, ha $\forall x(pSx \to Px)$ igaz,

$p \Vdash \Diamond P'$ akkor és csak akkor, ha $\exists x(pSx \wedge Px)$ igaz.

Ilyen módon a modális állításlogika frame-jeihez hozzárendeltünk őket leíró speciális elsőrendű modelleket. Sok esetben azonban e visszavezetés nehézkes, és természetesebb modális nyelvet használni.

5.3.2 Bizonyítási rendszer

A legtöbb klasszikus bizonyítási rendszer (például analitikus fák) általánosítható a modális esetre. Rátérünk a modális állításlogika egyik bizonyítási rendszerének, a K *rendszernek* az ismertetésére. A K rendszer egy Hilbert-típusú bizonyítási rendszer.

A klasszikus állításlogika szokásos axiómáin túl (3.1-beli 1. Definíció (i)–(iii)) a következő *axiómát* tételezzük fel:

$$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta) \qquad (K \text{ tulajdonság}).$$

A modus ponensen kívül a következő *levezetési szabályt* tesszük fel:

$$\alpha\textit{-ból következik } \Box\alpha. \qquad \text{(szükségességi szabály)}$$

Jelölése: $\alpha \vdash_{\mathcal{K}} \Box\alpha$. Az α formulának a Σ formulahalmazból történő levezetésének definíciója teljesen hasonló a levezetés klasszikus állításlogikai definíciójához (jelölése is hasonló: $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \alpha$ vagy egyszerűen csak $\Sigma \vdash \alpha$). Ha Σ üres halmaz, azaz α-t csak az axiómák segítségével vezetjük le, akkor α-t levezethetőnek mondjuk (jelölése: $\vdash_{\mathcal{K}} \alpha$ vagy egyszerűen csak $\vdash \alpha$).

Σ legyen modális formulák egy tetszőleges halmaza.

7. Tétel. $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma \vDash \alpha$ teljesül.

A tétel állítása az, hogy a K rendszer az előző részben definiált szemantikára nézve helyes és teljes. A tételt nem bizonyítjuk.

Ezután azzal az érdekes kapcsolattal foglalkozunk, amely *relációk bizonyos tulajdonságai és bizonyos modális tulajdonságok között áll fenn.*

Először felsorolunk néhány fontos relációtulajdonságot, közülük néhány már jól ismert (zárójelbe tesszük az elnevezéseket).

1. $\forall t(tSt)$ (reflexivitás),
2. $\forall t \forall s(tSs \to sSt)$ (szimmetria),
3. $\forall t \exists s(tSs)$ (sorozat),

4. $\forall t \forall s \forall u(tSs \wedge sSu \rightarrow tSu)$ (tranzitivitás),
5. $\forall t \forall s \forall u(tSs \wedge tSu \rightarrow sSu)$ (euklideszi tulajdonság),
6. $\forall t \forall s \forall u(tSs \wedge tSu \rightarrow s = u)$ (parciális függvény),
7. $\forall t \exists! s(tSs)$ (függvény),
8. $\forall t \forall s(tSs \rightarrow \exists u(tSu \wedge uSs))$ (gyengén sűrű).

Tekintsük ezután a következő modális formulasémákat:

(1) $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ ((T) tulajdonság)
(2) $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
(3) $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$
(4) $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$
(5) $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$
(6) $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\alpha$
(7) $\Diamond\alpha \leftrightarrow \Box\alpha$
(8) $\Box\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha$

Legyen W tetszőleges, de rögzített halmaz, és S konkrét reláció W-n.

8. Tétel. Az S reláció rendelkezik az (1)–(8) tulajdonságok közül a j-edikkel akkor és csak akkor ($j = 1, 2, \ldots 8$), ha minden az S relációval és W alaphalmazzal rendelkező frame olyan, hogy teljesül rá a (j) modális séma (azaz itt igaz e séma minden példánya).

Bizonyítás. A $j = 4$ esetre bizonyítjuk a tételt, a többi eset igazolása hasonló. Tegyük fel, hogy S tranzitív. Igazolandó, hogy $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ igaz bármely frame-ben, amely a W halmazzal és az S relációval rendelkezik. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy valamely $p \in W$-re és egy $\mathcal{C}(p)$ értékelésre $p \Vdash \Box\alpha$, de $p \nVdash \Box\Box\alpha$. $p \Vdash \Box\alpha$ értelmében

$$\text{minden olyan } q\text{-ra, amelyre } pSq \text{ fennáll, } q \Vdash \alpha. \tag{1}$$

$p \nVdash \Box\Box\alpha$, ezért valamely s-re, amelyre pSs teljesül, fennáll, hogy $s \nVdash \Box\alpha$. Utóbbi azt jelenti, hogy valamely t-re, amelyre sSt fennáll, teljesül $t \nVdash \alpha$.
Azonban a tranzitivitás miatt pSs és sSt implikálja pSt-t. Ezért (1) miatt $t \Vdash \alpha$. Ez ellentmondás.
Fordítva, tegyük fel, hogy $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ teljesül valamely frame-ben, amely a W halmazzal és az S relációval rendelkezik. Igazolandó, hogy S tranzitív.
Indirekt tegyük fel, hogy valamely $p, q, t \in W$ elemekre pSq és qSt fennáll, de pSt nem áll fenn.
Legyen α olyan *atomi formula*, amely pontosan a $t \in W$ világban hamis. Ekkor $p \nVdash \Box\Box\alpha$, mivel $t \nVdash \alpha$, de pSt nem áll fenn, ezért $p \Vdash \Box\alpha$. Ez ellentmond $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ igazságának.

■

A fenti modális tulajdonságok közül egyesek önmagukban is érdekesek, mások az alkalmazások miatt fontosak. E tulajdonságokat nemcsak egyenként, hanem bizonyos csoportokban is vizsgáljuk. A következőkben a modális logika három változatát emeljük ki (és ezzel három modális tulajdonságot mutatunk be). Ezek a modális változatok az alkalmazások szempontjából is jelentősek, továbbá szépen *jellemezhetők szemantikailag* a fenti „reláció-modális" tulajdonságkapcsolatokat tekintve, megszorításokat téve az elérhetőségi relációra nézve. E három logikát rendre egy-egy bővítéssel kapjuk a K modális rendszerből kiindulva. Ezen rendszerekben a 6. Tétel (ii)-beli formulák némelyike már *érvényes* formula. Az alábbi tételek következményei a 7. és 8. Tételeknek.

A T *logikát* úgy kapjuk, hogy a (T)

$$\Box\alpha \to \alpha$$

tulajdonsággal bővítjük a K rendszert. Könnyen látható, hogy (T) ekvivalens az $\neg\alpha \to \Diamond\neg\alpha$ tulajdonsággal.

9. Tétel. Egy α formula *levezethető* T-ben akkor és csak akkor, ha α igaz minden olyan frame-en, ahol az S alternatívareláció *reflexív*.

Az $S4$ *logikát* úgy kapjuk, ha a T rendszert a (4)

$$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$$

tulajdonsággal bővítjük.

10. Tétel. Egy α formula *levezethető* $S4$-ben akkor és csak akkor, ha α igaz minden olyan frame-ben, ahol az S alternatívareláció *reflexív és tranzitív*.

$S4$-ben, T-ből következően, $\Box\alpha$ és $\Box\Box\alpha$ logikailag ekvivalens. Ugyancsak ekvivalens $\Diamond\alpha$ és $\Diamond\Diamond\alpha$. Ezért $S4$-ben a *„megkettőzött" modális operátorok redukálhatók egyetlen modális operátor alkalmazására*. További szabályok is léteznek $S4$-ben modális operátorok sorozatának redukciójára, erre most nem térünk ki.

Az $S5$ *logikát* úgy kapjuk $S4$-ből, hogy az axiómákhoz hozzávesszük az (5)

$$\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$$

tulajdonságot.
(5)-öt ki tudjuk fejezni csak $\Box$-szal is: $\neg\Box\beta \to \Box\neg\Box\beta$, ahol β jelöli $\neg\alpha$-t.

11. Tétel. Egy α formula *levezethető* $S5$-ben akkor és csak akkor, ha α igaz minden olyan frame-en, ahol az S alternatívareláció *reflexív, tranzitív és euklideszi*.

Könnyű belátni, hogy a reflexív, tranzitív és euklideszi relációk pontosan az ekvivalenciarelációk. Az is megmutatható, hogy ha a lehetséges világoknak ezen ekvivalencióreláció W' osztályait tekintjük, akkor nincs szükség az S relációra a $\Box$ és $\Diamond$

definíciójánál, mert a szimmetria, reflexivitás és tranzitivitás miatt úgy tekinthetjük, hogy W' minden eleme minden elemmel relációban áll. Ekkor az igazságértékelés definíciójának (vi), illetve (vii) pontjai a következőképpen módosulnak:

(vi) $w \Vdash \Box\alpha$ akkor és csak akkor, ha minden $p \in W'$-re $p \Vdash \alpha$,

(vii) $w \Vdash \Diamond\alpha$ akkor és csak akkor, ha van olyan $p \in W'$, amelyre $p \Vdash \alpha$.

$S5$-ben (T) miatt $\Diamond\alpha$ és $\Box\Diamond\alpha$ ekvivalensek, és hasonlóan $\Box\alpha$ és $\Diamond\Box\alpha$ is ekvivalensek. Ez azt jelenti, hogy $S5$-ben nemcsak a „megkettőzött” modális operátorok helyettesíthetők egyetlen operátorral, hanem *bármely modális operátorsorozat helyettesíthető a legbelső operátorral.* Például a $\Box\Box\Diamond\alpha$ és a $\Diamond\alpha$ vagy a $\Diamond\Box\Diamond\Box\Box\alpha$ és a $\Box\alpha$ formulák ekvivalensek stb.

5.3.3 A modális logika alkalmazásairól és általánosításairól

1. A $\Box$ operátor néhány lehetséges értelmezése.

Csak a $\Box$ operátorról lesz most szó, mert tudjuk, hogy $\Diamond$ kifejezhető $\Box$-szal. Felsoroljuk $\Box$ néhány fontos értelmezését. Könnyű ellenőrizni, hogy az alaprendszer, azaz a K rendszer axiómái igaznak tekinthetők ezen értelmezések mellett. Elsősorban a (T), (4) és (5) tulajdonságok viselkedésére térünk ki.

a) Már érintettük a $\Box$ operátor klasszikus jelentését:

$\Box\alpha$ igaz, ha „α szükségszerűen igaz”.

A (T) tulajdonság nyilván igaznak tekinthető ilyen értelmezés mellett, hiszen ha α szükségszerűen igaz, akkor igaz is. Meggondolható viszont, hogy például a (4) vagy az (5) tulajdonságok már nem tekinthetők igaznak. Például (5) jelentése: „ha lehetséges, hogy α igaz, akkor szükségszerű az, hogy lehetséges, hogy α igaz”. Tehát a T rendszerrel még modellezhető $\Box$ fenti értelmezése, de $S5$-tel már nem.

b) $\Box\alpha$ következő lehetséges jelentése:

$\Box\alpha$ igaz, ha „tudom, hogy α igaz”,

vagy ennek egy változata:

$\Box\alpha$ igaz, ha „ismeretes, hogy α igaz”.

Ilyen értelmezés mellett (T) jelentése: „ha ismeretes, hogy α igaz, akkor igaz is”. (4) jelentése: „ha ismeretes, hogy α igaz, akkor ismeretes az, hogy ismeretes, hogy α igaz”. A (T) és (4) séma ilyen értelmezése igaznak tekinthető, viszont meggondolható, hogy (5) már nem.
$S5$-nél tehát tágabb logikai rendszerre van szükség $\Box$ mostani jelentésének modellezésére. Az $S4$ rendszer viszont túl általános e célra, meggondolható, hogy az alkalmas logikai rendszer a „kettő között” található (ezek az úgynevezett $S42$ és $S43$ rendszerek).

c) $\Box\alpha$ következő lehetséges jelentése:

$\Box\alpha$ igaz, ha „hiszem, hogy α igaz”.

Ekkor (T) jelentése: „ha hiszem azt, hogy α igaz, akkor igaz”. (4) jelentése: „ha hiszem, hogy α igaz, akkor hiszek abban, hogy hiszem, hogy α igaz”. (5) jelentése: „ha nem hiszek abban, hogy $\neg\alpha$ igaz, akkor hiszem, hogy nem hiszek abban, hogy $\neg\alpha$ igaz”. (T) nem, (4) és (5) értelmezései viszont igaznak tekinthetők.

d) $\Box\alpha$ következő lehetséges jelentése:

$\Box\alpha$ igaz, ha „α igaz most, és mindig igaz lesz a jövőben”.

(T) triviálisan igaz ezen értelmezés mellett. Igaznak tekinthető (4) is, azonban (5) már nem. Belátható, hogy az ezen értelmezéshez adekvát rendszer, csakúgy, mint a második esetben, $S4$ és $S5$ „között” van (ez az úgynevezett $S3$ rendszer).
A mostani értelmezés már kezdeménye a modális logika egy fontos általánosításának, a temporális (idő-) logikának. Hiányossága, hogy segítségével csak a jövőről tudunk beszélni, a múltról nem.

e) Tekintsünk egy nemdeterminisztikus számítógépes programot, Γ-t. Legyen α a programfutás valamely tulajdonsága. $\Box\alpha$ egy következő lehetséges jelentése:

$\Box\alpha$ igaz, ha „α igaz a Γ program *minden* futása után”.

Ekkor $\Diamond$ értelmezése:

$\Diamond\alpha$ igaz, ha „α igaz a Γ program *valamely* futása után”.

Ez az értelmezés jelentős a számítástudományban, a dinamikus logika, valamint más általánosítások alapját képezi.

Közelítsük meg ezt az értelmezést a szemantika oldaláról:
Egy frame-ben a lehetséges világok legyenek a gép lehetséges állapotai. Az S alternatívareláció értelmezése: sSp legyen igaz, ha a Γ programnak van olyan futása, amely s állapotban kezdődött el, és a p állapotban fejeződik be.
Ilyen értelmezés mellett $\Box\alpha$ igaz az s állapotban, ha α igaz minden olyan p állapotban, amelyben az s-ben kezdődő program befejeződik.

2. A modális logika általánosításairól.

- *Multimodális logikák*

E logikáknál megengedett több $\Box$ operátor felvétele a nyelvben, jelölésük: $\Box_i$, $i \in I$. Ezeknek megfelel több $\Diamond$ operátor, jelölésük: $\Diamond_i$, $i \in I$. $\Box_i$ és $\Diamond_i$ között a kapcsolat most is $\Diamond_i\alpha \leftrightarrow \neg\Box_i\neg\alpha$ érvényessége.
E logikák szemantikája hasonlóan definiálható, mint a közönséges modális logika szemantikája, annak figyelembe vételével, hogy egy-egy frame-en minden i-re az S_i alternatívarelációk külön külön adottak.
Fontos multimodális logika a *temporális logika*. Itt két $\Box$ típusú operátor létezik, az F (future vagy jövő) operátor és a P (past vagy múlt) operátor.

Másik fontos multimodális logika a *dinamikus logika*, ahol programok egy Γ_i $(i \in I)$ összességére definiáljuk a $\Box_i$ (illetve $\Diamond_i$) operátorokat, amelyek, rendre az i-edik programra, Γ_i-re vonatkoznak. Ekkor például $\Box_i\alpha$ jelentése: „α igaz a Γ_i program futása után”.
A multimodális logikák egyik alkalmazása a tudásreprezentáció. Adott a „szereplők” egy I halmaza. $\Box_i\alpha$ lehetséges jelentése: „az i-edik szereplő tudomása szerint α igaz”, vagy ennek egy változata: „az i-edik szereplő azt hiszi, hogy α igaz”.

- *Elsőrendű modális logikák*

Az alábbiakban csupán rámutatunk azokra a lehetőségekre, amelyek szerint a modális állításlogika modális elsőrendű logikává bővíthető.
Az elsőrendű logika nyelvét bővítjük a $\Box$ és $\Diamond$ jelekkel. Az egyszerűség kedvéért kikötjük, hogy a nyelv nem tartalmaz függvényszimbólumot, de tartalmaz legalább egy individuumkonstanst.
A frame fogalmát úgy módosíthatjuk, hogy $\mathcal{C}(p)$ egy elsőrendű klasszikus *struktúra* minden $p \in W$-re, jelölje $C(p)$ a $\mathcal{C}(p)$ struktúra alaphalmazát.
Modális elsőrendű esetben *több megközelítés* is létezik a formulák és termek interpretációjára az egyes világokban, ezért a frame-en vett igazság definíciójára is. Főleg a termek interpretációjának definíciója kritikus: kiköthetjük, hogy a termek (például a változók, konstansok stb.) interpretációi *essenek egybe az olyan világokban, amelyek egymásból elérhetők*. Ezért ha pSq fennáll, akkor a nyelvi konstansok interpretációja a p-hez és q-hoz tartozó univerzumokon megegyezik, továbbá szokás feltenni azt, hogy $C(p) \subseteq C(q)$ teljesüljön. A kvantorok értelmezése nyilván szorosan összefügg az individuumváltozók interpretációjával.
A modális elsőrendű *levezetési rendszer* definíciójánál egy klasszikus elsőrendű levezetési rendszerből kell kiindulni, ezt egészítjük ki a K axiómasémával és a szükségességi levezetési szabállyal. Megfelelően bővítve a rendszert, eljutunk a (T), $(S4)$, $(S5)$ stb. rendszerek elsőrendű változataihoz. E logikákra ugyanúgy léteznek teljességi tételek, mint a különféle modális állításlogikákra (lásd az előző részt).

6. FEJEZET

LOGIKA ÉS A MATEMATIKA EGYÉB TERÜLETEI

E fejezetben a matematikai logika és a matematika egyéb területeinek kapcsolataival foglalkozunk.

Hagyományosnak tekinthető a logika kapcsolata az algebrával és a halmazelmélettel. A modern logika tulajdonképpen *algebrai* formában jött létre, és állíthatjuk, hogy az algebra-logika kapcsolat egy igen mély és fontos vonulat a matematikában, mindkét diszciplina megtermékenyítően hatott egymásra. *Halmazelmélet* és logika mindig szorosan összefonódtak. Főleg azzal foglalkozunk majd, hogy milyen szerepet tölt be a logika a halmazelmélet alapjainál.

A logika *újabb keletű* alkalmazásait találjuk meg a bonyolultságelméletben és az analízisben. A *bonyolultságelmélet* számos kérdése lefordítható logikára, és vizsgálható mint logikai probléma. Ilyen például számos probléma besorolása a nevezetes bonyolultsági osztályokba. Az *analízisben* a logikai szemlélet és a pontos fogalomalkotás tette lehetővé, hogy precíz alapok jöhessenek létre az infinitezimális mennyiségek kezelésére. Az ezen alapokra épülő elméletet *nemstandard analízisnek* nevezzük.

Hely hiányában nem tudunk egyéb olyan matematikai kapcsolatokat részletezni, amelyeknél a logika szerepet játszik, ilyenek például a kapcsolatok a kombinatorikával vagy a valószínűségszámítással.

6.1 Algebrai logika

Az első jelentős lépéseket a logika matematizálásában a 19. században Boole, de Morgan, Peirce tették meg azzal, hogy algebrai fogalmakkal modelleztek logikai fogalmakat, a logikai műveleteket ($\vee$, $\wedge$, $\neg$) algebrai műveletekkel ($+$, $\cdot$, $-$), a logikai szemantikát halmazalgebrákkal modellezték (tudjuk, hogy szigorú értelemben matematikai logikáról csak a 19. század végétől, Frege, majd Hilbert és mások tevékenysége óta beszélhetünk). Az algebra és logika kapcsolatának kutatása az 1930-as években ismét lendületet kapott Tarski, Henkin és követőik hatására, ez a lendület napjainkig is tart. A matematikának az a területe, amelyik az algebra és logika kapcsolatának kutatásával, kiaknázásával foglalkozik, az *algebrai logika*. Már a 4.4 rész témaköre, a karakterizációs tételek, is tekinthető e témakörhöz tartozónak.

Jelen részben tehát az algebra-logika kapcsolatrendszert kívánjuk tanulmányozni (részletesebben az állításlogika és a Boole-algebrák kapcsolatán keresztül). Tárgyalásunk során elsősorban a következő szempontok érvényesülnek:

- Először csak a logikai *szemantikát tekintjük*, és keressük „algebraizációit”, tehát a szemantikára jellemző algebrai konstrukciókat. Majd ugyanezt végiggondoljuk a *bizonyításelmélet* esetére is. Ezt követően vizsgáljuk a kétfajta, a szemantikára, illetve a bizonyításelméletre építő algebraizációk *kapcsolatát*.
- Vizsgálni fogjuk, hogy a szóban forgó „algebraizációk” hogyan írhatók le *logikai* eszközökkel, illetve *csak algebrai* eszközökkel.
- Fordítva, a logika helyett *kiindulhatunk az algebrából* is, azaz tisztán olyan algebrai fogalmakból, amelyekhez egy logika rendelhető (azonban a „logikától az algebráig” iránnyal foglalkozunk elsősorban, és csak kitekintünk e fordított irányra).

Használjuk majd helyenként a *szabad algebra, hányadosalgebra* fogalmakat azok kedvéért, akik ismerik e fogalmakat. Azonban jelen rész e fogalmak ismerete nélkül is szinte hiánytalanul feldolgozható.

6.1.1 Az állításlogika és az algebra kapcsolatáról

Definiáljuk a halmazalgebra fogalmát. Legyen V tetszőleges halmaz.

1. Definíció. Egy
$$\mathcal{H} = \langle H, \cup, \cap, \sim_V, \emptyset, V\rangle$$
alakú struktúra *halmazalgebra* V egységgel és H alaphalmazzal, amennyiben H a V halmaz részhalmazainak olyan rendszere, amelyik zárt az $\cup$, $\cap$ és $\sim_V$ műveletekre, és tartalmazza az üres halmazt és V-t. $\mathcal{H}$ típusa tehát: $\langle 2,2,1,0,0;\rangle$ (jelölje e típust μ).

A halmazalgebrák speciális Boole-algebrák (lásd 4.1). Ha a definícióban megengedjük, hogy a V egység *osztály* is lehessen, akkor *osztályalgebráról* beszélünk.

Az *állításlogika* „algebraizációjának" kérdését először a *logikai* **szemantika** felől közelítjük. Rögzítsünk egy $\mathcal{L}$ állításnyelvet, amely a $\vee$, $\wedge$, $\neg$ műveleteket és tetszőleges sok állításkonstanst tartalmaz. Vegyünk fel egy tetszőleges, de rögzített Σ elméletet $\mathcal{L}$-en, ahol Σ-t a *szemantikán* keresztül tekintjük definiáltnak (lásd 2.2 rész 4. Definíció), és legyen az $\mathcal{L}$ típusú Σ-modellek összessége $\mathcal{K}$.

Jelölje $\|\varphi\|$ a φ formulát kielégítő Σ-modellek osztályát, tehát legyen
$$\|\varphi\| = \{\mathcal{A} \colon \mathcal{A} \vDash \Sigma \cup \{\varphi\}\}\,. \tag{1}$$
A $\|\varphi\|$-k tehát EC_Δ-beliek (lásd 4.4). Tekintsük a μ típusú algebrákat.

2. Tétel. A $\|\varphi\|$ osztályok *osztályalgebrát* alkotnak $\mathcal{K}$ egységgel (az algebra jelölése $\mathcal{E}^\Sigma$).

Bizonyítás. Könnyű ellenőrizni a következő, (2) tulajdonságokat, felhasználva a logikai műveletek definícióit:
$$\begin{aligned}
\|\varphi\| \cup \|\psi\| &= \|\varphi \vee \psi\|\\
\|\varphi\| \cap \|\psi\| &= \|\varphi \wedge \psi\|\\
\sim_{\mathcal{K}} \|\varphi\| &= \|\neg\varphi\|\\
\emptyset &= \|\varphi \wedge \neg\varphi\|\\
\mathcal{K} &= \|\varphi \vee \neg\varphi\|
\end{aligned} \tag{2}$$
Ezen tulajdonságokból és az (állítás-) formula definíciójából következik, hogy a $\|\varphi\|$ modellösszességek zártak az $\cup$, $\cap$, $\sim_{\mathcal{K}}$ műveletekre, és tartalmazzák a $\emptyset$ és $\mathcal{K}$ osztályokat, tehát a $\|\varphi\|$-k valóban osztályalgebrát alkotnak.

■

3. Definíció. Az adott $\mathcal{L}$ nyelv és a *szemantikán* keresztül definiált Σ *elmélethez tartozó állításlogika szemantikájának algebraizációján* értjük az $I(\mathcal{E}^\Sigma)$ algebraosztályt (ahol I izomorf lezárást jelöl).

Nyilván más-más algebraosztályt kapunk attól függően, hogy hogyan választjuk az $\mathcal{L}$ nyelvet (azaz állításkonstansainak halmazát), és $\mathcal{L}$-en a Σ elméletet.

4. Definíció. Az *állításlogika szemantikájának algebraizációján* értjük a lehetséges $I(\mathcal{E}^{\Sigma})$ osztályok unióját, minden lehetséges módon megválasztva az $\mathcal{L}$ állításnyelvet és a Σ elméletet.

A következő egy másik fontos megközelítése a szemantika algebraizációjának. Tekintsük az $\mathcal{L}$ *nyelv formuláin* a következő ekvivalenciarelációt:

$$\varphi \equiv \psi \text{ akkor és csak akkor, ha } \|\varphi\| = \|\psi\|, \tag{3}$$

ahol $\|\varphi\|$ jelentése ugyanaz, mint (1)-ben. Nyilvánvaló, hogy $\equiv$ valóban ekvivalenciareláció.

A $+$, $\cdot$, $-$ műveletek és a 0 és 1 konstansok definíciói a $\equiv$-re vett $\varphi/\equiv$ ekvivalenciaosztályokon legyenek a következők:

$$\begin{aligned} (\varphi/\equiv) + (\psi/\equiv) &= \|\varphi \vee \psi/\equiv\| \\ (\varphi/\equiv)\cdot(\psi/\equiv) &= \|\varphi \wedge \psi/\equiv\| \\ -(\varphi/\equiv) &= \|\neg\varphi/\equiv\| \\ 0 &= \|\varphi \wedge \neg\varphi/\equiv\| \\ 1 &= \|\varphi \vee \neg\varphi/\equiv\| \end{aligned} \tag{4}$$

Könnyű meggondolni, hogy e műveletek definíciói nem függenek az osztályokat definiáló formuláktól. Hiszen ha φ ekvivalens φ'-vel, és ψ a ψ'-vel $\equiv$ ra nézve, akkor $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\neg\varphi$ is ekvivalens rendre $\varphi' \vee \psi'$, $\varphi' \wedge \psi'$, $\neg\varphi'$-vel.
Jelölje az így nyert μ típusú algebrát $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$. Nyilvánvaló, hogy az $i(\varphi/\equiv) = \|\varphi\|$ egy izomorf leképezés, tehát $\mathcal{E}^{\Sigma}$ és $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$ izomorfak, így

$$\mathcal{E}^{\Sigma} \simeq \mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv} \tag{5}$$

következésképpen $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$ is egy Boole-algebra, mivel az $\mathcal{E}^{\Sigma}$ Boole-algebra izomorf képe. Ha $\Sigma = \emptyset$, az $\mathcal{E}^{\emptyset}_{\equiv}$ algebra egy úgynevezett *szabad Boole-algebra* (jelölje Fr), $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$ pedig éppen Fr *hányadosalgebrája* a Σ-hoz tartozó $\equiv$ ekvivalenciarelációra nézve.

A következőkben az állításlogika formulái *igazságértékelésének* fogalmát közelítjük meg az algebra szempontjából. Jelölje B_0 a kételemű Boole-algebrát. Legyen J egy rögzített, de tetszőleges állításinterpretáció (modell) és $\Sigma = \emptyset$.

5. Tétel. Minden konkrét J interpretációhoz tartozó igazságértékelésre a

$$h(\varphi/\equiv) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \varphi \text{ igaz } J\text{-nél} \\ 0, & \text{ha } \varphi \text{ hamis } J\text{-nél} \end{cases}$$

leképezés *Boole-homomorfizmus* Fr-ből B_0-ba.

Bizonyítás.
h definíciója egyértelmű, mivel nem függ a $\varphi/\equiv$ osztályt reprezentáló osztálytól. Hiszen ha $\varphi \equiv \psi$, akkor igazságértékeik az adott igazságértékelésre megegyeznek. Igazolandó a művelettartás.
Igazoljuk például, hogy $h((\varphi/\equiv) + (\psi/\equiv)) = h(\varphi/\equiv) +' h(\psi/\equiv)$, ahol $+'$ jelöli az összeadást B_0-ban.
Az Fr-beli $+$ definíciója szerint $h((\varphi/\equiv) + (\psi/\equiv)) = h(\varphi \vee \psi/\equiv)$. Azonban tudjuk, hogy a jobb oldal, tehát $\varphi \vee \psi$ igazságértéke csak φ és ψ igazságértékeitől függ, mégpedig ugyanúgy, ahogyan azt a $\vee$ igazságtáblája definiálja.
Vegyük észre, hogy ugyanez igaz a $h(\varphi/\equiv) +' h(\psi/\equiv)$ értékre is, hiszen $+'$ definíciója lényegében egybeesik az igazságértékek (igaz, hamis) közötti $\vee$ művelet definíciójával.
A művelettartás igazolása a többi esetben hasonló az előbbihez.

■

A tétel értelmében tehát egy adott interpretációhoz tartozó igazságértékelés felfogható úgy is, mint a formulákon (ekvivalenciaosztályaikon) értelmezett, a B_0 kételemű Boole-algebrába történő művelettartó leképezés. *A tételben foglaltak alkalmasak arra is, hogy magára az igazságértékelés fogalmára egy új, elegáns definíciót adhassunk:*
Az igazságértékelés egy olyan h leképezésként definiálható az állításformulák (ekvivalenciaosztályainak) halmazából B_0-ba, amelyre a következő igaz:

(i) Az atomi formulákon h értéke aszerint legyen 1 vagy 0, hogy az illető interpretáció által definiált igazságérték igaz vagy hamis,
(ii) Ha az α és β formulák $h\alpha$ és $h\beta$ igazságértékei már definiáltak, akkor a $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ formulák igazságértékei rendre legyenek a
$$-'h\alpha,\ h\alpha \cdot' h\beta,\ h\alpha +' h\beta,\ -'h\alpha +' h\beta$$
értékek, ahol $-'$, $\cdot'$, $+'$ rendre a B_0-beli Boole-műveleteket jelölik.

Ezután vázoljuk, hogy az állításlogika algebraizációja hogyan építhető fel a **bizonyításelmélet** felől közelítve. Az $\mathcal{L}$ állításnyelv legyen ugyanaz, mint eddig. Tételezzünk fel egy rögzített bizonyítási rendszert (például a Hilbert-félét) és egy rögzített Σ elméletet, amelyet ezen bizonyítási rendszeren keresztül definiálunk (lásd 3.1).

Jelölje $|\varphi|$ az $\mathcal{L}$ nyelv azon formuláit, amelyek ekvivalensek φ-vel Σ-ra nézve a felvett bizonyítási rendszer szerint, tehát:
$$|\varphi| = \{\psi : \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\} \tag{6}$$
Belátható, hogy $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ekvivalenciarelációt határoz meg a formulák összességén. Hasonlóan (4)-hez, definiáljuk a $|\varphi|$ osztályokon a $+$, $\cdot$, $-$ műveleteket és a 0 és 1 konstansokat a következőképpen:
$$|\varphi| + |\psi| = |\varphi \vee \psi|$$
$$|\varphi| \cdot |\psi| = |\varphi \wedge \psi|$$

$$-|\varphi| = |\neg\varphi| \tag{7}$$
$$0 = |\varphi \wedge \neg\varphi|$$
$$1 = |\varphi \vee \neg\varphi|$$

Most is könnyű meggondolni, hogy e definíciók, a Hilbert-kalkulus tulajdonságaiból következően, nem függenek a reprezentációs formulák választásától. Például a $+$ definíciójánál, ha $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ és $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, akkor $\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi')$, tehát $(\varphi \vee \psi)$ és $(\varphi' \vee \psi')$ egy osztályban vannak.

6. Tétel. A $|\varphi|$ ekvivalenciaosztályok μ *típusú algebrát* alkotnak a fenti $+, \cdot, -$ műveletekre és a 0 és 1 konstansokra nézve, és ez az algebra *Boole-algebra* (elnevezése: a Σ elmélethez tartozó Lindenbaum–Tarski-algebra, jelölése: $\mathcal{B}^{\Sigma}$).

A tétel egyszerű következménye lesz a 7. Tétel (ii)-nek. Vegyük észre, hogy $\mathcal{B}^{\Sigma}$, csakúgy, mint $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$, bizonyos formulaosztályok algebrái, röviden *formulaalgebrák*. Továbbá $\mathcal{B}^{\Sigma}$, csakúgy, mint $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$, a formulákon értelmezett valamely ekvivalenciarelación keresztül definiált.

Az adott $\mathcal{L}$ nyelv és az adott *bizonyítási rendszeren* keresztül definiált Σ *elmélethez tartozó állításlogika bizonyításelméletének algebraizációja* hasonlóan definiálható, mint a szemantikán keresztül definiált algebraizáció, jelen esetben mint az $I(\mathcal{B}^{\Sigma})$ *algebraosztály*. Hasonlóan a szemantika algebraizációjához, itt is más-más konkrét algebraosztályt kapunk attól függően, hogy hogyan választjuk az $\mathcal{L}$ nyelvet (azaz állításkonstansainak halmazát), és $\mathcal{L}$ formuláin a Σ elméletet. Most is definiálhatjuk az *állításlogika bizonyításelmélete algebraizációjának fogalmát, mint a lehetséges* $I(\mathcal{B}^{\Sigma})$ *algebraosztályok unióját*.

A következő tétel az állításlogika szemantikai és bizonyításelméleti algebraizációinak **kapcsolatára** vonatkozik:

7. Tétel.
(i) $\mathcal{E}^{\Sigma} \simeq \mathcal{B}^{\Sigma}$
(ii) $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv} = \mathcal{B}^{\Sigma}$

Bizonyítás. (i) következménye (ii)-nek és (5)-nek.

(ii) A (3)-ban és (6)-ban értelmezett ekvivalenciarelációk a Gödel-teljességi tétel miatt egybeesnek, ezért az $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$ és $\mathcal{B}^{\Sigma}$ algebrák alaphalmaza megegyezik. Igazolandó, hogy a műveletek és a konstansok is egybeesnek. Például az összeadásra igazolandó, hogy $|\varphi| + |\psi| = (\varphi/\equiv) + (\psi/\equiv)$.
Egyrészt $|\varphi| + |\psi| = |\varphi \vee \psi|$ (7) szerint. Másrészt $(\varphi/\equiv) + (\psi/\equiv) = \varphi \vee \psi/\equiv$.
Azonban $|\varphi \vee \psi| = \varphi \vee \psi/\equiv$, mivel, mint láttuk, $\mathcal{B}^{\Sigma}$ és $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$ alaphalmazai megegyeznek.
A többi művelet és a konstansok egybeesése teljesen hasonlóan igazolható.

■

A tétel (i) része azt állítja, hogy *rögzített* $\mathcal{L}$ *nyelv és* Σ *elmélet esetén* az állításlogika szemantikai és bizonyításelméleti úton definiált algebraizációi *izomorfak*. Ez az állítás az állításlogika teljességének felel meg. De nemcsak azt jelenti, hogy az állításlogikára *van* teljes kalkulus, hanem azt is, hogy *egy adott bizonyítási rendszer, nevezetesen a* $\mathcal{B}^{\Sigma}$*-t definiáló Hilbert-rendszer teljes* az állításlogika szemantikájára nézve.

A tételből következik, hogy **a szemantika és a bizonyításelmélet útján definiált algebraizációk egybeesnek, ezért beszélhetünk az állításlogika algebraizációjáról.** Ez utóbbinak további jellemzését tartalmazza a következő tétel:

8. Tétel. Az állításlogika szemantikájának algebraizációjára igazak a következő jellemzések:

az algebraizáció izomorfia erejéig egybeesik

(i) a Boole *halmazalgebrák* osztályával,

(ii) a *Boole-algebrák* osztályával,

(iii) a szabad Boole-algebrák lehetséges *hányadosalgebráinak* osztályával.

A tételt nem bizonyítjuk. Az állítás két nevezetes algebrai tételt is magában foglal: az (i) és (iii) állítások ekvivalenciája a Boole-algebrák elméletének nevezetes tételéből, a *Stone-tételből* következik (Stone-tétele szerint minden Boole-algebra izomorf valamely halmazalgebrával), (iii) és (iv) ekvivalenciája pedig szintén ismert algebrai tétel. (ii) nyilván következménye (iii)-nak.

Megmutatható, hogy az (i) jellemzés egy változatának tekinthető a következő: *az állításlogika algebraizációja izomorfia erejéig egybeesik kételemű Boole-algebrák valamely direkt szorzatának valamely részalgebrájával.*

(ii) tulajdonképpen az állításlogika *teljességének* felel meg, hiszen azt állítja, hogy a szemantika algebraizációját le tudjuk írni véges sok azonossággal, a Boole-axiómákkal. Belátható, hogy az utóbbiak már „lefordíthatók” egy teljes állításkalkulussá.

Tehát absztraktabban és tisztán algebrailag, **az állításlogika teljességének egy algebrai reprezentáció tétel, a Stone tétel felel meg, tehát az, hogy a halmazalgebrák osztályának izomorf lezárja pontosan a Boole algebrák osztálya.**

Ezután néhány fontos általános kiegészítést teszünk az állításlogika algebraizációjához:

Az eddigi algebraizációkat összefoglalva, az adott állításlogikához szemantikai, illetve bizonyításelméleti úton rendelhető algebraizációk az $\mathcal{E}^{\Sigma}$, illetve $\mathcal{B}^{\Sigma}$ algebrák, illetve áttételesen, az ezekhez rendelhető $\mathcal{H}$ Boole halmazalgebrák és a szabad Boole-algebrák $\mathcal{B}$ hányadosalgebrái. E szóban forgó algebrák kölcsönösen izomorfak, tehát

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\Sigma} & \leftrightarrow & \mathcal{B}^{\Sigma} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{H} & \leftrightarrow & \mathcal{B} \end{array}}$$

A 8. Tétel állítása szerint ezen algebrák osztálya éppen a *Boole-algebrák* osztálya.

A logika és az algebra szoros kapcsolatát bizonyítja, hogy az állításlogika számos fogalmát, tételét lefordíthatjuk algebrai fogalmakra, tételekre. Ezt illusztrálja a következő (nem teljes) „szótár”:

ÁLLÍTÁSLOGIKA	BOOLE-ALGEBRÁK
$\vee$, $\wedge$, $\neg$	$+$, $\cdot$, $-$
$\leftrightarrow$	$=$
$\vdash$	$\leq$
levezethetőség, illetve cáfolhatóság	1, illetve 0
elmélet (komplett elmélet)	Boole-szűrő (ultraszűrő)
relativizálás egy Σ elméletre	Fr egy hányadosalgebrájának képzése
teljességi tétel	Stone reprezentáció tétel
formulák egy igazságértékelése modellen	Fr egy homomorf leképezése a kételemű algebrába

A táblázat kiegészíthető lenne egy Boole „halmazalgebra” oszloppal is, ahol például a $\vee$, $\wedge$, $\neg$ műveleteknek rendre az $\cup$, $\cap$, $\sim$ műveletek felelnének meg stb.

A Boole-algebrák *alkalmazhatóak* többek között az állításlogika *következményfogalmának vizsgálatára*. Ehhez először a szereplő állításokat Boole-algebrai kifejezésekkel formalizáljuk, kihasználva az állításműveletek és a Boole-műveletek közötti, a táblázatban is szereplő kapcsolatokat. Ezután alkalmazzuk a cáfolati rendszerek alapelvét, amelynek most az felel meg, hogy a premisszákhoz tartozó kifejezésekhez hozzávesszük a konklúziónak megfelelő kifejezés ellentettjét, és vizsgáljuk, hogy az utóbbi és az előbbi kifejezések szorzata kiadja-e a 0-t. Ha igen, akkor ez azt jelenti a logikában, hogy a következmény helyes, ha pedig nem nulla, akkor helytelen. Ezeket a vizsgálatokat elvégezhetjük halmazalgebrák, a halmazreprezentáció felhasználásával is.

Fordítva, a *logika is alkalmazható Boole-algebrai állítások bizonyítására*. Például Boole-algebrai *azonosságokat* lefordíthatunk állításlogikai ekvivalenciákra, és utóbbiakat bizonyíthatjuk a logikában. Másik módszer, hogy a szóban forgó azonosságot elegendő csak kételemű Boole-algebrákra igazolni, hiszen egy, a 8. Tételt követő megjegyzés értelmében minden Boole-algebra izomorf kételemű Boole-algebrák direkt szorzatának valamely részalgebrájával.

Példa. *Alkosson Boole-algebrai modellt a 3.3.1 pontbeli 4. Példában foglalt feladatra, és oldja meg e modell felhasználásával a feladatot!*

Modellezzék az a, b, c és d Boole-algebrai elemek rendre az „A' bűnös”, „B' bűnös”, „C' bűnös” és „D' bűnös” állításokat. Formalizáljuk Boole-algebrai kifejezésekkel először a premisszákat. Ezek:

$$\begin{aligned} &(-a)+b \\ &-b+(-c)+(-d) \\ &-(-d)+(a(-c)) \\ &-d+a \end{aligned} \tag{8}$$

A konklúzió formalizálása pedig: $ab(-c)$.

Ezután indirekt tegyük fel, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis, azaz vegyük az (8)-beli kifejezések szorzatát $-(ab(-c))$-vel. Megmutatjuk, hogy e szorzat 0, tehát

$$[(-a)+b][-b+(-c)+(-d)][-(-d)+(a(-c))][-d+a][-(ab(-c))]=0. \tag{9}$$

A harmadik tényezőt a disztributivitás segítségével így alakíthatjuk át: $-(-d)+(a(-c))=(d+a)(d+(-c))$, az utolsó tényezőt pedig szintén átalakíthatjuk: $-a+(-b)+c$.

Figyelembe véve az előbbi átalakításokat, a (9)-beli tényezőket ezután szorozzuk össze a következő sorrendben:

$[(d+a)][-d+a][(-a)+b][-a+(-b)+c][-b+(-c)+(-d)][d+(-c)]$

Szorozzuk össze a tényezőket balról jobbra, rendre páronként:

$[(d+a)][-d+a]=a$,

$a\,[(-a)+b]=ba$,

$ba\,[-a+(-b)+c]=bac$,

$bac\,[-b+(-c)+(-d)]=bac(-d)$,

$bac(-d)\,[d+(-c)]=0$ valóban.

A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy halmazreprezentációt használunk. Ekkor (9) helyett a következőt kell igazolnunk:

$$\begin{aligned} &[(\sim A)\cup B]\cap[(\sim B)\cup(\sim C)\cup(\sim D)]\cap[\sim(\sim D)\cup(A\cap(\sim C))]\cap \\ &\cap[\sim D\cup A]\cap[\sim(A\cap B\cap(\sim C))]=\emptyset \end{aligned}$$

6.1.2 Az algebra és az elsőrendű logika kapcsolatáról, kitekintés

1. Az elsőrendű logika és az algebra kapcsolatáról. Elsősorban a *különbségeket* szeretnénk kiemelni az állításlogika algebraizációjához képest. Olyan struktúrákkal dolgozunk (cilindrikus algebrák), amelyeknek típusa bővítése a Boole-algebrák típusának: tartalmazzák új unáris műveletek egy megszámlálható sorozatát is (jelölésük c_i, illetve C_i, $i\in\omega$) és konstansok kettősen indexezett megszámlálható sorozatát (jelölésük d_{ij}, illetve D_{ij}, $i,j\in\omega$). A cilindrikus algebrák speciális esetei az úgynevezett „operátoros Boole-algebráknak”. Jelöljük a cilindrikus algebrák típusát ν-vel.

Először a halmazalgebra (osztályalgebra) fogalmának megfelelő „cilindrikus algebrai” fogalmat, az úgynevezett *általánosított cilindrikus halmazalgebrákat* fogjuk definiálni, ezeken belül is először speciális esetüket, a *cilindrikus halmazalgebrákat*.

Legyen egy $\mathcal{H}$ halmazalgebra egységeleme $V = U^{\omega}$ alakú (ahol U^{ω} az U halmaz önmagával vett ω-szoros direkt szorzata).
Legyen

$$D_{ij} = \left\{\sigma \in V : \sigma_i = \sigma_j\right\} \tag{10}$$

(az ij-edik *diagonális elem*), ahol σ_i jelöli a $\sigma \in V$ sorozat i-edik tagját.
Definiáljunk V részhalmazain egy egyváltozós C_i műveletet (az i*-edik cilindrifikációt*) a következő módon:

$$C_i E = \left\{\sigma \in V : \sigma_u^i \in E \text{ valamely } u \in U\text{-ra}\right\}, \tag{11}$$

ahol E tetszőleges részhalmaza V-nek és σ_u^i-t úgy kapjuk σ-ból, hogy σ i-edik tagját u-ra cseréljük.

9. Definíció. A $V = U^{\omega}$ egységgel rendelkező

$$\mathcal{H} = \left\langle H,\ \cup\ ,\ \cap\ ,\ \sim_V\ ,\ \emptyset,\ V,\ C_i,\ D_{ij}\right\rangle_{i,j\,\in\omega} \tag{12}$$

struktúra egy *cilindrikus halmazalgebra*, ha a $\langle H,\ \cup\ ,\ \cap\ ,\ \sim_V\ ,\ \emptyset,\ V\rangle$ reduktum halmazalgebra, továbbá H tartalmazza a D_{ij} diagonális elemeket minden $i,j \in \omega$-ra, és H zárt a C_i cilindrifikációkra minden $i \in \omega$-ra.

A *cilindrikus halmazalgebrák* alaphalmazának elemei tehát sorozathalmazok annak megfelelően, hogy V egysége U^{ω} alakú (e halmazok tekinthetőek úgy, mint véges vagy végtelen argumentumú relációk; tehát a cilindrikus halmazalgebrák „relációk algebrái”, de nem azonosak az irodalomból ismert *reláció halmazalgebrákkal*).
Szemléletesen, cilindrikus halmazalgebrák esetén a D_{ij} halmazok szögfelező hipersíkokat ($x_i = x_j$) jelentenek az U^{ω} szorzathalmazon, míg egy E halmazra alkalmazott C_i operáció az i tengellyel párhuzamos „hengerhalmazképzést” jelent („cilinderhalmaz-képzést”). Tehát a C_i művelet egybeesik a halmazelméletből, topológiából, analízisből ismert *cilindrifikáció* műveletével. Előrebocsájtjuk, hogy a *logika* szempontjából a C_i művelet egy x_i, i-edik individuumváltozóra vonatkozó egzisztenciális kvantifikációval, a D_{ij} konstans pedig az $x_i = x_j$ egyenlőséggel kapcsolatos.

Ezután az általánosított cilindrikus halmazalgebrákat definiáljuk.
Legyen egy $\mathcal{H}$ halmazalgebra egységeleme $V = \bigcup_{k\in K} U_k^{\omega}$ alakú, ahol az U_k halmazok tetszőleges, nem üres diszjunkt halmazok, azaz $U_i \cap U_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, és U_k^{ω} az U_k halmaz önmagával vett ω-szoros direkt szorzatát jelöli (tehát U_k^{ω} elemei az U_k-ból vett végtelen elemű sorozatok).

Az *általánosított cilindrikus halmazalgebrákat* a cilindrikus halmazalgebrák definíciójának olyan módosításával kapjuk, hogy a V egység $V = \bigcup_{k\in K} U_k^{\omega}$ alakú. Ekkor, értelemszerűen, a C_i operátor módosítása a következő:

$$C_i E = \left\{\sigma \in V : \sigma_u^i \in E \text{ valamely } u \in U_k,\ k \in K\text{-ra}\right\}.$$

Az általánosított cilindrikus halmazalgebrák osztályát Gs_ω, a cilindrikus halmazalgebrák osztályát pedig Cs_ω jelöli.

Ezután a Boole-algebrákat általánosító *absztrakt* „cilindrikus” algebra osztályt, a *cilindrikus algebrák* osztályát definiáljuk.

10. Definíció. *Cilindrikus algebra* (másképpen megszámlálható dimenziójú cilindrikus algebra) egy olyan ν típusú

$$\mathcal{A} = \left\langle A,\ +\ ,\ \cdot,\ -\ ,0,\ 1,\ c_i,\ d_{ij} \right\rangle_{i,j\ \in\omega}$$

struktúra, ahol
az $\langle A,\ +\ ,\ \cdot,\ -\ ,0,\ 1\rangle$ reduktumról feltesszük, hogy Boole-algebra,
a $\langle c_i : i \in \omega \rangle$-k, rögzített i-re *egyváltozós műveletek* (az i-edik *cilindrifikációk*),
a $\left\langle d_{ij} : i, j \in \omega \right\rangle$-k, rögzített i-re és j-re *konstansok* (az ij-edik *diagonálisok*),
és feltesszük, hogy A zárt a c_i-kre is, tartalmazza a d_{ij}-ket, valamint a következő axiómák teljesülnek minden $i, j, k \in \omega$-ra, minden $x \in \Lambda$-ra:

(i) $c_i 0 = 0$
(ii) $x \leq c_i x$
(iii) $c_i(x \cdot c_i y) = c_i x \cdot c_i y$
(iv) $c_i c_j x = c_j c_i x$
(v) $d_{ii} = 1$
(vi) $d_{ik} = c_j(d_{ij} \cdot d_{jk})\ \ j \neq i, k$
(vii) $c_i(d_{ij} \cdot x) \cdot c_i(d_{ij} \cdot (-x)) = 0\ \ i \neq j$.

Tetszőleges $a \in A$-ra azon i-k halmazát, amelyekre a c_i „hat” a-ra, *a dimenzióhalmazának* hívjuk, és Δa-val jelöljük, tehát $\Delta a = \{i : c_i a \neq a\}$. Egy cilindrikus algebra *lokálisan véges dimenziós*, ha bármely a elemére Δa véges, tehát $c_i a = a$ véges sok $i \in \omega$ kivételével (azaz a-ra csak véges sok cilindrifikáció „hat”).
A cilindrikus algebrák osztályát CA_ω-val, a lokálisan véges dimenziós cilindrikus algebrák osztályát pedig Lf_ω-val jelöljük.

A cilindrikus algebrák osztálya, hasonlóan a Boole-algebrákhoz, tehát valóban egy *axiómákkal definiált* absztrakt osztály, szemben például a 9. Definícióbeli cilindrikus halmazalgebrákkal, amelyek „*konkrét*” algebrák. Szemben a Boole-algebrákkal, a cilindrikus algebrák típusa és axiómarendszere is *végtelen*. Bár a cilindrikus axiómarendszer egy *véges sémával adott, e sémának megszámlálható sok példánya van*. Könnyű belátni, hogy a már tárgyalt Gs_ω és Cs_ω osztályok *részei* CA_ω-nak, tehát az általánosított cilindrikus halmazalgebrák, és a cilindrikus halmazalgebrák cilindrikus algebrák.

Vizsgáljuk ezután, hogyan algebraizálható az elsőrendű logika a **szemantikából** kiindulva. Legyen $\mathcal{S}$ egy szokásos elsőrendű nyelv, amely tartalmazza =-et, az egyszerűség kedvéért pedig feltesszük, hogy függvényjeleket nem tartalmaz (ez nem

jelenti majd az általánosság korlátozását). Σ legyen egy elmélet, amelyet tekintsünk szemantikailag definiáltnak.
Először azt mutatjuk meg, hogy ha $\mathcal{A}$ egy konkrét $\mathcal{S}$ típusú Σ-modell, akkor az $\mathcal{A}$-n tekintett *igazsághalmazok* (lásd 2.1.3) cilindrikus *halmazalgebrát* alkotnak.
Emlékeztetünk a $[\varphi]$ igazsághalmazokra vonatkozó következő, (13) összefüggésekre (lásd 2.1.3 rész):

$$\begin{aligned} \sim[\varphi] &= [\neg\varphi] \\ [\varphi] \cap [\psi] &= [\varphi \wedge \psi] \\ [\varphi] \cup [\psi] &= [\varphi \vee \psi], \end{aligned} \tag{13}$$

ahol φ és ψ az $\mathcal{S}$ nyelv tetszőleges formulái.

Ezen összefüggések *kiegészíthetők* a következőkkel. Legyen U a Σ formulahalmaz $\mathcal{A}$ modelljének alaphalmaza, és $V = U^{\omega}$.

Ekkor

$$D_{ij} = \left[x_i = x_j\right],$$

és (14)

$$C_i[\varphi] = [\exists x_i \varphi] \qquad (i, j \in \omega),$$

ahol D_{ij} és C_i értelmezése ugyanaz, mint (10)-ben, illetve (11)-ben, $[\alpha]$ pedig $\mathcal{A}$-beli igazsághalmazt jelöl.

$D_{ij} = \left[x_i = x_j\right]$ azonnal következik D_{ij} definíciójából. $C_i[\varphi] = [\exists x_i \varphi]$, azaz kissé részletesebb jelöléssel $C_i[\varphi(x_i)] = [\exists x_i \varphi(x_i)]$ igazolása: $\sigma \in C_i[\varphi(x_i)]$ akkor és csak akkor, ha $\sigma_u^i \in [\varphi(x_i)]$ valamely $u \in U$-ra akkor és csak akkor, ha $\sigma \in [\exists x_i \varphi(x_i)]$.

11. Tétel. A nyelv φ formuláinak tetszőleges $\mathcal{A}$ modellre vonatkozó $[\varphi]$ igazsághalmazai egy $\widetilde{\mathcal{A}}$ *cilindrikus halmazalgebrát* alkotnak, amelyik lokálisan véges dimenziós, és amelynek $V = U^{\omega}$ az egysége, ahol U az $\mathcal{A}$ modell univerzuma.

Bizonyítás.
Az igazsághalmazok részhalmazai az U^{ω} halmaznak, továbbá az igazsághalmazok rendszere zárt az $\cup$, $\cap$, $\sim_V$, $\emptyset$, C_i, D_{ij} $(i, j \in \omega)$ műveletekre, illetve konstansokra (13) és (14) miatt. Ezért az igazsághalmazok valóban egy $\widetilde{\mathcal{A}}$ cilindrikus halmazalgebrát alkotnak. (14)-ből és a formula fogalmából következik, hogy $\widetilde{\mathcal{A}}$ lokálisan véges dimenziós.

∎

Tekintsük ezután az $\mathcal{S}$ típusú elsőrendű Σ-modellek egy olyan $\mathcal{K}'$ *halmazát*, hogy a $\mathcal{K}'$-beli modellek alaphalmazai, az U_k $(k \in K')$ halmazok páronként diszjunktak legyenek, és minden $\mathcal{S}$ típusú Σ-modellhez szerepeljen legalább egy vele *elemien ekvivalens* (reprezentáns) modell a kiválasztott modellek közül. Meggondolható, hogy ez megtehető.

Jelölje most $[\varphi]_k$ φ-nek az U_k ($k \in K'$) alaphalmazú modellen tekintett igazsághalmazát. Jelölje $[\varphi]'$ a $[\varphi]_k$-k unióját $k \in K'$-re (φ *általánosított igazsághalmaza*), tehát legyen

$$[\varphi]' = \bigcup_{k \in K'} [\varphi]_k \, .$$

Jelölje az $\bigcup_{k \in K'} U_k^{\omega}$ halmazt V. Könnyű meggondolni, hogy az általánosított igazsághalmazok is kielégítik a (13) és (14) összefüggéseket.

12. Tétel. A $[\varphi]'$ általánosított igazsághalmazok *általánosított cilindrikus halmazalgebrát* alkotnak, amely lokálisan véges dimenziós, és amelynek egysége $V = \bigcup_{k \in K'} U_k^{\omega}$ (jelölje ezen algebrát $\mathcal{E}^{\Sigma}$).

A bizonyítás hasonló a 11. Tétel bizonyításához.

Szorítkozzunk ezután olyan $\mathcal{E}^{\Sigma}$ algebrákra, amelyeket olyan páronként diszjunkt alaphalmazú $\mathcal{K}'$ modellösszességből származtatunk, amelyre igaz, hogy *minden* $\mathcal{S}$ típusú Σ-modellhez létezik $\mathcal{K}'$-ben vele *elemien ekvivalens* (reprezentáns) modell. Az állításesethez hasonlóan, definiálhatjuk az elsőrendű logikához, az S nyelvhez és Σ *elmélethez szemantikai úton hozzárendelhető algebraizációt*, mint az $I(\mathcal{E}^{\Sigma})$ osztályt, és általában, a szemantikai úton az *elsőrendű logikához hozzárendelhető algebraizációt*, mint az $I(\mathcal{E}^{\Sigma})$ osztályok unióját, minden lehetséges módon változtatva $\mathcal{S}$-et, Σ-t és a fenti tulajdonságú $\mathcal{E}^{\Sigma}$ algebrát.

Mivel $\varphi \equiv \psi$ akkor és csak akkor, ha φ és ψ általánosított igazsághalmazai megegyeznek, az állításesethez hasonlóan definiálható az ottani $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}$-nak megfelelő *formulaalgebra*, illetve a $\Sigma = \emptyset$ esetre az Fr szabad cilindrikus algebra. Az elsőrendű esetben is igaz, hogy $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv} \simeq \mathcal{E}^{\Sigma}$.

Legyen Σ elsőrendű formulák egy halmaza. Legyen $\mathcal{A}$ egy adott elsőrendű Σ-modell, és $\widetilde{\mathcal{A}}$ e modellnek a 11. Tétel szerint megfelelő cilindrikus halmazalgebra. Ekkor igaz az 5. Tételnek megfelelő állítás elsőrendű logikára:

13. Tétel. A $h(\varphi / \equiv) = [\varphi]$ leképezés (cilindrikus) *homomorfizmus* Fr-ről $\widetilde{\mathcal{A}}$-ba, ahol $[\varphi]$ a φ formula igazsághalmazát jelöli $\mathcal{A}$-n.

Bizonyítás.
A Boole-műveletek tartása következik (13)-ból, hiszen például

$$h((\varphi / \equiv) + (\psi / \equiv)) = h(\varphi \vee \psi / \equiv) = [\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi] = h(\varphi / \equiv) \cup h(\psi / \equiv).$$

A diagonál elemekre a következőt kapjuk: $h_k(x_i = x_j / \equiv) = \left[x_i = x_j\right] = D_{ij}$, az utóbbi összefüggés (14) miatt igaz, ahol D_{ij} jelöli $\widetilde{\mathcal{A}}$ diagonál elemét.
A cilindrifikáció tartása: $h(c_i(\varphi / \equiv)) = h(\exists x_i \varphi / \equiv) = [\exists x_i \varphi] = C_i[\varphi]$, utóbbi (14) miatt igaz, ahol C_i jelöli az i-edik cilindrifikációt az $\widetilde{\mathcal{A}}$ cilindrikus halmazalgebrában.

■

Hasonlóan az állítás esethez, elsőrendű esetben is igaz, hogy a 13. Tételbeli tulajdonság *alkalmas arra, hogy definiáljuk segítségével adott elsőrendű modellre a formulák h igazságértékelését* mint az Fr-ből $\widetilde{\mathcal{A}}$-ba képező $h(\varphi/\equiv)=[\varphi]$ összefüggést kielégítő, műveletartó leképezést (azaz homomorfizmust).

Ezután az elsőrendű logika algebraizációját a **bizonyításelmélet** oldaláról közelítjük. Tekintsük az $\mathcal{S}$ elsőrendű nyelvet. Rögzítsünk egy elsőrendű bizonyítási rendszert, például a Hilbert-kalkulust, és Σ legyen egy ezen keresztül definiált rögzített elmélet.

Az állítás esethez hasonlóan, $\mathcal{S}$-nek a Σ-ra nézve ekvivalens formulái ekvivalenciaosztályain definiálhatunk egy olyan algebrát, amelynek típusa megegyezik a cilindrikus algebrák típusával, ν-vel. A φ-vel a Hilbert-kalkulus szerint ekvivalens formulák osztályát most is jelölje $|\varphi|$. A Boole-műveletek definíciója legyen ugyanaz, mint az állításesetben, tehát (7), a c_i cilindrifikációk és a d_{ij} diagonál elemek definíciója pedig legyen

$$d_{ij}=\left|x_i=x_j\right| \qquad i,j\in\omega,$$

illetve (15)

$$c_i\,|\varphi|=|\exists x_i\varphi| \qquad i\in\omega.$$

Meggondolható, hogy a fenti definíció értelmes, és igaz a következő:

14. Tétel. A $|\varphi|$ ekvivalenciaosztályok ν *típusú algebrát* alkotnak a fent definiált $+$, $\cdot$, $-$, c_i műveletekre és a 0, 1, d_{ij} konstansokra nézve. Az így definiált algebra *cilindrikus algebra*, és lokálisan véges dimenziós (elnevezése: *a* Σ elmélethez tartozó *Lindenbaum–Tarski-algebra, jelölése* $\mathcal{B}^{\Sigma}$).

A bizonyításelméletből kiindulva ugyanúgy definiálhatjuk az elsőrendű logika algebraizációját, mint állítás esetben. Elsőrendű esetben is megfogalmazható a 7. Tétel megfelelője: $\mathcal{E}^{\Sigma}\simeq\mathcal{B}^{\Sigma}$, valamint $\mathcal{E}^{\Sigma}_{\equiv}=\mathcal{B}^{\Sigma}$. Ennek következménye, hogy a szemantikai és bizonyításelméleti úton definiált algebraizációk elsőrendű logikánál is *egybeesnek*.

A következő, a 8. Tételnek megfelelő tétel az elsőrendű logika algebraizációjának már *tisztán algebrai* jellemzését adja:

15. Tétel. Az elsőrendű logika algebraizációjára igazak a következő jellemzések:
az algebraizáció izomorfizmus erejéig egybeesik

(i) az Lf_{ω}-beli *általánosított cilindrikus halmazalgebrák* osztályával,
(ii) az Lf_{ω}-beli *cilindrikus algebrák* osztályával,
(iii) az Lf_{ω}-beli szabad cilindrikus algebrák lehetséges hányadosainak osztályával.

A tételt nem bizonyítjuk.

A legfontosabb eltérés az állításlogikához képest, hogy az **elsőrendű logika algebraizációja nem varietás**, azaz nem axiomatizálható elsőrendben azonosságokkal.

Ennek oka a „lokálisan véges dimenziós” feltétel, mely tulajdonság nem formalizálható ilyen alakú formulákkal.

Az elsőrendű algebraizációnál is érvényben marad az előző rész végén található, algebraizációkkal kapcsolatos reprezentációkat összefoglaló diagram. $\mathcal{B}^{\Sigma}$-t és $\mathcal{E}^{\Sigma}$-t már definiáltuk elsőrendű esetre, $\mathcal{B}$ egy lokálisan véges dimenziós szabad cilindrikus algebra hányadosalgebrája, $\mathcal{H}$ pedig általánosított cilindrikus halmazalgebra.

Az algebra–logika „szótár” is kiterjeszthető az elsőrendű logika esetére. Meggondolható, hogy például modellek *elemi ekvivalenciájának* a modellekhez rendelhető cilindrikus halmazalgebrák *izomorfiája* felel meg, vagy például az x_i/x_j helyettesítésnek egy a cilindrikus algebrán értelmezett s^i_j operátor felel meg bizonyos tulajdonságokkal stb.

Megjegyezzük, hogy az állításlogika algebraizációjának más lehetséges közvetlen, vagy közvetett megközelítései is léteznek. Ilyenek például a *kvázipoliadikus algebrák, az indexezett Boole algebrák* stb. Ezek a megközelítések azonban számos tekintetben egymással ekvivalensek. Érdekes új eredmény az, hogy ha az elsőrendű logika szemantikáját a Henkin féle szemantikával helyettesítjük, akkor az így nyert logikának már létezik elsőrendben véges séma (Stone típusú) algebraizációja.

2. Kitekintés. Nemcsak az állítás- és az elsőrendű logika, hanem más fontos logikák esetén is (például modális, többfajtájú, többértékű logikák stb.) definiálhatók algebraizációk (de nem minden logika esetére). Az adatbázis-elméletben, logikai programozásban központi szerepet játszó *relációalgebrákat* például az úgynevezett „nyíl logikák” algebraizációjaként kaphatjuk meg, vagy az úgynevezett „Heyting-algebrákat” az intuicionista logika algebraizációiként nyerhetjük.

Algebra és logika kölcsönösen megtermékenyítően hatnak egymásra. Ennek a hatásnak a mechanizmusa a következő:

- a logikai problémát (vagy tételt) „lefordítjuk” algebrai problémává,
- elvégezzük az algebrai elemzést,
- az elemzés eredményét „visszafordítjuk” a logikára vonatkozó állításokra.

Minderre láttunk példát az előző pont végén. Az algebrai elemzéshez szükséges algebrai apparátust, általában, az algebra ismert ága, az *univerzális algebra* szolgáltatja.

Mindeddig azzal foglalkoztunk e részben, hogyan rendelhetők egy-egy logikához algebraizációk. De fordítva is „közlekedhetünk”. *Kiindulhatunk az algebrából, és vizsgálható, hogy bizonyos algebrai konstrukciók mely logikáknak felelnek meg.* Ehhez az az észrevétel szolgál alapul, hogy egy-egy logikai *nyelvnek* egy „abszolút” szabad algebra, a modellekhez tartozó igazságértékeléseknek (*a szemantikának*) pedig a szabad algebrán értelmezett homomorfizmusok egy összessége feleltethető meg. logika *Logikán* itt nyelv és szemantika együttesét értjük.

Ami az algebrai logika *alkalmazásait* illeti, általában elmondható, hogy ahol a logika egyáltalán alkalmazható, ott alkalmazható az algebrai logika is, és fordítva.

Ilyen területek például a *programspecifikáció* (algebrai specifikáció) vagy az *adatbázis-elmélet (relációalgebrák)* stb. Az alábbiakban egy egyszerű, de fontos elméleti alkalmazást említünk, az alkalmazást a valószínűségszámításban.

Ismeretes, hogy *valószínűségi mező* egy $\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ hármas, ahol Ω egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{A}$ egy Ω alaphalmazú σ-halmazalgebra, és P valószínűségi mérték $\mathcal{A}$-n.
A hétköznapi életben, amikor valószínűségekről beszélünk, akkor *állításokhoz* rendelünk valószínűségértékeket. A valószínűségszámítás matematikai modelljében már *formalizált* állításokhoz rendelünk valószínűségértékeket. A valószínűségi mezőkben szereplő $\mathcal{A}$ **algebra elemei reprezentálják a formalizált állításokat, tehát a valószínűségi mérték értelmezési tartománya, az $\mathcal{A}$ struktúra magát az állításlogikát reprezentálja**, a jelen fejezetben már definiált értelemben. Tehát elmondhatjuk, hogy a *valószínűségszámítás állításlogikai apparátust használ*, pontosabban annak algebraizációját. Megjegyezzük, hogy $\mathcal{A}$ σ-zártsága logikai szempontból azt jelenti, hogy az ilyen algebráknak úgynevezett *infinit* (megszámlálható konjunkciót és diszjunkciót is megengedő) logika felel meg, ezt most nem részletezzük.
Felmerül az a kérdés, használ-e a valószínűségszámítás *elsőrendű logikát*? A sztochasztikus folyamatok elméletét említjük példaként, ahol igen fontosak az $X(t)$ realizációk bizonyos elsőrendű tulajdonságai, például

a monotonitás: $\forall t \forall s (t < s \rightarrow X(t) \leq X(s))$,

a korlátosság: $\exists s \forall t (X(t) \leq s)$,

a lépcsős függvény tulajdonság: $\exists s_1 \ldots \exists s_n \forall t (X(t) = s_1 \vee \ldots \vee X(t) = s_n)$,
$n = 1, 2, \ldots$ stb.

Nyilván fontos az is, hogy e tulajdonságokhoz valószínűségeket rendeljünk, kiterjesszük rájuk a szokásos valószínűségi mértéket. Megmutatható azonban, hogy azok a halmazok, amelyek például a fenti tulajdonságokat reprezentálják, *elsőrendű természetüknél fogva, nem tartoznak a hagyományos σ-algebrákhoz*, ezért a *mértékkiterjesztés elemi módszerei itt nem működnek*, a mértékkiterjesztés speciális módszereket igényel (lásd például Doob-szeparábilitási tételek). Kézenfekvő ezért a mértékkiterjesztésnél az *elsőrendű logika algebraizációit* használni.

Megjegyezzük, hogy a valószínűség fogalmával a logikának külön ága foglalkozik, a valószínűségi logika. A logikának ez a dinamikusan fejlődő ága a sztochasztikát egy speciális logikának, egy nemklasszikus logikának tekinti. A valószínűségi logika és a valószínűségszámítás ugyan egymásra visszavezethetőek, de különböző szemléletet igényelnek, vizsgálatuk tárgyát más-más oldalról közelítik. A valószínűségi logika részletezésére itt nem térünk ki.

6.2 Bonyolultságelmélet és logika

Ebben az alfejezetben feltételezünk egy kis jártasságot a bonyolultságelméletben. Feltételezzük, hogy az Olvasó ismeri a „problémák egymásra visszavezethetőségének”, vagy „az egy adott probléma, adott osztályra vonatkozó teljességének” fogalmát, és ismer néhány nevezetes konkrét problémát (utazóügynök-, hátizsákprobléma stb.). Bár a bonyolultsági osztályok nyelvek osztályai, de mint az szokásos, (eldöntés-)problémák egy osztályának tekintjük őket. A jelen részben ismertetendők lényege, valamint a szereplő tételek bizonyítása azok számára is érthető lesz, akik csupán a bonyolultságelmélet alapfogalmait ismerik.
A logika kapcsolata akár az algoritmuselmélettel, akár az automataelmélettel hagyományosnak mondható (például ismeretesek a logika nemteljességi tételeinek és eldönthetetlenségi tételeinek bizonyításai a Turing-gép fogalmának felhasználásával). E részben, a címnek megfelelően, *a logika és a bonyolultságelmélet kapcsolatára* szeretnénk felhívni a figyelmet. Megemlítjük majd e kapcsolat olyan alkalmazásait, mint a bizonyítási rendszerek hatékonyságának vizsgálata vagy az algoritmusok működésének sztochasztikus analízise, e kérdésköröket azonban nem részletezzük. Viszont szeretnénk súlyt helyezni arra, hogy létezik egyfajta *fordítás* bonyolultságelméletről logikára, és viszont. E kapcsolat sokban hasonlít a már tárgyalt logika-algebra kapcsolatra.

A tárgyalandó eredmények két típusba sorolhatók:

(i) Adott bonyolultsági osztályhoz olyan *$\mathcal{S}$ formális nyelv és ezen Σ formulaosztály megadása*, hogy a bonyolultsági osztályhoz tartozó minden problémához legyen olyan formula Σ-ban, amely *formalizálása* az adott problémának (vagy vele ekvivalens problémának) az $\mathcal{S}$ nyelven, és fordítva, a Σ-beli formulákhoz tartozó problémák az adott bonyolultsági osztályhoz tartozzanak.

(ii) Olyan konkrét, *matematikai logikai tárgyú problémák, amelyek teljesek* egy ismert bonyolultsági osztályra nézve.

Az (i) és (ii) típusú problémák közül a (ii) típusúak már klasszikusaknak tekinthetők. Az (i) típusúak a logika és a bonyolultségelmélet szoros kapcsolatára mutatnak rá azzal, hogy közvetlen, szemléletes és átfogó jellemzést adnak bonyolultsági osztályokra. Ezen utóbbi eredmények több szempontból is figyelemre méltók:

- Már egy probléma *formalizálása* is választ adhat a probléma bonyolultsági osztályba sorolására, segít áttekinteni a problémát.
- Az $\mathcal{S}$ nyelv egy magasabb rendű *programozási nyelvként* szolgálhat a szóban forgó probléma kezelésére. Sőt ez meg is fordítható, kiindulhatunk egy *programozási*

nyelvből (például DATALOG és változatai), és vizsgálható az, hogy milyen *logikai* nyelv, és milyen bonyolultsági osztály felel meg ezen nyelvnek.

- Bonyolultságelméleti fogalmak, tételek, sejtések *átfogalmazhatók* logikaiakká, vizsgálhatók a logikában, és fordítva. Például bonyolultsági osztályok különbözősége (PSPACE $\neq$ LOGSPACE), vagy esetleges egybeesése (**P** = **NP**), átfogalmazható logikai nyelvek különbözőségének vagy egybeesésének problémájára.

Az általunk ismertetett eredmények elsősorban a bonyolultságelmélet két legfontosabb osztályához kapcsolódnak (ezen eredményekkel már érzékeltetni lehet jelen alfejezet fő mondanivalóját, de más bonyolultsági osztályokra is nyerhetők hasonló tételek):
Az egyik a **P** osztály, azaz a *determinisztikus* Turing-gépekkel polinom-időben eldönthető problémák osztálya, idetartozik például a gráfelméleti elérhetőség vagy a párosítás problémája stb. Be fogjuk bizonyítani, hogy idetartozik a logika HORNSAT-*problémája* is, azaz az *állításlogika véges sok Horn-klóza kielégíthetőségének problémája* (az utóbbival már találkoztunk az SLD-rezolúciónál).
A másik osztály az **NP** osztály, azaz a *nemdeterminisztikus* Turing-gépekkel polinom-időben eldönthető problémák osztálya, ilyen például a hátizsákprobléma, a gráfok 3 színezés problémája stb. Látni fogjuk, hogy idetartozik a logika SAT-*problémája is*, vagyis az a probléma, hogy az *állításlogika egy adott konjunktív normálformájú formulája kielégíthető-e*.

A bonyolultságelmélet egyik legfontosabb nyitott problémája a **P**$\neq$**NP** sejtés. E sejtés igazságát előlegezni szokták, mi is ezt fogjuk tenni, tehát **P**-t és **NP**-t különböző osztályoknak fogjuk tekinteni.

Előrebocsájtjuk, hogy az elsőrendű logika nyelve túlságosan korlátozott ahhoz, hogy bonyolultabb gépek, automaták működését segítségével le tudjuk írni, ehhez legalább valamely másodrendű nyelvre, vagy valamely speciális nemklasszikus logikára van szükség. Elsőrendű nyelvvel például nem tudjuk megragadni a *rekurzió* fogalmát (az elsőrendű logika egy alacsony bonyolultsági osztálynak, az AC^0 osztálynak felel meg, amely egy logikai áramkörökkel kapcsolatos problémaosztály). Sokatmondó például az az automataelmélet és a logika kapcsolatánál központi szerepet játszó tétel, hogy *a véges automaták által „felismerhető" nyelvek pontosan azok, amelyek (monadikus) másodrendű nyelveken „definiálhatók"*. Tehát a másodrendű nyelvek már alkalmasak arra, hogy alapnyelvnek válasszuk őket a bonyolultságelméleti vizsgálatok során.

Megjegyezzük, hogy jelen részben nyilván *véges* struktúrákról kell gondolkoznunk. Nem jelenti majd az általánosság megszorítását, ha véges *gráfokban* gondolkozunk, és a gráfelmélet nyelvét választjuk alapnyelvnek.

6.2.1 Bonyolultsági osztályok jellemzése formalizálással

Ebben a részben a fent említett (i) típusú kapcsolattal foglalkozunk. Legyen $\mathcal{S}$ a gráfelmélet olyan másodrendű nyelve, amely egyetlen kétargumentumú *relációkonstanst* tartalmaz, E-t („összekötve lenni” reláció), valamint minden n-re tartalmaz n argumentumú *relációváltozót*.

1. Definíció. $\exists P\psi$ egy *egzisztenciális másodrendű formula*, ha P relációváltozó, és ψ-ben P-t relációkonstansnak tekintve, az így nyert ψ' formula elsőrendű formula (utóbbi tartalmazhat szabad individuumváltozókat is).

Σ legyen S egzisztenciális másodrendű formuláinak halmaza.

2. Definíció. Egy adott $\varphi \in \Sigma$ formulára azt a problémát, hogy

$$G \vDash \varphi^{\sigma} \tag{1}$$

mely σ individuumváltozó értékelésére teljesül rögzített véges G gráfra (mint $\mathcal{S}$ típusú modellre) és σ adott individuumváltozó-értékelésre, φ *gráfproblémának* nevezzük (φ-t itt gráftulajdonságnak nevezzük).

Fontos gráftulajdonságok leírhatók *elsőrendű* nyelven: például egy G gráf szimmetrikus vagy tranzitív, vagy függvényt reprezentál. Ez utóbbi formalizálása például:

$$\forall x \exists y Exy \wedge \forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Exz) \rightarrow y = z)$$

Bizonyítható, hogy fontos gráftulajdonságok viszont csak *másodrendű* nyelven írhatók le. Ilyen például az *elérhetetlenség* (egy G gráf x csúcsából nem létezik irányított út y-ba). Ultraszorzat segítségével igazolható, hogy e tulajdonság elsőrendben nem írható le. De leírható a a következő $\varphi(x, y)$ egzisztenciális másodrendű formulával:

$$\exists P(\forall u \forall v \forall w (Puu \wedge (Euv \rightarrow Puv) \wedge (Puv \wedge Pvw \rightarrow Puw) \wedge \neg Pxy)) \tag{2}$$

(azaz létezik gráf, amelyik részgráfként tartalmazza G-t, reflexív, tranzitív és a gráfban nem vezet él x-ből y-ba).
Csak másodrendű nyelven fogalmazható meg tehát az *elérhetőségprobléma.* Továbbá a Hamilton-kör probléma is, vagyis az a probléma, hogy egy adott gráf tartalmaz-e Hamilton-kört (Hamilton-kör az olyan út, amelyik minden csúcsot pontosan egyszer érinti).

3. Tétel. (Fagin-tétel.) **NP** pontosan azon problémák összessége, amelyek *visszavezethetőek* valamely egzisztenciális másodrendű formulával leírható φ gráfproblémára, ez utóbbi problémák maguk is **NP**-beliek.

Bizonyítás. A tételnek a könnyebbik részét bizonyítjuk, tehát azt, hogy ha $\exists P\psi$ adott egzisztenciális másodrendű formulája $\mathcal{S}$-nek, akkor a $\exists P\psi$ gráfprobléma **NP**-ben van.

Egy *nemdeterminisztikus* Turing-gép, bármely G gráfhoz és σ értékeléshez, meg tudja találni polinom-időben P-nek azt a G-beli P^G értékét (azt a relációt), amelyre ψ^σ egyáltalán igaz lehet G-ben.

Tekintsük most P-t *relációkonstansnak*. Elegendő megmutatni a következőt: Ha ψ' az S nyelv tetszőleges elsőrendű formulája, akkor a ψ' gráfprobléma **P** -ben van.

Legyen G rögzített, n csúccsal rendelkező gráf. Formulaindukcióval megmutatjuk a következő (3) állítást:

$|\varphi'|^\sigma$ értékelései *polinom-időben meghatározhatók.* (3)

Ha ψ' atomi formula, akkor (3) nyilván igaz, hiszen atomi formula lehet $Px_1 \dots x_s$, illetve Exy és $x = y$ alakú. $x = y$-t közvetlenül tudjuk ellenőrizni, $Px_1 \dots x_s$-et pedig n^s idő alatt, vagyis legfeljebb annyi idő alatt, amennyi P interpretációjának elemszáma. Exy ellenőrzéséhez nyilván elegendő n^2 idő.

Ha ψ' $\alpha \vee \beta$ alakú, ahol α-ra és β-ra igaz (3), akkor megvizsgálva α és β igazságát, csak eggyel több lépés szükséges ahhoz, hogy el tudjuk dönteni, igaz-e $\alpha \vee \beta$. Hasonló a helyzet $\alpha \wedge \beta$-val is. Ha ψ $\neg\alpha$ alakú, ahol α-ra igaz (3), akkor megvizsgáljuk α igazságát, és ψ' akkor lesz igaz, ha α hamis, és fordítva.

Végül, ha ψ' $\forall x\alpha$ alakú, ahol α-ra igaz (3), akkor először vizsgáljuk meg α igazságát minden σ értékelésre. Ha α m szabad változós, akkor n^m individuumváltozó-értékelés lehetséges. Mivel feltevés szerint α igazsága valamennyi értékelésre polinom-időben kiszámítható, így $\forall x\alpha$-é is. Ezért polinom-időben dönteni tudunk $\forall x\alpha$ igazságáról.

■

Tudjuk, hogy **P** része **NP**-nek. Felvetődik a kérdés, hogyan adható meg a **P**-beli problémáknak egy (i) típusú jellemzése az **NP** osztályon belül. Például ismert, hogy a (2) elérhetetlenségprobléma **P**-beli, míg például a Hamilton-kör problémája **NP**-beli. Arra keresünk választ, hogy kiolvasható-e, és ha igen, akkor hogyan a formulák szerkezetéből az, hogy a probléma milyen osztályhoz tartozik.

4. Definíció. Egy $\exists P\psi$ másodrendű egzisztenciális formuláról akkor mondjuk, hogy *egzisztenciális másodrendű Horn-formula*, ha P-t ψ-ben konstans relációjelnek tekintve, és a nyert formulát ψ'-vel jelölve, ψ' elsőrendű erős Skolem-alakú, továbbá ψ' magjának konjunkciós klózai legfeljebb egy darab olyan negálatlan literált tartalmaznak, amelyben szerepel a P relációjel.

A ψ'-ben szereplő klózok tehát nem feltétlenül Horn-klózok, hiszen bennük több (P-t nem tartalmazó) negálatlan literál is előfordulhat, de ha csak P-t tekintjük atomi formulának, akkor Horn-klózok.

Vegyük észre, hogy a (2)-beli formulából az implikációkat eliminálva egzisztenciális másodrendű Horn-formulát nyerünk, utóbbi magjának konjunkciós klózai:

$$Puu,\ \neg Euv \vee Puv,\ \neg Puv \vee \neg Pvw \vee Puw,\ \neg Pxy$$

(belátható, hogy a Hamilton-kört formalizáló mondat nem hozható egzisztenciális másodrendű Horn-alakra). Azt sejthetjük tehát, hogy igaz a Fagin-tétel olyan megfelelője, hogy a **P** osztály egzisztenciális másodrendű Horn-formulákkal jellemezhető. Ez azonban csak részben igaz. Mint az az alábbi tételből majd kiderül, az ilyen ψ formulákhoz tartozó ψ gráfproblémák valóban **P**-ben vannak, azonban ennek megfordítása már nem igaz, ugyanis mint az megmutatható, léteznek olyan **P**-beli problémák (például egy gráf párosságának problémája), amelyek nem írhatóak le ilyen formulákkal. Ennek az észrevételnek az elemzése vezet a következőkhöz:

Az $\mathcal{S}$ gráfelméleti nyelvet bővítsük tovább egy R bináris (konstans) relációjellel, a rendezés jelével, legyen az így nyert nyelv $\mathcal{L}$. A φ gráfprobléma definícióját úgy módosítjuk, hogy (1)-ben *rendezett* gráfokra szorítkozunk (azaz a csúcsokon adott egy rendezés, lásd 4.1.1), nevezzük ezt a problémát φ *rendezettgráf-problémának*.

Igaz a következő tétel:

5. Tétel. (i) Ha $\exists P\psi$ egzisztenciális másodrendű Horn-formula, akkor a $\exists P\psi$ gráfprobléma **P**-ben van.

(ii) **P** pontosan azon problémák összessége, amelyek *visszavezethetőek* valamely $\mathcal{L}$-beli egzisztenciális másodrendű Horn-formulával leírható φ rendezettgráf-problémára, feltételezve $\mathcal{L}$-ben axiómaként a rendezési tulajdonságot.

Bizonyítás. Csak az (i) részt igazoljuk.
Legyen G egy n csúcsú gráf. Ha ψ-nek m szabad változója van, akkor G-n n^m darab σ individuumváltozó-értékelés lehetséges, ezért elég megmutatni, hogy $\exists P\psi$ szabad változóinak minden rögzített σ értékelésére a $G \models \exists P\psi$ probléma polinomlépésszámban eldönthető. Rögzítsünk egy ilyen σ értékelést.

Megfontolásunk lényege az lesz, hogy a problémát visszavezetjük (az állításlogikabeli) HORNSAT-problémára, amelyről ismert, hogy **P**-ben van (ezt a következő, 6.2.2 részben bizonyítjuk jelen tételtől függetlenül). A visszavezetés algoritmusa a következő:

ψ erős Skolem-alakú, ezért univerzális formula, például k hosszúságú univerzális kvantorblokkal (azaz k darab kvantáltválozóval) és például p darab konjunkciós taggal. Az univerzális kvantorblokk bevihető a konjunkciós tagok elé. Tekintsük tehát a konjunkciós tagok univerzális lezártjaiból nyert formulahalmazt. Tekintsünk e formulahalmazból egy $\forall\alpha$ alakú formulát, ahol α klóz, és $\forall$ egy k hosszúságú univerzális kvantorblokkot jelöl. Mivel G véges modell, így $\forall\alpha$ igazsága ekvivalens az

$$\{\alpha^{\sigma_1}, \alpha^{\sigma_2}, \ldots \alpha^{\sigma_t}\} \tag{4}$$

igazságával, ahol $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_t$ az α-ban szereplő k darab kvantált individuumváltozó összes lehetséges értékelése G-n; ilyen értékelés nyilván $t = n^k$ darab van. Figyelembe véve ψ összes (p darab) konjunkciós klózát, összesen pn^k kiértékelt klóz van.
Ezután vegyünk szemügyre (4)-ből egy α^{σ_i} típusú helyettesítést. Az α klózban az E és a P nemlogikai jelek fordulhatnak elő, és az = jel, α^{σ_i}-ben pedig az ezekhez tartozó

literálok helyettesítései G elemeivel, pontosabban ezek „diszjunkciói”. Az E-hez és =-hez tartozó literálok igazságértéke közvetlenül megállapítható, míg a P-hez tartozóké nem, hiszen P *relációváltozó*. A következő esetek lehetségesek.

Ha α^{σ_i} valamelyik diszjunkciós tagja kiértékelhető (tehát nem tartalmazza P-t), és igaz σ_j-nél, akkor hagyjuk el (4)-ből α^{σ_i}-t, és térjünk át (4)-ben $\alpha^{\sigma_{i+1}}$ (vagy ψ következő konjunkciós tagjának) vizsgálatára. Ha α^{σ_i} valamelyik diszjunkciós tagja hamis, akkor hagyjuk el ezt a tagot, és térjünk át a következő diszjunkciós tag vizsgálatára. Ha egyik eset sem áll, tehát a diszjunkciós tag tartalmazza a P relációváltozót, akkor tartsuk meg ezt a tagot, és térjünk át a következő diszjunkciós tagra, vagy szintén $\alpha^{\sigma_{i+1}}$ (vagy ψ következő konjunkciós tagjának) vizsgálatára. Ha (4) valamely tagja kiértékelhető, és hamis valamely σ_i-nél, akkor az algoritmus befejeződik, és a problémára a válasz negatív. Az átalakítást addig folytatjuk, ameddig ψ magja összes klózát meg nem vizsgáltuk.

A szóban forgó átalakítás annyi (egyenként polinom-idejű) lépés, ahány α^{σ_i} alakú helyettesítés létezik, tehát pn^k, ahol most is p-vel jelöltük ψ konjunkciós klózainak a számát.

Ezután vegyük észre, hogy mivel a feltétel szerint, minden egyes α, a P relációt tekintve, Horn-klóz, az átalakítás eredményeként a P vagy $\neg P$ relációjeleket tartalmazó Horn-klózok egy véges összességét kapjuk, amennyiben a P^{σ_i}-ket állításkonstansoknak tekintjük egy G diagramjával kiegészített nyelvben. Összesen n^m ilyen lehetséges állításkonstans keletkezhet, amennyiben P m argumentumú.

Az átalakítás után tehát valóban egy HORNSAT-problémával állunk szemben, ahol legfeljebb pn^k darab Horn-formulánk, és n^m darab állításkonstansunk van.

■

- Megmutatható, hogy ha rendezett gráfokra szorítkozunk (tehát az $\mathcal{L}$ nyelvet használjuk, és feltételezzük a rendezés axiómáit), akkor a Fagin-tétel úgy élesíthető, hogy egzisztenciális másodrendű formulák helyett *monadikus* egzisztenciális másodrendű formulákra szorítkozhatunk, tehát $\exists P\psi$ helyett a formula $\exists P_1 \dots \exists P_k\psi$ alakú, ahol $P_1, \dots P_k$ monadikus relációváltozók.
- A rendezés használatát intuitíve többek között az indokolja, hogy gyakran szükség van az automatáknál *rendezett jelsorozatok* alkalmazására (például akkor, amikor az input jelei időben rendezhetők). Érdekes kérdés, hogy bonyolultsági osztályok logikai jellemzésénél milyen esetekben szükséges, és mikor hagyható el a rendezés.
- Szép jellemzések adhatók bizonyos bonyolultsági osztályokra, például a **P**, PSPACE, LOGSPACE, NLOGSPACE osztályokra, szintén *rendezett* gráfokra szorítkozva, de másodrendű logika helyett az úgynevezett fixpontlogikák segítségével. E vizsgálatokra itt nem térünk ki.

Érdekes bizonyításelméleti alkalmazása a bonyolultságelméletnek bizonyítási rendszerek *hatékonyságának* összevetése:

Akkor mondjuk, hogy *egy Σ bizonyítási rendszer hatékonyan szimulálja a Λ bizonyítási rendszert, ha van olyan p polinom, hogy az n hosszúságú Λ-beli bizonyítások szimulálhatók legfeljebb $p(n)$ hosszúságú Σ-beli bizonyításokkal. Egy Σ bizonyítási rendszer erősebb, mint a Λ bizonyítási rendszer, ha Σ hatékonyan szimulálja Λ-t, de fordítva nem.*

Az ilyen jellegű vizsgálatoknak fontos speciális esete, amikor az egyik bizonyítási rendszer *részrendszere* a másiknak (például a Davis–Putnam-rezolúciós eljárás része az általános rezolúciónak, és igazolható, hogy az általánost nem szimulálja hatékonyan).

6.2.2 Bonyolultsági osztályok jellemzései logikai tárgyú problémákkal

A következőkben a jelen alfejezet bevezetésében említett (ii) típusú kapcsolattal fogunk foglalkozni. Két, a **P** és **NP** osztályokkal és a logikával kapcsolatos, fontos teljességi tételt mondunk ki.

6. Tétel. A HORNSAT-probléma **P** teljes.

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy a HORNSAT-probléma **P**-ben van.

Tekintsük a kiindulásul vett Horn-klózok halmazát a következő alakban:

$$\left\{F_{1j} \wedge \ldots \wedge F_{m_j j} \to A_j\right\} \cup \left\{\neg B_{1k} \vee \ldots \vee \neg B_{l_k k}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots J, \;\; k = 1, 2, \ldots K \quad (5)$$

Az SLD-rezolúciónál (3.5 rész) szereplő (3.3)-beli klózhalmazzal szemben most *több* (K darab) „célklóz” alakú, azaz csak negált literálokat tartalmazó klózt is megengedünk. A (5)-beli implikációt tartalmazó formulákat, most is, mint az SLD-rezolúciónál, nevezzük tényklózoknak, ha $\to A_j$ alakúak, egyébként pedig *programoknak vagy programformuláknak*, a többi formulát pedig *nevezzük célklózoknak*.

Nyilván egy célklóz akkor igaz az állításkonstansok egy adott h értékelésére, ha van legalább egy olyan B_{tk} a klózban, amelyik hamis. A célklózok szempontjából tehát az összes tény- és programklózt kielégítő azon h értékelések az érdekesek, amelyek minimálisak abban az értelemben, hogy ha csak lehet, az állítás konstansok értéke hamis, azaz *együttvéve minimális számú „igaz” értéket tartalmaznak az állításkonstansokra nézve*, feltéve, hogy *van* egyáltalán ilyen „minimum tulajdonságú” h értékelés (ezután már csak ellenőrizni kell a célklózok kielégülését ezen értékelésre, ami szintén polinom-időt vesz igénybe). A következőkben megmutatjuk, hogy van ilyen h értékelés, sőt polinom-időben elő is állítható.

Induljunk ki az összes szereplő állításkonstansok *azonosan hamis* értékeléséből, tehát az induló állapotban *valamennyi állításkonstans értéke legyen hamis*.

Most a tényklózok értéke hamis. Lépésenként sorra vesszük a programformulákat, és ha a sorra kerülő formulát kielégíti az aktuális interpretáció, akkor nem változtatjuk meg az interpretációt, ha pedig nem elégíti ki, akkor úgy változtatunk az állításkonstansok aktuális interpretációján (pontosabban legfeljebb 1 darab állításkonstans interpretációján), hogy az adott programformulát igazzá tegye a következőképpen:

Az A_j állításkonstans értékelését igazra változtatjuk (mivel a formula implikációjának A_j utótagja hamis).
Ez valóban elégséges ahhoz, hogy a szóban forgó programformula igazzá váljék.

Az eljárás akkor ér véget, ha valamennyi tény- és programklóz értéke „igaz”.

Legfeljebb J-szer változtathatjuk A_j hamis értékét igazra, eközben lehet, hogy igaz klózok hamissá válnak, de záróértékük mégis igaz lesz.

Megmutatjuk, hogy az így nyert aktuális h interpretáció minimális számú „igaz” értéket tartalmaz abban az értelemben, hogy ha n egy másik olyan interpretáció, amelyre az összes programformula igaz, akkor

$$h(A_i) = \uparrow \text{ implikálja } n(A_i) = \uparrow\text{-t}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Ugyanis *indirekt* tegyük fel, hogy (6) nem teljesül valamely i-re. Tekintsük a fenti algoritmusnál azt a lépést, legyen sorszáma j, amikor *először adódik*, hogy az adott α, vagyis az $F_{1j} \wedge \ldots \wedge F_{m_j j} \to A_j$ formula hamissága miatt A_j értékét hamisról igazra változtatjuk, de az n interpretációnál $n(A_j) = \downarrow$.
Ekkor, mivel n kielégíti α-t, $F_{1j} \wedge \ldots \wedge F_{m_j j}$ értéke hamis n-nél, vagyis valamelyik tagra, például F_{kj}-ra $n(F_{kj}) = \downarrow$. Mivel feltevésünk szerint az algoritmus végrehajtása során *először fordul elő*, hogy (6) nem teljesül valamely i-re és az aktuális h és n értékelésekre, ezért a j-edik lépést közvetlenül megelőző $h = h^j$ interpretációra (6) még alkalmazható, tehát $F_{1j}, \ldots F_{m_j j}$-re is alkalmazható, így $n(F_{kj}) = \downarrow$ miatt $h^j(F_{kj}) = \downarrow$ szintén. Ezért $h^j(F_{1j} \wedge \ldots \wedge F_{m_j j}) = \downarrow$ a változtatás előtt, ami ellentmond annak, hogy α hamis volt, tehát *ellentmond* annak is, hogy A_j értékét szükséges volt egyáltalán megváltoztatni.
Ezután vegyük szemügyre a célklózokat. Azt állítjuk, hogy ha van egyáltalán olyan interpretáció, amelyik a teljes formulahalmazt kielégíti, akkor az előző algoritmus során nyert, a programformulákat kielégítő h interpretáció ilyen.

A kiindulásul vett azonosan hamis interpretáció valamennyi célklózt kielégíti. Az algoritmus során bizonyos állításkonstansok értékét hamisról igazra változtattuk. Mivel a célklózok $\neg B_{1k} \vee \ldots \vee \neg B_{l_k k}$ szerkezetűek, ez azt jelenti, hogy bizonyos diszjunkciós tagjaik igazból hamissá váltak, tehát az igazságértékelés szempontjából igazságuk csak „elromolhatott”. Miután bebizonyítottuk, hogy h a lehető legkevesebb „igaz” értéket tartalmazza a programformulákat kielégítő interpretációk közül, ezért ha a célklózok igazsága nem romlik el, akkor megkaptuk a keresett interpretációt. Viszont ha igazságuk elromlik, akkor nincs a célklózokat is kielégítő értékelés, mert kielégítésüknek most szükséges és elégséges feltétele az, hogy az előállított h interpretáció kielégítse őket.

A problémát megoldó algoritmus tehát úgy zárul, hogy megvizsgálja, hogy a h értékelés kielégíti-e a célklózokat. Az már nyilvánvaló, hogy az egész algoritmus csupán polinom-időt vesz igénybe, hiszen a programformulák megvizsgálása $c_1 \cdot J$, a célklózoké pedig $c_2 \cdot K$ időt vesz igénybe.

A teljesség az 5. Tétel (ii) következménye. Ugyanis e tétel szerint egy **P**-beli probléma visszavezethető egy olyan ψ gráfproblémára, ahol ψ egzisztenciális másodrendű Horn-formula. Az 5. Tétel (i) részének *bizonyításából* viszont tudjuk, hogy az ilyen ψ gráfproblémák visszavezethetőek a HORNSAT-problémára.

■

Megemlítjük, hogy nevezetes teljes probléma a **P** osztályra nézve az úgynevezett „Boole-hálózat kiértékelés" problémája, ezt most nem részletezzük.

Ezután az **NP** osztályra vonatkozó problémákra térünk rá. Ismert, hogy az (általános) SAT-problémának az összes lehetséges igazságértékelésekkel történő eldöntése exponenciális időt vesz igénybe. Sőt Haken és Urquhart megmutatták, hogy még a rezolúciós eljárás is exponenciális időigényű (bár tudjuk, hogy a gyakorlatban és átlagosan a rezolúció ennél sokkal hatékonyabb).

A SAT-probléma eldöntésének időigénye azonban ennél kisebb, a SAT-probléma az **NP** osztályt reprezentáló probléma:

7. Tétel. (Cook.) A SAT-probléma **NP** *teljes*.

Az nyilvánvaló, hogy a SAT-probléma **NP**-beli, hiszen az, hogy konkrét értékelés kielégít egy konjunktív normálforma alakban adott problémát, polinom-időben ellenőrizhető. Az **NP** teljesség igazolásának alapgondolata az, hogy tetszőleges **NP**-beli probléma minden pozitív, illetve negatív kimeneteléhez egy-egyértelmű módon hozzárendeljük a SAT-probléma egy-egy pozitív, illetve negatív kimenetelét. Azt kell megmutatni, hogy a hozzárendelés során konstruált SAT-probléma megoldása polinom-időben előállítható az eredeti probléma inputjából. Ezt a bizonyítást nem részletezzük.

Megjegyezzük, hogy a SAT-problémának számos verziója ismeretes. A kSAT-probléma például azt jelenti, hogy olyan konjunkciós normálalakokra szorítkozunk, amelyeknek minden tagja *pontosan k* literál konjunkciójából áll, nevezetes esetei a 3SAT- és a 2SAT-problémák. Ha a 3SAT-problémát úgy módosítjuk, hogy kizárjuk azokat az értékeléseket is, amelyek a formula valamely konjunkciós tagjának mindhárom literálját igazzá, vagy mindhármat hamissá teszik, akkor a „nem mind egyenlő SAT"-problémáról beszélünk.

Igazolható, hogy a 3SAT- és „nem mind egyenlő" SAT-problémák az **NP** osztályban vannak, sőt **NP** teljesek is, míg a 2SAT-probléma **P**-ben van! A SAT-probléma változatai tehát példák lehetnek arra, hogy egy probléma esetleg jelentéktelennek tűnő módosításai is eredményezhetik, hogy a probléma átkerül egy másik bonyolultsági osztályba.

A jelen részben kimondott tételek *nemcsak elméleti jelentőségűek, hanem számos problémát a gyakorlatban is a* HORNSAT-, illetve SAT-*problémákra redukálhatunk*, ekként bizonyítható egy-egy probléma teljessége.

Például megmutatható, hogy a 3SAT-probléma visszavezethető a „független csúcshalmaz” problémájára (adott gráfban létezik-e k elemű független csúcshalmaz, emlékeztetünk arra, hogy egy gráf csúcsainak bármely rögzített részhalmazát *független* csúcshalmaznak nevezzük, ha benne egyetlen pontpár sincs összekötve) vagy a Hamilton-kör problémájára, ezért e problémák **NP** teljesek. Az ilyen redukciókat az alábbiakban a „nem mind egyenlő” SAT-problémának a „3 színezés” problémára történő visszavezetésével illusztráljuk, és így megmutatjuk, hogy a „3 színezés” probléma **NP** teljes. A „három színezés” probléma az a probléma, hogy színezhetőek-e egy gráf csúcsai 3 színnel úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs különböző színű legyen.

8. Tétel. A 3 színezés probléma **NP** teljes.

Bizonyítás.

Elfogadjuk, hogy a „nem mind egyenlő” SAT-probléma **NP** teljes. Ekkor elég megmutatni, hogy a „nem mind egyenlő” SAT-probléma visszavezethető a 3 színezés problémára.

Tegyük fel, hogy egy állításnyelv állításkonstansai $V_1,\ V_2, \dots V_p$, a nyelv egy konjunktív normálformájú formulája pedig φ, amelynek klózai $C_1,\ C_2, \dots C_m$, és mindegyikük 3 literálból áll.

A visszavezethetőséghez elég az, hogy polinom-időben megkonstruálható egy olyan G gráf, amelyre igaz, hogy pontosan akkor létezik a $V_1,\ V_2, \dots V_p$-knek φ-t kielégítő interpretációja, amely a $C_1, C_2, \dots C_m$-eket tekintve „nem mind egyenlő” tulajdonságú, ha a G gráf 3 színnel színezhető.

G-t úgy konstruáljuk, hogy háromszögekből építjük fel (egy háromszög 3 olyan csúcsból áll, amelyek mindegyike össze van kötve a másik két csúccsal). Definiáljunk először diszjunkt (az egyes C_i komponensklózokat reprezentáló) háromszögeket oly módon, hogy a csúcsok rendre a klózokat alkotó literálokat (tehát V_k-t vagy a $\neg V_k$-t) reprezentálják C_i-ből. Jelölje C_i j-edik literálját C_{ij}, a gráf hozzárendelt csúcsát pedig C'_{ij}.

Ezután definiálunk az előbbi háromszögekhez diszjunkt, p darab, állításkonstansokat reprezentáló háromszöget olyan módon, hogy a háromszögeknek legyen egy közös csúcsuk (például B), és a k-adik állításkonstanst reprezentáló háromszög másik két csúcsához rendeljük V_k-t és $\neg V_k$-t. Jelöljük e csúcsokat V'_k-vel és $\neg V'_k$-vel.

A fenti két háromszögösszesség bizonyos csúcsait összekötjük a következőképpen: A C_i-ket reprezentáló háromszögek csúcsait összekötjük az állításkonstansokat reprezentáló háromszögek B-től különböző csúcsaival úgy, hogy ha $C_{ij} = V_k$ valamely k-ra, akkor C'_{ij}-t a másik háromszögcsoportból a V_k-t reprezentáló V'_k csúccsal, ha pedig

$C_{ij} = \neg V_k$, akkor C'_{ij}-t a $\neg V_k$-t reprezentáló $\neg V'_k$ csúccsal kötjük össze. Ezzel G-t megadtuk.

Tegyük fel először, hogy φ-nek létezik „nem mind egyenlő” tulajdonságú interpretációja. Megmutatjuk, hogy ekkor G 3 színnel színezhető, jelölje ezen színeket 0, 1 és 2.

Ha V_k igaz az adott interpretációra, akkor V'_k-t az 1 számú színnel, egyébként a 2 számú színnel színezzük, és hasonlóan $\neg V'_k$-t is. A C'_{ij}-kre pedig éppen *ellenkezőleg*: Ha a C_{ij}-hez tartozó literál igaz az interpretációnál, akkor C'_{ij}-t színezzük 0-val vagy 2-vel, ha pedig C_{ij} hamis, akkor 0-val vagy 1-gyel úgy, hogy egy C'_{i_1}, C'_{i_2}, C'_{i_3} háromszögben ne legyen két szomszédos szín. Utóbbi megtehető, mivel C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3} között van hamis és igaz is, a „nem mind egyenlő” feltétel miatt, ezért C'_{i_1}, C'_{i_2}, C'_{i_3} színezhető 3 különböző színnel. A definíció azt is biztosítja, hogy az összekötött C'_{ij}-k és V'_k-k (vagy $\neg V'_k$-k) különböző színűek. B színe legyen 0. Mivel B szomszédai a V'_k-k, ezért G egy 3-színezését kapjuk.

Fordítva, tegyük fel, hogy G színezhető 3 színnel. Ekkor megadunk egy φ-t kielégítő „nem mind egyenlő” interpretációt. Az állításkonstansokat reprezentáló háromszögekben permutálhatjuk úgy a színezést, hogy B színe 0 legyen, és a másik két csúcs színe pedig 1 vagy 2. Legyen V_k aszerint igaz vagy hamis, hogy V'_k színe 1 vagy 2. Azt állítjuk, hogy ez egy φ-t kielégítő „nem mind egyenlő” interpretáció.

Ezt indirekt bizonyítjuk. Ha ez az interpretáció nem elégítené ki φ-t, akkor valamely i-re C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3} mind hamis lenne. Ha C'_{ij} például V'_k-vel (vagy $\neg V'_k$-vel) van összekötve, akkor G definíciója miatt $C_{ij} = V_k$ (vagy $C_{ij} = \neg V_k$). Mivel C_{ij}, azaz V_k (vagy $\neg V_k$) hamis, tehát definíció szerint V'_k (vagy $\neg V'_k$) színezése 2. Azonban C'_{ij} és V'_k (vagy $\neg V'_k$) szomszédosak, így színezésük különböző, vagyis C'_{i_1}, C'_{i_2}, C'_{i_3} egyikének színezése sem lehet 2. Utóbbi ellentmond a 3 színezhetőség feltételnek. Hasonlóan gondolható meg az az eset is, amikor C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3} mindegyike igaz.

■

Megjegyezzük, hogy érdekes a SAT-problémának az a verziója, amelyik *elsőrendű* formulák kielégíthetőségére vonatkozik. Bár az elsőrendű logika nem eldönthető, tudjuk, hogy léteznek olyan elsőrendű formulaosztályok, amelyek kielégíthetőségi problémája eldönthető. Ilyen például az egzisztenciális-univerzális formulák osztálya ($\exists\forall\varphi$ alakú formulák, ahol φ olyan elsőrendű formula, amelyik sem függvényjelet, sem = jelet nem tartalmaz, de konstanst tartalmazhat, Schönfield–Bernays-osztály). Azt a problémát nevezzük SBSAT-problémának, hogy egy adott ilyen típusú formulának van-e modellje. Megmutatható, hogy az SBSAT-probléma nemdeterminisztikus Turing-géppel *exponenciális* idő alatt eldönthető, sőt ez utóbbi osztályra nézve teljes.

Fontos területe az algoritmuselméletnek és a bonyolultságelméletnek algoritmusok hatékonyságának *sztochasztikus* vizsgálata. Erre többek között azért van szükség, mert elképzelhető, hogy egy algoritmus elméletileg ugyan gyorsabb, mint egy másik, gyakorlatilag mégis lassúbb, azaz működtetésénél nagy valószínűséggel, olyan esetek fordulnak elő, amelyekre az elméleti szempontból jobbnak tűnő algoritmus a lassúbb. Például a SAT-problémát tekintve, a bemenő klózokon bizonyos eloszlásokat feltételezve, van olyan rezolúciós algoritmus, hogy az algoritmus exponenciális idővel dolgozik, míg egy másik bemenő eloszlás esetén polinom-idővel. Ezért az algoritmus megválasztásán kívül fontos lehet a bemenő eloszlások vizsgálata is.

6.3 A nemstandard analízisről

A differenciál- és integrálszámítás megalkotói, Newton és Leibniz, centrális fogalomként használták munkáikban a „végtelen kicsiny mennyiség”, azaz az „infinitezimális” fogalmát. Már maga Leibniz is fáradozott azon, hogy olyan számfogalmat alakítson ki, amelybe beilleszthető a „végtelen kicsiny”, illetve a „végtelen nagy” mennyiség fogalma, azonban fáradozásait e téren nem koronázta siker. Sőt későbbi korok kutatóinak évszázadokig sem sikerült a számfogalomra ilyen felépítést találni. Sokáig úgy tekintették ezért a végtelen kicsiny fogalmát, mint valahol a matematika perifériáján található intuitív segédeszközt. Azonban Newton és Leibniz kitűnő intuicióval használták e fogalmat, mert a segítségével elért eredmények helyesnek bizonyultak. Később Weierstrass és Bolzano létrehozták a határérték- és differenciálszámítás elméletének „*ε-δ technikáját*”, és sokáig ez tűnt az egyedüli biztos matematikai alapnak ezen elmélet számára. Ugyanakkor az ε-δ technikát kritika is érte, amennyiben éppen intuitív szempontból nem tűnt kielégítőnek, például a fizikai alkalmazásoknál nem találták e technikát eléggé természetesnek.
A témában áttörés csak évszázadok után, 1960-ban történt. Abraham Robinson amerikai logikus és algebrista bizonyos eredményeinek egy következményeként (közelebbről a kompaktsági tétel, valamint Skolem egy régebbi eredményének folyományaként) felbukkant a valós számfogalom olyan bővítése, amelyben létezik végtelenül kicsiny szám, és e bővítés matematikailag hiánytalanul megalapozott. Az infinitezimális mennyiség fogalma elkezdte második reneszánszát élni, kidolgozták a ráépülő határérték-, differenciál- és integrálszámítás elméletét, a nemstandard analízist, amelyik tulajdonképpen a Newtoni megközelítés rekonstrukciója, de immár matematikai szigorúsággal. Robinson *alkalmazta ezt a technikát a matematika más területeire is*, megszületett a nemstandard topológia, nemstandard mértékelmélet, nemstandard halmazelmélet stb. (mindezen elméletek *összefoglaló neveként* is használják a *nemstandard analízis* elnevezést).

A matematikai logika *alkalmazása* szempontjából az infinitezimális mennyiség fogalmának megalapozása különösen tanulságos, mert a logika alapfogalmainak birtokában (nyelv, struktúra, formulák értékelése, kompaktsági tétel) e fogalom bevezetése szinte kézenfekvő, viszont a logikai alapfogalmak nélkül kevésbé az.
A nemstandard analízis az analízis egy *új felépítését* jelenti, tehát, jellemzően, nem jelent feltétlenül új eredményeket. Azonban e felépítés olyan szemléletet ad, amely sokszor valósághűbb a hagyományos szemléletnél.
Jelen részben célunk az, hogy bepillantást nyújtsunk a nemstandard analízis elméletébe, és hogy mindezt elsősorban azon fogalmak felhasználásával tegyük, melyeket

e könyvben eddig ismertettünk. Nincs azonban arra lehetőségünk, hogy az elméletet részletezzük. A valós számfogalom nemstandard bővítésének eljárását és a határérték- és differenciálszámítás néhány alapfogalmának definícióját mutatjuk meg.

A nemstandard analízist vagy a kompaktsági tételre, vagy az ultrahatvány fogalomra támaszkodva szokás felépíteni. Ismeretes, hogy e két technika egymásra általában kölcsönösen visszavezethető. Továbbá, szokás a nemstandard analízis felépítésénél bizonyos logikák keretében maradni. Lehetőségek erre: elsőrendű logika, másodrendű logika, típuslogika. Ezen logikák, ebben a sorrendben, természetesen egyre nagyobb általánosságot, szélesebb alkalmazhatóságot jelentenek. Létezik a nemstandard analízisnek olyan felépítése is, amelyik megkerüli ezeket a logikai alapokat, ez az úgynevezett axiomatikus felépítés.

A hagyományos és szűkebb értelemben vett nemstandard analízis (differenciál- és integrálszámítás) felépítéséhez *elegendő elsőrendű logikát* használni. A következő, 6.3.1 pont első részében, a kompaktsági tételre építve vázolunk egy ilyen felépítést, és eljutunk az analízis néhány alapfogalmának definíciójához. A 6.3.1 pont második részében vázoljuk az ezen bevezetésnek megfelelő felépítést ultrahatványokkal. Ez az eljárás az előzőnél technikásabb, de szemléletesebb és konstruktívabb. A 6.2.2 pontban az előzőeknél sokkal általánosabb tipuslogikai felépítéssel kapcsolatban teszünk néhány megjegyzést.

Legyen $\mathcal{L}$ a valós számok elméletének tetszőleges, de rögzített elsőrendű nyelve. $\mathcal{L}$-et nem részletezzük, de feltételezzük azt, hogy elég bő ahhoz, hogy a valós számokra vonatkozó szokásos állításokat $\mathcal{L}$-en megfogalmazhassuk. Azt kikötjük, hogy minden i valós számnak legyen a nyelvben egy konstans c_i nyelvi képe, $\mathcal{L}$ ezért *kontinuum számosságú*, így a jelen rész kivételt jelent a tekintetben, hogy e könyvben általában megszámlálható nyelveket tételezünk fel. Jelölje R a valós számok halmazát, $\mathcal{R}$ a valós számok $\mathcal{L}$ típusú standard struktúráját, és $\mathrm{Th}\mathcal{R}$ ennek elméletét.

6.3.1 Az elsőrendű logikai bevezetésről

1. Bevezetés a kompaktsági tétel segítségével

Legyen $\mathcal{A}$ egy tetszőleges $\mathcal{L}$ típusú modell A alaphalmazzal.

1. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy $r \in A$ elem *végtelen nagy*, ha bármely pozitív $i \in R$-re, $c_i^{\mathcal{A}} < |r|$. Egy $r \in A$ *véges*, ha nem végtelen nagy. Akkor mondjuk, hogy egy $r \in A$ *végtelen kicsiny* (infinitezimális), ha $r = c_0^{\mathcal{A}}$ vagy bármely pozitív $i \in R$-re $c_0^{\mathcal{A}} < |r| < c_i^{\mathcal{A}}$.

2. Tétel. (Infinitezimálisok egzisztenciatétele.) Igazak a következő (i) és (ii) állítások:

(i) Th$\mathcal{R}$-nek létezik nemstandard modellje, ${}^*\mathcal{R}$, amelyben létezik nem nulla infinitezimális mennyiség.
(ii) $\mathcal{R}$ elemien beágyazható az (i)-beli ${}^*\mathcal{R}$-ba.

Bizonyítás.

(i) Tekintsük $\mathcal{L}$-ben a következő formulahalmazt

$$\Sigma = \mathrm{Th}\mathcal{R} \cup \{0 < |x| < c_i : i \in R, i > 0\},$$

és alkalmazzuk Σ-ra a *kompaktsági tételt.* Σ bármely véges részének maga $\mathcal{R}$ modellje, hiszen a $\{0 < |x| < c_i : i \in H \subseteq R, i > 0, H \text{ véges}\}$ formulahalmaz minden véges H-ra itt kilégíthető. Tehát maga Σ is kielégíthető valamely ${}^*\mathcal{R}$ modellen, azaz $\{0 < |x| < c_i : i \in R, i > 0\}$ is kielégíthető ${}^*\mathcal{R}$-on, tehát ${}^*\mathcal{R}$-on *van* infinitezimális mennyiség.

$\mathcal{R}$ és ${}^*\mathcal{R}$ nyilván elemien ekvivalensek, hiszen $\mathrm{Th}\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Th}^*\mathcal{R}$, és mivel Th$\mathcal{R}$ komplett elmélet, ezért az egyenlőség érvényes.

(ii) Igazoljuk az izomorf beágyazás tulajdonságot. $\mathcal{R}$ beágyazásának definíciója: *rendeljük $i \in R$-hez* $c_i^{{}^*\mathcal{R}}$-et.

A leképezés egy-egyértelmű, azaz ha $i_1 \neq i_2$, akkor $c_{i_1}^{{}^*\mathcal{R}} \neq c_{i_2}^{{}^*\mathcal{R}}$. Hiszen $i_1 \neq i_2$, ezért $c_{i_1} \neq c_{i_2} \in \mathrm{Th}\mathcal{R}$, mivel i_1, i_2 rendre c_{i_1}, c_{i_2} interpretációi. Másrészt $\mathrm{Th}\mathcal{R} = \mathrm{Th}^*\mathcal{R}$, ezért $c_{i_1}^{{}^*\mathcal{R}} \neq c_{i_2}^{{}^*\mathcal{R}}$ valóban.

Legyen például P egy 1 argumentumú relációjel, és valamely i-re $\mathcal{R} \vDash Pi$. Ekkor ${}^*\mathcal{R} \vDash Pc_i^{{}^*\mathcal{R}}$. Ugyanis $Pc_i \in \mathrm{Th}\mathcal{R}$, mert i interpretációja c_i-nek. Másrészt $\mathrm{Th}\mathcal{R} = \mathrm{Th}^*\mathcal{R}$, ezért $Pc_i^{{}^*\mathcal{R}}$ igaz ${}^*\mathcal{R}$-en is.

Hasonlóan igazolható a leképezés függvénytartása is, és mindez általánosítható többargumentumú relációkra és függvényekre is. A beágyazás *elemi* volta is hasonlóan igazolható a 4.3.1-beli 2. Tételt (Tarski–Vaught) felhasználva, ezt az Olvasóra bízzuk.

■

A tétel segítségével bevezethetjük a nemstandard számokat. Belátható, hogy ${}^*\mathcal{R}$ mint rendezett test izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott (feltételezve a kontinuumhipotézist).

Megállapodunk abban, hogy a standard valós struktúrát *azonosítjuk* az ${}^*\mathcal{R}$-ba történő izomorf beágyazásával. Ezért ${}^*\mathcal{R}$-ban a relációkat, konstansokat, műveleteket, függvényeket ugyanúgy jelöljük, mint az szokásos, de *amennyiben hangsúlyozni kívánjuk*, hogy ezek *kiterjesztései* az $\mathcal{R}$-en értelmezett hagyományosaknak, akkor őket bal felső $*$-gal látjuk el. Tehát jobb felső ${}^*\mathcal{R}$ index helyett például így: ${}^*<$, ${}^*+$, ${}^*c_i$, ${}^*|\alpha|$, ${}^*\sin$ stb. ${}^*\mathcal{R}$ alaphalmazát pedig ${}^*R$-gal jelöljük. Hasonlóan járunk el a definiált kifejezések esetén. Hasonlóan a struktúrákra vonatkozó általános megállapodáshoz, ha félreértés nem lehetséges, akkor sokszor nem különböztetjük meg a nyelv szimbólumait és interpretációjukat.

3. Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy $r \in {}^*R$ szám *standard*, ha valamely i-re $r = {}^*c_i$. Az r és s számok *infinitezimálisan közel* vannak egymáshoz, ha $r - s$ infinitezimális (jelölés: $r \sim s$).

Könnyű belátni, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció. Az $\sim$-ra vett ekvivalenciaosztályokat *monádoknak* nevezzük. Ha s standard, és p infinitezimális, akkor az $r = s + p$ szám is nemstandard, hiszen ha standard lenne, akkor $r - s = p$ is standard lenne.

- Hasonlóan a hagyományos számbővítésekhez, a nemstandard számok vizsgálatánál is fontos szerepet játszik a *permanenciaelv*, tehát az az elv, hogy a bővítésnél maradjon érvényben a régi struktúra minél több és előnyös tulajdonsága (például kommutativitás, asszociativitás stb.). A nemstandard bővítésnél *ezt az biztosítja, hogy $\mathcal{R}$ elemien beágyazható ${}^*\mathcal{R}$*-ba.
- Felhívjuk a figyelmet az elsőrendű *nyelv* szerepére a most bevezetett nemstandard fogalmakkal kapcsolatban. Ha azt vizsgáljuk, hogy a standard valós számok egy adott P tulajdonsága teljesül-e nemstandard számokra, mindenek előtt azt kell vizsgálnunk, hogy *P elsőrendű tulajdonság-e*, azaz formalizálható-e elsőrendű nyelven.

  Például, mivel $\mathcal{R}$ test, sőt valósan zárt test, és a „valósan zárt" tulajdonság leírható elsőrendű formulahalmazzal, ezért $\mathrm{Th}\mathcal{R} = \mathrm{Th}^*\mathcal{R}$ miatt ${}^*\mathcal{R}$ is valósan zárt test. Vagy ha a P tulajdonság például az, hogy a „negatív (nemstandard) számoknak nulla a legkisebb felső korlátja", akkor P formalizálható az $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelven: $\forall y(\forall z(z < 0 \to z \leq y) \to 0 \leq y)$. Ez a tulajdonság standard számokra teljesül, ezért $\mathrm{Th}\mathcal{R} = \mathrm{Th}^*\mathcal{R}$ miatt öröklődik a nemstandard számokra is. Azonban például az a tulajdonság, hogy „*bármely* nem üres korlátos valós számhalmaznak van legkisebb felső korlátja" már nem elsőrendű tulajdonság, ezért az elemi kiterjesztés tulajdonságból nem következik semmi sem igazságára nézve ${}^*\mathcal{R}$-on. Sőt belátható, hogy e tulajdonság nem is igaz, hiszen a nemstandard számok körében például az összes *standard* számok R halmaza bár korlátos (bármely végtelen szám felső korlátja), *még sincs* R-nek legkisebb felső korlátja.

  Megjegyezzük, hogy ha a formulák igazságát elsőrendű struktúrán nem a hagyományos módon értelmezzük, akkor ezeknek a másodrendű formuláknak az igazsága is megörződik. Ehhez be kell vezetni a nemstandard struktúrában az úgynevezett „belső halmaz" fogalmát. Ez olyan halmazt jelent, amely valamely standard halmaznak eleme (innen a „belső halmaz" elnevezés, tehát maguk a standard halmazok is belső halmazok). A szóban forgó formula ekkor úgy válik igazzá, ha a kvantorok a belső halmazokon futnak (lásd erre nézve még a 6.3.2 pontot).

A következő, *felbontási tétel* segít tájékozódni a nemstandard számok világában.

4. Tétel. (Felbontási tétel.)

> Bármely véges r számhoz van olyan s standard szám és p infinitezimális, hogy $r = s + p$, és ez a felbontás egyértelmű (s-et r *standard részének* nevezzük).

Bizonyítás.
Először a következő, (1) állítást igazoljuk:

Ha $r \sim s$ nem teljesül (tehát $r \nsim s$, $r, s \in {}^*R$), és r *vagy s véges, akkor van közöttük k standard valós szám, tehát például* r véges, és $r < s$ *esetén $r < k < s$ teljesül.* (1)

A trichotomia teljesülése miatt (elsőrendű tulajdonság), az általánosság korlátozása nélkül, feltehetjük, hogy $r < s$, és r véges.
Ekkor $0 < s - r$. A $s - r$ szám nem infinitezimális, mivel $r \nsim s$. Ezért van olyan *standard* q szám, hogy $0 < q < s - r$. Hiszen ha nem lenne, akkor $s - r$-nél nagyobb lenne minden pozitív standard szám, ezért $s - r$ infinitezimális lenne. Ekkor egyrészt $q < s - r$ miatt

$$q + r < s. \tag{2}$$

Másrészt mivel r véges, így a standard q-ra és valamely m egészre $r < mq$ (egyébként r végtelen lenne). Legyen m olyan, hogy $(m - 1)q \le r < mq$, tehát

$$mq \le q + r \quad \text{és} \quad r < mq. \tag{3}$$

(2)-t és (3)-at összevetve, kapjuk: $r < mq < s$. Ezt állítottuk, hiszen mq standard, ezért k-nak választva megkapjuk az (1) állítást.

Ezután a tétel állítását a következő (4) alakban igazoljuk:

Bármely véges r ($r \in {}^*R$) számhoz van olyan standard s szám, hogy $s \sim r$. (4)

Tekintsük a $H = \{x : x \text{ standard}, x \le r\}$ halmazt. H mint standard számhalmaz felülről korlátos, ugyanis mivel r véges, ezért definíció szerint van nála nagyobb standard szám, és ez H-nak nyilván felső korlátja. Hasonló okok miatt H nem üres. Ezért, mint az ismert, a standard számokra szorítkozva H-nak van legkisebb standard felső korlátja, legyen ez s. Állítás: *s rendelkezik a (4)-beli tulajdonsággal, tehát $s \sim r$.*
Ezt indirekt igazoljuk. Tegyük fel, hogy $s \nsim r$. Ekkor a trichotomia miatt két eset van:
$s < r$. Az (1) állítás szerint, ekkor van közöttük olyan k standard szám, hogy $s < k < r$, így $k \in H$. Ez viszont ellentmond annak, hogy s H-nak felső korlátja.
$r < s$. Ismét az (1) állítást alkalmazva, van olyan k standard szám, hogy $r < k < s$. Ezért, H definíciója miatt, k is felső korlátja H-nak. Ez viszont ellentmond annak, hogy s H-nak legkisebb felső korlátja.
Mindegyik esetben ellentmondáshoz jutottunk, tehát valóban $s \sim r$.
A tétel bizonyítását a következőképpen fejezhetjük be. A (2) állítás szerint, $r - s$ infinitezimális. Legyen jelölése p, tehát $r - s = p$, azaz $r = s + p$, mint állítottuk.

A felbontás egyértelműsége. Tegyük fel, hogy $s' + p'$ egy másik felbontás, tehát $r = s + p = s' + p'$. Ekkor $s - s' = p' - p$. A bal oldal standard, ezért a jobb oldali infinitezimális is standard. Az egyetlen standard infinitezimális a 0, tehát $p - p' = 0$, azaz $p = p'$ és $s = s'$, mint azt állítottuk.

∎

A nemstandard számok fogalmának bevezetése után, példaként megemlítünk néhány alapvető definíciót az analízisből. Legyen $a \in R$ standard szám, $F(x)$ standard valós függvény, ${}^*F(x)$ az utóbbinak nemstandard kiterjesztése, $a(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ egy standard valós számsorozat, ${}^*a(n)$ pedig ennek nemstandard kiterjesztése.

5. Definíció. $F(x)$-nek A a *határértéke* a-ban ($a,\ A \in R$), ha minden $x \sim a$, $x \neq a$, $x \in {}^*R$-ra ${}^*F(x) \sim A$.
$F(x)$ *folytonos* a-ban ($a \in R$), ha minden $x \sim a$, $x \in {}^*R$-ra ${}^*F(x) \sim F(a)$.
$F(x)$ *differenciálható* a-ban, és deriváltja A ($A \in R$), ha bármely $x \neq 0$ infinitezimálisra $\dfrac{{}^*F(a+x) - F(a)}{x}$ standard része független x választásától, véges, és ez a standard rész éppen A.
Az $a(n)$ sorozat *konvergens*, ha van olyan A standard valós szám, hogy bármely végtelen n természetes számra ${}^*a(n) \sim A$.

Az analízis valamennyi fogalma definiálható nemstandard módon, például az integrál, a mérték, a Dirac-delta stb., ezek ismertetésére nem térünk ki.

A 2. Tételben alkalmazott eljárás általánosítható. Igaz a következő:

Tetszőleges elsőrendű $\mathcal{A}$ struktúrához van olyan $\mathcal{B}$ struktúra, hogy bármely olyan csak egyetlen szabad változót tartalmazó $\Sigma(x)$ formulahalmaz, amelynek minden véges része kielégíthető $\mathcal{A}$-n (azt mondjuk, hogy $\Sigma(x)$ *konkurens* $\mathcal{A}$ felett), kielégíthető $\mathcal{B}$-n.

Az állítást nem bizonyítjuk. A 2. Tétel lényegében következménye a fenti állításnak, hiszen csak *egyetlen* konkurens formulahalmaz: $\{0 < x < c_i : i \in R, i > 0\}$ kielégíthetőségét garantálja a bővítésen, míg a mostani általánosított változat *valamennyi* konkurens formulahalmaz kielégíthetőségét.

2. Bevezetés ultrahatvánnyal.

Először rátérünk a nemstandard számok egy *másik* bevezetésére, az algebrai konstrukcióval történő bevezetésére, amely egy fontos alkalmazása az *ultrahatvány-fogalomnak* és a rá vonatkozó *elemi beágyazhatósági tételnek*. Jelen bevezetés *ekvivalens* az előző részbeli bevezetéssel. Feltételezzük most az ultrahatványokról 4.3.2-ben tanultak ismeretét.

Jelentse $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ ugyanazt, mint eddig, tehát a valós számok egy nyelvét és standard modelljét. Legyen ω a legkisebb végtelen rendszám, és $\mathcal{F}$ egy tetszőleges, de rögzített nem-főszűrő ω-n.

7. Definíció. A *valós számok egy nemstandard struktúráján* értjük $\mathcal{R}$-nek egy ${}^{\omega}\mathcal{R}/\mathcal{F}$ ultrahatványát.

Tudjuk (a 4.3.2 rész 11. Tétel szerint), hogy $\mathcal{R}$ elemien ekvivalens ${}^{\omega}\mathcal{R}/\mathcal{F}$-fel, sőt elemien beágyazható, és mivel ω végtelen, és $\mathcal{F}$ nem-főszűrő, így *nem* izomorf ${}^{\omega}\mathcal{R}/\mathcal{F}$-fel (egy 4.3.2-beli megjegyzés értelmében). Tehát ${}^{\omega}\mathcal{R}/\mathcal{F}$ modellje $\mathrm{Th}\mathcal{R}$-nek, és $\mathcal{R}$ egy valódi kiterjesztése. Az alábbiakban majd megmutatjuk, hogy tartalmaz infinitezimális mennyiséget is. Mindebből már következik a 2. Tétel állítása.

Két észrevételt fűzünk a fenti definícióhoz:

- Emlékeztetünk arra, hogy mivel $\mathcal{F}$ nem-főszűrő, ezért *a kofinit halmazokat kiterjesztő ultraszűrő (4.3 rész).* Az, hogy egy P tulajdonság majdnem mindenütt (röviden m. m.) teljesül ω-n, most azt jelenti, hogy a P tulajdonság valamely $A \in \mathcal{F}$ halmazon teljesül. Például, ha *véges sok kivétellel teljesül ω-n, akkor m. m. teljesül*.
- Az ultrahatványképzési eljárás rokonítható a racionális számok teljessé tételének azon eljárásával, amikor a valós számokat, mint az „önmagukban konvergens” racionális számsorozatok *ekvivalenciaosztályait* vezetjük be, tehát azonosítunk két racionális számsorozatot, ha különbségük nullsorozat. Az ultrahatványkonstrukcióban is a *nemstandard szám* tulajdonképpen egy *végtelen valós számsorozat*, pontosabban utóbbiak ekvivalenciaosztálya. Két nemstandard számot *azonosítunk*, ha e számokhoz tartozó sorozatoknak $\mathcal{F}$ szerint, *rendre, majdnem minden* tagja megegyezik. Az azonosított sorozatokat úgy is felfoghatjuk, mint ugyanazon számoknak különböző alakjai. Hasonló a helyzet ahhoz, mint ahogyan a valós számoknál 1 és 0,99999... két különböző alakja *ugyanannak* a számnak, 1-nek.

A szemléletesség kedvéért, tekintsük most a nemstandard számokat sorozatoknak az ekvivalenciaosztályok helyett. *Specifikálunk* ezután néhány a 6.3.1-ben és az általános ultrahatvány definíciónál (4.3.2) bevezetett fogalmat a mostani konstrukcióra, a nemstandard számok esetére:

A standard a'-ből álló végtelen konstanssorozatot azonosítsuk az a' standard valós számmal, jelöljük e sorozatot a-val, és *standard valós számnak tekintjük*. E szerint ha egy r számot reprezentáló valós sorozat m. m. tagja (például véges sok kivétellel) egy szokásos standard a' valós szám, akkor a szám maga is standard.

Legyenek r és s standard számokból álló, szokásos valós számsorozatok. A szokásos valós *műveleteket* úgy terjesztjük ki sorozatokra, hogy tagonként alkalmazzuk őket, és az így nyert sorozat reprezentálja a művelet eredményét.

A szokásos „*kisebb*” reláció kiterjesztésére igaz a következő: $r \,{}^{*}\!< s$ akkor és csak akkor, ha az r és s sorozatok tagjai között majdnem mindenütt (például véges sok kivétellel) fennáll a $<$ reláció.

Egy s pozitív szám, definíció szerint, *infinitezimális*, ha bármely standard pozitív a számra $s \ {}^*\!< a$, azaz s m. m. tagja kisebb az a-t alkotó a'-nél. Például, ha s 0-hoz konvergáló standard valós sorozat, akkor ez teljesül, hiszen egy 0-hoz konvergáló sorozat elemei *véges sok kivétellel* kisebbek az a standard számot alkotó a' számnál, bármely a' pozitív standard számra. Tehát egy szokásos, valós nullsorozat infinitezimálist reprezentál, és ebből természetesen a 2. Tétel azon állítása is következik, hogy *van infinitezimálist tartalmazó nemstandard modell*.

Hasonlóan, definíció szerint, egy s pozitív szám *végtelen* akkor és csak akkor, ha bármely a standard számra $a \ {}^*\!< s$, azaz s m. m. tagja nagyobb a'-nél. Például, ha s egy pozitív, standard számokból álló végtelenhez tartó valós számsorozat, akkor ez teljesül.

Definíció szerint: r és s *infinitezimálisan közel vannak* ($r \sim s$) *akkor és csak akkor, ha* $r \ {}^*\!- s$ infinitezimális. Ezért például, ha r az a' standard valós számhoz tartó, standard számokból álló számsorozat, akkor r és a infinitezimálisan közel vannak, mivel $r \ {}^*\!- a$ infinitezimális.

Megmutatható, hogy egy $a(n)$ standard valós számsorozat *korlátos* akkor és csak akkor, ha ${}^*a(n)$ bármely végtelen indexű tagja véges szám (ekkor ${}^*a(n)$ standard része éppen $a(n)$-nek valamely torlódási pontja).

6.3.2 A típuslogikai bevezetésről

A valós számok eddig bemutatott két ekvivalens konstrukciójában a standard modellnek csupán az elsőrendű tulajdonságai öröklődnek bizonyosan a nemstandard modellre. Azonban létezik a valós számok standard modelljének olyan bővítése is, melynél a standard modell „akárhányad rendű” tulajdonságai is öröklődnek. Ennek ára az, hogy ki kell lépni a klasszikus elsőrendű logika kereteiből.

Az 5.1-ben már utaltunk arra, hogy a típuslogika egyidejűleg foglal magában minden magasabb rendű logikát. A típuslogika azonban nem elég erős logikai alap a nemstandard analízis számára, nem igaz benne például az itt alapvető szerepet játszó kompaktsági tétel sem. Az 5.1 végén említett *reguláris típuslogika* viszont már alkalmas a nemstandard analízis tárgyalására. Tudjuk, hogy itt már igaz a kompaktsági tétel, és e logikára teljes kalkulus is adható.

Legyen $\mathcal{R}$ a valós számok standard modellje $\boldsymbol{R}$ alaphalmazzal. Először vegyünk fel egy általános típuslogikai nyelvet, és bővítsük $\mathcal{R}$-et egy ennek megfelelő, általános (teljes) típuslogikai modellé, jelölje e modellt $\mathcal{R}^t$ (legyen $\mathcal{R}^t$ alaphalmaza $\boldsymbol{R}^t$). Igazolható a következő:

Létezik $\mathcal{R}^t$-nek olyan ${}^*\mathcal{R}^t$ bővítése *gyenge* típuslogikai modellé (azaz *reguláris* típuslogikai vagy *szekunder* modellé), hogy $\mathrm{Th}^*\mathcal{R}^t = \mathrm{Th}\,\mathcal{R}^t$ (ahol Th most egy általánosított értelemben értendő), továbbá ${}^*\mathcal{R}^t$ alaphalmaza, $\mathcal{R}^t$ tartalmaz infinitezimálist (következésképpen ${}^*\mathcal{R}^t$ és $\mathcal{R}^t$ elemien ekvivalensek a típuslogikai értelemben, de nem izomorfak). Az ${}^*\mathcal{R}^t$-ban, mint „gyenge modellben”, megengedett halmazokat „*belső halmazoknak*”, a „nem megengedett”, tehát az alap típuslogikai modellből kizárt halmazokat pedig „*külső halmazoknak*” hívjuk. Például a *definiálható halmazok* belső halmazok.

Felvetődik a kérdés, hogy mennyiben különbözik az ${}^*\mathcal{R}^t$ struktúra például az e rész elején konstruált ${}^*\mathcal{R}$ struktúrától?
Igaz, hogy ${}^*\mathcal{R}^t$-re öröklődik az összes magasabb rendű logikai állítás igazsága, tehát nemcsak az elsőrendűeké, azonban az állítások szokásos jelentése *megváltozik*, mivel a kvantifikációs tartományok nem a hagyományosan értendők, hanem a szekunder modellen vett igazság definíciója szerint. Például a „bármely nem üres korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja” másodrendű nyelven formalizálható állítás igazsága az ${}^*\mathcal{R}$ struktúrára nem öröklődik, ${}^*\mathcal{R}^t$-re viszont a következő értelemben öröklődik: „bármely nem üres korlátos *belső* halmaznak van legkisebb felső korlátja”.

Néhány megjegyzést teszünk a típuslogikai bevezetéssel kapcsolatban:

- Tudjuk, hogy a típuslogika, speciálisan a Henkin-féle típuslogika is, tekinthető egy elsőrendű, többfajtájú logikának. Szokás ezért a nemstandard analízist is a szóban forgó többfajtájú logikára építeni.
- ${}^*\mathcal{R}^t$-t is lehetséges kompaktsági tétellel is, és ultrahatvány-konstrukcióval is bevezetni (mindkét módszert egy általánosított, típuslogikai értelemben értjük). E bevezetések előnyeiről és hátrányairól ugyanaz mondható el, mint az elsőrendű esetben.
- A nemstandard analízis irodalmában a fent vázolt típuslogikai bevezetésre szokás *axiomatikus felépítést* adni, hasonlóan ahhoz, ahogyan a klasszikus analízis irodalmában a valós számok fogalmát szokták axiomatikusan is bevezetni. Egy ilyen axiomatizálásnak előnye, hogy elemi, és ezért viszonylag könnyen kezelhető, hátránya viszont, hogy általában elfedi a szemantikát.

Mint arra a Bevezetésben utaltunk, a „nemstandard analízisnek” létezik az analízisen túlmutató értelmezése. Ez az értelmezés is megvalósítható a típuslogika segítségével. A fenti típuslogikai bevezetés például a következőképpen általánosítható $\mathcal{R}$-ről tetszőleges $\mathcal{A}$ standard struktúrára. Először $\mathcal{A}$-t egy $\mathcal{A}^t$ általános típuslogikai modellé bővítjük. Igazolható, hogy létezik $\mathcal{A}^t$-nek egy olyan ${}^*\mathcal{A}^t$ bővítése gyenge modellé, hogy $\mathrm{Th}\,{}^*\mathcal{A}^t = \mathrm{Th}\mathcal{A}^t$ és ${}^*\mathcal{A}^t$-ben az összes $\mathcal{A}^t$ feletti konkurens formulahalmaz realizálódik.

* * *

Befejezésül az ezen alfejezetben tanult fogalmakkal kapcsolatos *példákat* mutatunk.

1. Példa. *Értelmezett-e végtelen, illetve infinitezimális valós számokra korlátlanul*

a) a kivonás, szorzás, osztás,

b) a $\sin x$, $\sqrt[3]{x}$, $\log x$ *függvény?*

a) Igen. A standard valós számstruktúra elemien beágyazható a nemstandard struktúrába, ezért e műveletek korlátlanul kiterjeszthetőek az új számfogalomra, a 0-val való osztás azonban itt sincs értelmezve.

b) Igen. *a)*-hoz hasonlóan a $\sin x$ és $\sqrt[3]{x}$ függvények is kiterjeszthetőek az összes nemstandard számra, $\log x$ pedig pozitív számokra.

2. Példa. *Igazak-e a következők?*

a) Bármely két különböző infinitezimális között van egy harmadik szám.

b) Bármely pozitív végtelen számnál van nagyobb szám.

c) Bármely pozitív végtelen számnál van kisebb pozitív végtelen szám.

a) Igaz. A standard valós számok rendezése sűrű. A „sűrű” tulajdonság elsőrendű tulajdonság, ezért a nemstandard számokra is igaz.

b) Igaz. A standard valós számok rendezése nem korlátos felülről ($\neg\exists y \forall x (x < y)$ igaz). Mivel ez elsőrendű tulajdonság, ezért teljesül a nemstandard modellen is.

c) Igaz, indirekt bizonyítunk. Ha r a legkisebb pozitív végtelen szám lenne, akkor tekintsük $r-1$-et. Ez utóbbi is végtelen, hiszen hogyha véges lenne, akkor $(r-1)+1=r$ is véges lenne. Ellentmondáshoz jutottunk, mivel $r-1$ végtelen, és kisebb r-nél.

3. Példa. *Formalizálható-e elsőrendű mondathalmazzal, illetve tetszőleges elsőrendű formulahalmazzal az „infinitezimális” tulajdonság?*

A tulajdonság a szokásos értelmében, tehát zárt formulahalmazzal nem formalizálható, mert $\mathcal{R}$ és ${}^*\mathcal{R}$ elemi ekvivalenciáját kihasználva következne, hogy a standard számok között is van nem nulla infinitezimális. Nyílt formulahalmazzal például abban az értelemben „formalizálható”, hogy az $\{0<|x|<c_i : i>0 \text{ standard}\}$ formulahalmazt csak infinitezimális x-ek elégítik ki.

4. Példa. *Igazoljuk*

a) ha x *nem nulla infinitezimális, akkor* ${}^*\sin x$ *is infinitezimális;*

b) ha x *végtelen, akkor* ${}^*\sqrt[3]{x}$ *is végtelen.*

a) I. megoldás: Indirekt bizonyítunk. Ha ${}^*\sin x$ nem lenne infinitezimális, azaz ${}^*\sin x \not\approx 0$, akkor ha például ${}^*\sin x > 0$, akkor lenne olyan r, hogy $0 < r < {}^*\sin x$ úgy, hogy r standard. $r < {}^*\sin x$-ből, az inverz függvényt alkalmazva, következik, hogy ${}^*\arcsin r < {}^*\arcsin({}^*\sin x) = x$. A bal oldal standard és pozitív, hiszen a ${}^*\arcsin$ kiterjesztése arcsin-nek, a jobb oldal infinitezimális, ez ellentmondás.

II. megoldás: 0 egy standard környezetében $0 < \sin x < x$. Ez elsőrendű nyelven megfogalmazható tulajdonság: $\exists \varepsilon \forall x (0 < x \wedge x < \varepsilon \rightarrow 0 < \sin x \wedge \sin x < x)$. E tulajdonság átmegy nemstandard számokra is, vagyis 0 egy nemstandard környezetében is $0 < {}^*\sin x < x$. Mivel x infinitezimális, ezért a nála kisebb pozitív ${}^*\sin x$ is az.

Mindkét megoldásnál a ${}^*<$ kiterjesztett egyenlőtlenséget egyszerűen $<$ jellel jelöltük.

b) Indirekt. Ha $\sqrt[3]{x}$ véges lenne, akkor definíció szerint, $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ is véges lenne, ami ellentmondás.

5. Példa. *Mutassuk meg, hogy a standard valós számok archimedesi axiómája a nemstandard valósakra nem teljesül (archimedesi axióma: minden $r > s > 0$-ra van olyan n standard természetes szám, hogy $n \cdot s > r$).*

I. megoldás: Az archimedesi tulajdonság nem elsőrendű tulajdonság, mint az belátható. Például tagadása a következő formulahalmaz kielégíthetőségét jelenti valamely s-re

$$\mathrm{Th}\mathcal{R} \cup \{s < x, s + s < x, s + s + s < x, \ldots\}$$

stb., ahol x szabad változó. Viszont e formulahalmazra alkalmazható a kompaktsági tétel (lásd még a 2. Tétel bizonyítását), és ezzel készen vagyunk.

II. megoldás. Legyen r végtelen nagy szám, és s véges. Mivel s véges, ezért $n \cdot s$ is véges, így $r > n \cdot s$ minden n standard természetes számra.

Megjegyezzük, hogy ha úgy értelmezzük az axióma kiterjesztését, hogy n *nemstandard természetes szám* is lehet, akkor viszont érvényben marad az axióma, hiszen létezik az r/s számnál nagyobb nemstandard természetes szám.

6. Példa. *Értelmezhetőek-e a következő fogalmak nemstandard számokra, és ha igen, akkor hogyan?*

a) végtelen páros szám,

b) nemstandard pozitív racionális *szám,*

c) egy $a(n)$ sorozat egy végtelen indexű eleme.

a) Legyen Px jelentése az, hogy x páros egész, akkor a

$$\{Px,\ 1 < x,\ 1 + 1 < x,\ 1 + 1 + 1 < x,\ \ldots\}$$

formulahalmazt kielégítő x a kívánt tulajdonságú. Létezése, hasonlóan a végtelen szám létezéséhez, kompaktsági tétellel igazolható, illetve hivatkozhatunk a 6. tételre is.

Megjegyezzük, hogy elsőrendű formulával nem írható le ez a tulajdonság, hiszen tudjuk, hogy a végtelen tulajdonság nem írható le (2.4 rész), a párosság viszont igen.

b) Igen. Legyen Q az az egyváltozós reláció a standard $\mathcal{R}$-en, amelynek jelentése az, hogy „racionális”. Ekkor $\{x : {}^*Qx \wedge x \,{}^*\!> 0\}$ a nemstandard pozitív racionális számok halmaza.
c) Igen. $a(n)$ mint a természetes számokon értelmezett standard függvény, kiterjeszthető nemstandard (végtelen) természetes számokra.

7. Példa. *Igazolja, hogy az* x^2 *függvény deriválható az* $a = 2$ *pontban, és deriváltja 4.*

$\dfrac{(2+x)^2 - 2^2}{x} = \dfrac{4 + x^2 + 4x - 4}{x} = x + 4$, ahol x nem nulla infinitezimális. $x + 4$ standard része nyilván 4, x-től függetlenül. Ezzel az állítást igazoltuk.

A fenti példák megoldásánál nem használtuk a nemstandard szám fogalmának ultrahatvánnyal történő (konstrukciós) felépítését. Ennek segítségével intuitíve sokszor szemléletesebb megoldás adható, mint csupán az egzisztenciamegfontolás (hasonlóan az alapfogalmak bevezetéséhez). Rögzítsünk például egy a kofinit halmazok összességét tartalmazó ultraszűrőt és egy erre vonatkozó konkrét ultrahatványt.
A 7. a) példa például úgy igazolható, hogy a $\langle 2, 4, 6, \ldots \rangle$-t tartalmazó osztály egy ilyen páros végtelen szám. Jól áttekinthetőek e technikával például a „nemstandard számelmélet” fogalmai. Például a $\langle 2^n \rangle_{n \in \omega}$ „szám” bármely véges 2 hatvánnyal osztható, az $\langle n! \rangle_{n \in \omega}$ „szám” pedig bármely véges számmal osztható (hiszen tudjuk, hogy véges sok kivétellel e sorozatok tagjai rendelkeznek e tulajdonságokkal).

6.4 A halmazelmélet alapjairól

A halmazelmélet a matematikának olyan területe, amelyre minden más matematikai elmélet ráépül, és amelyre minden matematikai vizsgálat visszavezethető. A logikai *szemantika* például lényegesen használja a végtelen halmazok elméletét, de a bizonyításelmélet is használ egy korlátozott halmazelméletet. Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy még a könyv elején feltételeztük az úgynevezett *naiv halmazelmélet* elemeinek ismeretét, így a halmazműveletek, számosság, rendszám stb. és mindezen fogalmak elemi tulajdonságainak ismeretét. Jelen részben nem az a célunk, hogy egy halmazelméleti bevezetést adjunk, hanem csak az, hogy vázoljuk a halmazelmélet felépítésének logikai alapjait, kapcsolatát a logikával.
A Cantor által a 19. század végén megalkotott „naiv” halmazelmélet forradalmasította a matematikát. Amilyen kedvező fogadtatásban részesült az egész matematikának új alapozást nyújtó elmélet, akkora tanácstalanságot váltottak ki először a halmazelmélethez kapcsolódó antinómiák. A leghíresebb ilyen antinómiát a Bevezetés elején (ii)-ben ismertettük. Az ottani gondolatmenetben az a kritikus, hogy képezhetjük-e az összes halmazok H halmazát. Hamarosan megszületett az átfogó válasz az antinómiákra: a halmazelmélet felépítésénél az axiomatikus módszert muszáj alkalmazni. Létrejött az *axiomatikus halmazelmélet*. Számos axiomatizálással próbálkoztak, mi most a leginkább elterjedt, általánosan elfogadott Zermelo–Fraenkel-féle axiómarendszert (ZF) ismertetjük:

A halmazelmélet *nyelve* egy szokásos elsőrendű nyelv, egyetlen kétváltozós relációszimbólummal, amelynek jelölése általában $\in$ (vagy E). Következik ebből az, hogy a halmazelmélet „egynemű” objektumokkal foglalkozik, halmazokkal, tehát például egy halmaz elemei is *csak* halmazok lehetnek.
Az axiómák:

(i) $\exists x \forall u (u \notin x)$
(üres halmaz axióma)

(ii) $\forall x \forall y (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \leftrightarrow x = y)$
(meghatározottsági axióma)

(iii) $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
(páraxióma)

(iv) $\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \forall v (v \in u \to v \in x))$
(hatványhalmaz axióma)

(v) $\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (u \in v \wedge v \in x))$
(unióhalmaz axióma)

(vi) $\exists x(\exists u(u \in x \wedge \forall v(v \notin u)) \wedge \forall u(u \in x \to \exists v(v \in x \wedge \forall w(w \in v \leftrightarrow$
$\leftrightarrow w \in u \vee w = u))))$
(végtelen halmaz axióma)

(vii) $\forall w_1 \dots \forall w_n(\forall u \exists! v\varphi(u, v, w_1, \dots w_n) \to \forall x \exists! y \forall v(v \in y \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge \varphi(u, v, w_1, \dots w_n))))$,
ahol feltesszük, hogy az u, v, $w_1, \dots w_n$ változók a $\varphi(u, v, w_1, \dots w_n)$-nek az összes szabad változói, x és y ezektől különböző változók, $\exists!$ pedig a „létezik egy és csak egy” szokásos rövidítése.
(helyettesítési axiómaséma)

(viii) $\forall x(\exists u(u \in x) \to \exists v(v \in x \wedge \forall w(\neg(w \in x \wedge w \in v))))$
(regularitási axióma)

Néha az úgynevezett belefoglalási tulajdonságot is szokták axiómának tekinteni (bár következménye az (i) és (vii) axiómáknak):

(ix) $\forall z \forall w_1 \dots \forall w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$,
ahol x, y, z, $w_1 \dots w_n$ szabad változói φ-nek.

Mint ismeretes, az axiómákból kiindulva a halmazelmélet számos fogalmát az axiómarendszer bővítéseinek (lásd 3.1.2) segítségével vezetjük be (például halmazműveletek, számosság, rendszám stb.).

Az axiomatizálást tudományos körökben először vegyes érzésekkel fogadták. Egyrészt azért, mert az axiomatikus halmazelmélet a „naiv” halmazelmélet „*maximális szabadsága*” helyett „*maximális kötöttséget*” jelentett, másrészt azért, mert a létrejött új elmélet, az axiomatikus halmazelmélet ellentmondástalansága sem bizonyított. Sikerült kiküszöbölni a halmazelméletben eddig felbukkant antinómiákat, ellentmondásokat, az axiómák például kizárják az összes halmazok halmazának képzését.

Az axiomatizálás folyamata során egyes tulajdonságok axióma voltáról megoszlottak a vélemények. Bizonyos tulajdonságoknál pedig sokat vizsgálták, hogy függetlenek-e a meglévő axiómáktól, illetve konzisztensek-e velük.

Ilyen érdekes tulajdonság az úgynevezett „kiválasztási axióma”. Formalizálás helyett szavakban fogalmazzuk meg: *halmazok egy* $\{A_i : i \in I\}$ *halmazához van olyan* I*-n értelmezett* f *függvény, hogy* $f(i) \in A_i$ *minden* $i \in I$*-re.*

Megmutatható, hogy a kiválasztási axiómával ekvivalensek egyéb igen fontos tulajdonságok. Például vele ekvivalens a „jólrendezési tulajdonság”, azaz hogy minden halmazon megadható jólrendezés (e rendezés szerint minden nem üres részhalmaznak van legkisebb eleme). Igazolható, hogy a kiválasztási axióma *független* a Zermelo–Fraenkel-rendszer axiómáitól. Bebizonyosodott, hogy szükség van a kiválasztási axiómára a halmazelmélet és a matematika más területeinek mélyebb vizsgálatához, és ezért ma már *elfogadott a kiválasztási axiómát a halmazelmélet axiómájaként tekinteni. A kiválasztási axiómával kibővített* ZF*-rendszert* ZFC*-vel jelöljük.* Szokás nyilvántartani egy-egy fontosabb matematikai eredményről, hogy fel kell-e használni bizonyításához a kiválasztási axiómát, vagy sem.

Más axiómáknál is szokás vizsgálni, hogy felhasználja-e egy-egy bizonyítás. Kiemelendő ilyen szempontból a *regularitási* axióma. A regularitási axiómától megfosztott ZF-et ZF^{-}-szal jelöljük.

Másik nevezetes tulajdonság a halmazelméletben az úgynevezett (speciális) *kontinuumhipotézis*. A hipotézis az, hogy a megszámlálható és a kontinuum számosság között nincsen más számosság. Gödel idevágó eredményeinek továbbfejlesztéseként, a hatvanas években Cohen igazolta, hogy ez az állítás is *független* a Zermelo–Fraenkel-axiómarendszertől. Híres bizonyítása a *modellmódszert* használja.

A 4.2.2-ben már utaltunk a rendszámok fogalmának naiv bevezetésére. Az axiomatikus halmazelméletben a rendszámok pontosan az úgynevezett tranzitív és az $\in$ relációval jólrendezett halmazok. A rendszámok $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\ldots$ sorozata a természetes számok sorozatát általánosítja, a természetes számoknak a véges rendszámok felelnek meg, mely utóbbiak kielégítik a Peano axiómákat.

* * *

Ezután röviden kitérünk a halmaz fogalmának általánosítására, az „osztály” fogalmára.

A Russell-antinómia arra figyelmeztet, hogy az összes halmazok együttesét nem célszerű halmaznak tekinteni, csupán „osztálynak” (lásd az alábbiakban). Úgy érdemes ezért a struktúra fogalmát általánosítani, hogy megengedjük, hogy a struktúrák komponensei, vagyis az univerzum, a relációk és függvények „osztályok” is lehessenek. Könnyen általánosítható a formulák igazságának definíciója ezen „általánosított struktúrák” esetére. Valóban általánosításról beszélhetünk majd, hiszen a halmazok maguk is „osztályok”, viszont nem minden „osztály” halmaz. Például az $\{\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \vDash \varphi\}$ *struktúraösszesség nem mindig halmaz* (ahol φ valamely rögzített formális nyelvnek mondata, $\mathcal{A}$ pedig egy megfelelő típusú hagyományos struktúra). Felvetődik a kérdés, hogyan kezeljük ezeket az összességeket, az osztályokat, amelyeket „kirekesztünk” a halmazelméletből.

Heurisztikus megközelítésben *osztályon* értjük halmazok egy

$$\{a\colon \varphi(a) \text{ igaz}\} \tag{1}$$

összességét, ahol φ a *halmazelmélet nyelvének rögzített monadikus formulája*, és a a halmazok összességén fut. Szavakban: azon halmazok összessége, amelyek rendelkeznek a φ tulajdonsággal. Itt a $\{\ \}$ jelölés megengedett, de nem halmazt jelent. Általánosabban φ-nek lehetnek egyéb paraméterei is.

Tehát *az osztályok azon összességek, amelyeket meg tudunk nevezni a halmazelmélet formalizált nyelvén egy alkalmas formulával*.

Példák osztályokra:

$\{a : a = a\}$

(itt φ az $x = x$ formula, a szóban forgó osztály pedig a halmazok összessége),
$\{a : a$ egy rendszám$\}$
(itt φ azon tulajdonság formalizált megfelelője, hogy x rendszám, a szóban forgó osztály pedig a rendszámok összessége).
$\{a : a \sim b$ rögzített b halmazra$\}$
(itt φ azon tulajdonság formalizált megfelelője, hogy az a és b halmazok egymásnak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők).

Megjegyezzük az utolsó példához kapcsolódóan, hogy a naiv halmazelméletben be szokták vezetni az $\sim$-t mint halmazok közötti ekvivalenciarelációt. Ekkor az így keletkezett osztályok tagjait tekintik számosságoknak. Az utolsó példa szerint ez azért problematikus, mert a szóban forgó ekvivalenciaosztályok tagjai nem halmazok (adott számosságú halmazok nem alkotnak halmazt). Az axiomatikus halmazelméletben viszont a számosság egy speciális halmaz (egy speciális rendszám).

Egy osztály valódi osztály, ha nem halmaz. (1) alakú összességek gyakran fordulnak elő a matematikában. Amennyiben halmazok, ezt gyakran az biztosítja, hogy *részei (vagy elemei) valamely ismert halmaznak*. Ezzel a fenti (ix) *belefoglalási tulajdonság* kapcsolatos.

Megjegyezzük, hogy fontos különbség halmazok és osztályok között az, hogy amíg a halmazok lehetnek más összességek elemei (halmazoké vagy osztályoké), addig a valódi osztályok nem.

Egzakt megközelítésben tehát egy osztály formulaként kezelhető (az osztályfogalom (1)-hez kapcsolódó heurisztikus megközelítésén túl), egy *formulával azonosítható*, a fenti jelölést használva $\varphi(x)$-szel.
Szokásos jelölési konvenció, hogy *osztályokra is használják a halmazelmélet jelöléseit*. Például két osztály *azonos*, ha ugyanazon objektumok tartoznak hozzájuk, vagy két osztály *metszete* azon osztály, amelyik pontosan a mindkét osztályhoz tartozó objektumokat és csak ezeket tartalmazza stb. E jelölések használatát indokolja, hogy a halmazelmélet számos fogalma, módszere átvihető osztályokra. Így (1)-re gondolva, *jelölhető* osztályok azonossága, metszete, tartalmazása, uniója, komplementere stb., a halmazelméleti jelöléseket használva. Azonban óvatosnak kell lenni a tekintetben, hogy a halmazelmélet mely módszerei vihetők át halmazokról osztályokra.

* * *

A halmazelmélet *bizonyításelmélete* hasonló más elméletek bizonyításelméletéhez. Használja ugyan a véges halmazok elméletét, de megbízhatóságát illetően ez nem vet fel kételyeket. Speciális helyzete van azonban a halmazelmélet *szemantikájának*. A logikai szemantika hagyományos alapfogalmánál, a struktúra (modell) definíciójában ugyanis előfordul a halmazfogalom (alaphalmaz, reláció, függvény). Magának a halmazelméletnek a felépítésekor viszont nyilván nem tekinthetjük ismertnek a halmaz fogalmát. A halmazelmélet szemantikájának felépítése ezért speciális eljárást követel. Az alábbiakban néhány ehhez kapcsolódó fogalmat vázolunk.

Leírjuk „naiv” megközelítésben a halmazelmélet egyik *modelljét*. Először bevezetjük az úgynevezett *jólfundált* halmazok H osztályát.
H-t a következő, transzfinit rekurzióval definiált $H(\alpha)$ halmazok uniója alkotja (ahol α rendszám).

(i) $H(0) = \emptyset$,

(ii) $H(\alpha + 1) = \mathcal{P}(H(\alpha))$,
ha α *nem* limesz rendszám ($\mathcal{P}$ hatványhalmazt jelöl),

(iii) $H(\alpha) = \bigcup\limits_{\beta \langle \alpha} H(\beta)$,
ha α limesz rendszám.

Legyen $H = \bigcup_\alpha \{H(\alpha) \colon \alpha$ tetszőleges rendszám$\}$.

H-t úgy egészítjük ki a halmazelmélet nyelvének megfelelő $\mathcal{H}$ struktúrává, hogy az $\in$ szimbólumot a hagyományos eleme jelentés osztályokra kiterjesztésével interpretáljuk.

Néhány megjegyzést fűzünk a fenti definícióhoz.

- A gyakorlat és tapasztalat szerint $\mathcal{H}$ alkalmas arra, hogy műveljük benne a matematikát, hogy a matematika „színtere” legyen. Igazolható, hogy *$\mathcal{H}$ kielégíti ZF-et, amennyiben kielégíti ZF^--t*, hiszen a konstrukció biztosítja a regularitási axiómát (a „jólfundáltság” azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ kielégíti a regularitási axiómát).
- A $H(\alpha)$ halmazok néhány első véges tagja (azaz $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, $H(3), \ldots$):
$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$
$H(\omega)$ pedig (iii) szerint ezen összes véges halmazokból áll. Hasonlóan $H(\omega)$ definíciójához, a transzfinit indukciónál nyilván az történik, hogy a $H(\alpha)$-kat mindig a már előző lépésekben megkonstruált halmazokkal definiáljuk.
- A jólfundált halmazok H osztálya úgynevezett *tranzitív osztály*, azaz olyan halmazokból áll, amelyekre igaz, hogy az osztály minden elemének eleme egyben az osztálynak is eleme, tehát ha $x \in u$, és $u \in z$, akkor $x \in z$. A tranzitív osztályok fontos szerepet játszanak a halmazelméletben.
- Ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\alpha) \subseteq H(\beta)$,
- $x \in x$, vagy $x = \{x\}$ nem állhat fenn.
- $H(\alpha)$ a hatványhalmaz axiómát nem elégíti ki, de megmutatható, hogy H már kielégíti.

A fenti csupán „naiv” leírása a halmazelmélet egy modelljének, $\mathcal{H}$-nak. Az egzakt megközelítésben e modellt a *szintaktikában definiáljuk* úgy, hogy az osztályokat (halmazokat) formulákként kezeljük, és használjuk az axiómák által megengedett halmazelméleti technikákat. Tehát a fenti „naivul” definiált modell a szintaktikainak csupán „virtuális” képe. Érdemes számon tartani, hogy egy $\mathcal{H}$-t definiáló *szintaktikai eljárás* során milyen halmazelméleti axiómákat használunk. Belátható, hogy $\mathcal{H}$ definíciójához valamennyi axiómára szükség van, kivéve a regularitási axiómát (a definícióhoz tehát a ZF^--axiómarendszert használjuk). A $\mathcal{H}$ modellt tehát a halmazelméleti axiómák segítségével definiáljuk, de itt már távolról sem csak véges módszereket használva, és erősen *használjuk a ZF^--axiómarendszer ellentmondástalanságát*. Tehát $\mathcal{H}$ *létezésének* előfeltétele az a tény, hogy ZF^- ellentmondástalan.

* * *

ZF^- abszolút ellentmondástalanságát mai tudásunk szerint *bizonyítani nem tudjuk*, mégis egyik *alapfeltevése* a halmazelméletnek. Végső soron ez az egyetlen alapvető állítás a végtelen halmazok elméletét felhasználó matematikában, amelyet egyelőre bizonyítás nélkül kell elfogadnunk.

Mint a matematika mélyebb elméleteiben általában, a halmazelméletben is elsősorban *relatív* ellentmondástalansági bizonyítások léteznek. Ez utóbbi bizonyítások alapja pedig, az előbbiek szerint, ZF^- (vagy ZF) ellentmondástalanságának feltételezése. A relatív ellentmondástalansági bizonyítások általában már véges természetűek, és általánosan elfogadott bizonyítási módszereken nyugszanak. Többek között a relatív ellentmondástalansági bizonyítások miatt a halmazelméletben fontos szerepet játszanak a *metaelméletek*, azaz az egy-egy tárgyelméletet tartalmazó olyan elméletek, amelyekben a tárgyelmélettel kapcsolatban bizonyítunk vagy definiálunk valamit.

ZF-nek, feltételezve ellentmondásmentességét, $\mathcal{H}$-tól *különböző* modelljei is vannak. Különösen fontosak a *tranzitív modellek*, tehát azon modellek, amelyek univerzuma tranzitív osztály. $\mathcal{H}$-n kívül másik fontos tranzitív modell az úgynevezett *konstruálható* halmazok modellje. Léteznek olyan modellek is, amelyekben az $\in$ reláció interpretációja nem a „szokásos” eleme reláció.

FELADATOK

1. Az elsőrendű logika nyelve

1. Tartalmazza az $\mathcal{L}$ nyelv az f kétváltozós függvényszimbólumot, a 2 és 3 természetes számoknak megfelelő $2'$ és $3'$ konstansokat, a szokásos $+$ műveletnek megfelelő $+'$ szimbólumot, a P és A állításjeleket, a T egyváltozós relációjelet és a szokásos $<$ relációnak megfelelő $<'$ szimbólumot. Vizsgálja meg, hogy a következő infix kifejezések termek, formulák, vagy egyik sem?

a) $P \vee T(2)$

b) $(3+2)+x$

c) $\forall x(T(x) \wedge x = x)$

d) $T(x) \wedge \forall y(T(y) \to y > 2' \vee y = 2')$

e) $f(2,3)$

f) $\exists x \forall y(T(f(2', x)), y)$

g) $\forall x P$

h) $(x)T(x)$

i) $\forall x(x > 2')T(x)$

j) $\forall x((x +' 2') +' y)$

k) $P \wedge A$

l) $2' < A$

m) $A + 3'$

n) $2 < 3$

2. Tekintsük a következő elsőrendű formulát!

$$\exists x\, Px \wedge Qx \vee Rx \to Sx \vee Tx \to \forall y\, Hxy \vee Gxy \to Py \wedge Sy$$

Iktasson be zárójeleket úgy, hogy a formula jelentése

a) ne változzon,

b) megváltozzon!

3. Legyen α a $\exists y(P(y) \wedge R(x,z))$ formula, és f kétváltozós függvényjel. Melyek a megengedett helyettesítések, illetve melyek a cserék α-ban az alábbiak közül?

a) $x/f(z,y)$

b) x/u

c) $x/f(b,z)$

d) y/u

e) y/x

4. Legyen α a $\forall x(\beta(x,y,z)\to\forall z\beta(z,x,w))$ formula, és f egy kétváltozós függvényjel. Melyek a megengedett helyettesítések α-ban az alábbiak közül?

a) $y/f(x,w)$

b) $y/f(y,z)$

c) $x/f(x,z)$

d) $y/f(x,v)$

e) $y/f(v,w)$

5. Vizsgálja meg, hogy az individuumváltozók egyes előfordulásai szabadok vagy kötöttek az alábbi formulákban!

a) $\forall x\, R(x,y)\vee\exists y\, R(x,y)$

b) $\exists y(x+x=x+x)$

c) $\forall x\, R(x,x)\wedge\forall y\, Q(x,y)$

d) $\forall x(\exists y\, R(x,y)\to\exists u\, Q(x,u))$

2. A logika halmazelméleti felépítése

2.1 Struktúra, igazság, formalizálás

1. Tartalmazza az $\mathcal{L}$ nyelv a következő nemlogikai konstansokat: f, g és h rendre 1, 1 és 2 változós függvényjelek, a, b individuumkonstansok, R, Q és S rendre 1, 2 és 3 változós relációjelek. Legyen egy $\mathcal{A}$ struktúra a következő:

az A alaphalmaz $\{0, 1, 2, 3\}$,
a és b interpretációja rendre 0 és 2, f, g és h interpretációi rendre az $x + 1$ (mod 4), $x + 3$ (mod 4) és $x + y$ (mod 4) függvények,
R, Q és S interpretációi rendre az $x + 2 \equiv 0$ (mod 4), $x \equiv y$ (mod 4) és az $x + y + 2 \equiv z$ (mod 4) relációk.

Vizsgálja, hogy igazak-e a következő formulák az $\mathcal{A}$ struktúrán!

a) $\forall x \exists y Q(g(z), h(y, a))$

b) $\exists y \forall x (Q(a, h(x, y)) \to R(f(x)) \vee S(x, y, b))$

c) $S(x, h(x, a), g(b)) \to \exists z Q(z, h(f(x), g(y)))$

d) $R(x) \to \forall y S(x, y, y)$

A **2**–**6.** *feladatokat az interpretációfogalom definícióját felhasználva oldja meg!*

2. Kielégíthetőek-e rendre a következő formulahalmazok? Amennyiben igen, akkor adjon meg egy őket kielégítő interpretációt!

a) $\{\forall x \exists y Pxy, \forall x \neg Pxx\}$

b) $\{\exists x \forall y Pxy, \forall x \neg Pxx\}$

c) $\{\forall x (Px \vee Qx), \neg \exists x Px, \neg Qa\}$

d) $\{\exists x Px, \forall x (Px \to Qx), \forall x \neg Qx\}$

e) $\{\forall x (Px \to \exists y Qxy), \forall x \forall y (Qxy \to Ry), Pa \wedge \neg Ra\}$,

ahol a individuumkonstans.

3. Kielégíthetőek-e a következő formulák? Amennyiben igen, akkor adjon meg rendre őket kielégítő struktúrákat!

a) $\forall x \exists y (Px \leftrightarrow \neg Py)$

b) $\exists y \forall x (Px \leftrightarrow \neg Py)$

c) $\neg \forall x \forall y (Rxy \vee Ryx \vee x = y) \wedge \forall x \forall y \exists z (Rxz \wedge Ryz)$

4. Adjon meg olyan struktúrákat, amelyek kielégítenek egy $\exists x(\alpha \to \beta)$ alakú formulát, de nem elégítik ki rendre a

a) $\exists x \alpha \to \exists x \beta$, illetve a

b) $\exists x \alpha \leftrightarrow \exists x \beta$

formulát!

5. Igazolja, hogy a következő formula igaz minden legfeljebb három elemű modellen!

$$\exists x \forall y (Pxy \to (\neg Pyx \to (Pxx \leftrightarrow Pyy))),$$

ahol P kétváltozós relációjel.

6. Igazolja, hogy a következő formula minden véges modellen igaz, de nem érvényes:

$$\exists x \forall y \exists z ((Pyz \to Pxz) \to (Pxx \to Pyx)),$$

ahol P tetszőleges kétváltozós relációjel.

7. Tartalmazza a nyelv az R, G, S, M, E, P, F, K és D rendre 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 3 és 3 változós relációjeleket. Interpretáljuk e jeleket a valós számok szokásos modelljén a következőképpen:
$Rx :=$ „x valós", $Gxy :=$ „$x > y$", $Sxyz :=$ „$x + y = z$", $Mxyz :=$ „$x \cdot y = z$",
$Ex :=$ „x egész", $Px :=$ „x pozitív", $Fxy :=$ „x osztója $y-$nak", $Kxyz :=$ „$x - y = z$" és
$Dxyz :=$ „$x \div y = z$".
Legyenek a természetes számok nevei a nyelvben: $1'$, $2'$, $3'$, ... stb.
Mit jelentenek a következő formulák a valós számok szokásos modelljén?

a) $\forall x \forall y \exists z (Ex \wedge Ey \to Ez \wedge Sxyz)$

b) $\forall x \forall y (Ex \wedge Ey \wedge \exists z (Ez \wedge Dxyz) \to Mxyz)$

c) $\exists x \forall y (Ex \wedge Ey \to \exists z (Ez \wedge Pz \wedge Kxyz))$

d) $\forall x \forall y (Rx \wedge Ry \wedge Px \wedge \neg Py \to Fxy)$

e) $G(3', 3')$

f) $F(2', 8') \wedge P(2')$

8. Mi a következő formulák jelentése, ha a Tx, Dx és Uxy formulák jelentései rendre „x tanár", „x diák" és „x unja y-t"?

a) $\exists x \exists y (Tx \wedge Dy \wedge \neg Uxy)$

b) $\exists x (Tx \wedge \forall y (Dy \to Uxy))$

c) $\exists x(Tx \wedge \forall y(Dy \to Uyx))$

d) $\forall x \forall y(Tx \wedge Dy \to Uyx)$

9. Mi a jelentése a következő formuláknak?

a) $\forall x(Bx \to \exists y(Ay \wedge Tyx))$

b) $\forall x \forall y(Tx \wedge By \to Gxy)$

c) $\exists z(Az \wedge \forall x \forall y(Tx \wedge By \to Gzx \wedge Gzy \wedge Tzx \wedge Tzy))$,

ahol a Tx, Ax, Bx, Txy és Gxy formulák jelentése legyen rendre „x teherautó”, „x személyautó”, „x bicikli”, „x többe kerül y-nál” és „x gyorsabb y-nál”.

10. Mit jelentenek az $a(n)$ valós sorozatra vonatkozó következő formulák?

a) $\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists N(TN \wedge \forall n(Tn \wedge |a(n) - A| < \varepsilon \to n > N)))$

b) $\exists N \forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \wedge TN \wedge \forall n(Tn \wedge n > N \to |a(n) - A| < \varepsilon))$,

ahol Tx jelentése:= „x természetes szám”.

11. Mit jelent a halmazelmélet nyelvén felírt következő formula?

$$\forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow \forall v(v \in u \to v \in x))$$

12. Mi a jelentése a következő formulának?

$$\exists x(Nx \wedge \forall y(Fy \to Txy)),$$

ahol az Nx, Fy és Txy formulák jelentése rendre „x nő”, „y férfi”, és „x tetszik y-nak”.
Melyek a lehetséges jelentései az *a)*-beli értelmezések mellett a

$$Q_1x(Nx \wedge Q_2y(Fy \to Txy))$$

formulának, ahol Q_1 és Q_2 tetszőlegesen választhatóak a $\forall$ vagy $\exists$ kvantoroknak?

13. Formalizálja a következő állításokat!
„Egy vonósnégyes próbáján

a) csak a cselló játszik.”

b) a két hegedű játszik, de a brácsa és a cselló nem játszik.”

c) legalább egy hangszer játszik.”

d) egyetlen hangszer játszik.”

e) legfeljebb egy hangszer játszik.”

f) a cselló játszik, és a többi hangszer közül legfeljebb egy játszik.”

Használja a H, M, B és C állításjeleket, melyek jelentései rendre: „a hegedű játszik”, „a másodhegedű játszik”, „a brácsa játszik”, „a cselló játszik”!

14. Helyezzen el írásjeleket a következő ismert példamondatban úgy, hogy különböző értelmezéseket nyerjen, majd formalizálja a kapott mondatokat!

„A királynét megölni nem kell félnetek jó lesz ha mindenki beleegyezik én nem ellenzem.”

Használja az O, F, B és E állításjeleket, amelyek jelentései rendre legyenek: „a királynét meg kell ölni”, „félnetek kell”, „mindenki beleegyezik” és „ellenzem”.

15. Formalizálja a következő állításokat!

a) „Vannak akik ismernek dalokat.”

b) „Legalább egy dalt mindenki ismer.”

c) „Mindenki ismeri az összes dalt.”

d) „Van valaki, aki egy dalt sem ismer.”

e) „Van valaki, aki nem ismeri az összes dalt.”

Tartalmazza a nyelv az S, D és I relációjeleket, melyek jelentései rendre legyenek a következők: $Sx :=$ „x egy személy”, $Dx :=$ „x egy dal”, $Ixy :=$ „az x személy ismeri az y dalt”.

16. Válasszon alkalmas nyelvet, és formalizálja a következő állításokat!

a) „Aki pénzt gyűjt, az kamatot kap a pénzére.”

b) „Három közlekedési lámpa közül pontosan kettő mutat pirosat.”

c) „Szép idő esetén a kenguru, a malacka, az egér és a szamár közül legfeljebb egy marad otthon, hacsak nem kártyáznak.”

Vizsgálja rendre, hogy állítás vagy elsőrendű nyelv szükséges-e a formalizáláshoz?

17. Formalizálja a következő állításokat a zárójelben szereplő atomi formulák felhasználásával!

a) „Elemér akkor *boldog*, de csak akkor, ha *alszik* vagy *eszik*.”
(B, A, E.)

b) „*Mátyás* király nagy *király* volt, de nem mindenki *szerette*.”
(M, Nx, Sxy.)

c) „*Robin* Hoodot minden *kisiskolás hősnek tartja*.”
(R, Kx, Hxy.)

d) „Mindenki *hallgat* valakire.”
(Hxy.)

e) „Nincs olyan *gyerek*, aki valami olyat *tudna*, amit valamely *felnőtt* ne tudna.”
(Gx, Txy, Fx.)

f) „Egy és csak egy *legény* van *talpon* a vidéken.”
(Lx, Tx.)

g) „Nem minden *lábra illik* ugyanaz a *cipő*.”
(Lx, Ixy, Cx.)

h) „Minden *finn* ugyanazt a *nyelvet beszéli*.”
(Fx, Nx, Bxy.)

18. „Ki korán kel, aranyat lel”. Formalizálásai-e a következő formulák az állításnak?

a) $\neg\exists x(Kx \wedge \neg Ax)$

b) $\forall x(Kx \to Ax)$

c) $\forall x(Kx \wedge Ax)$

A **19–24.** *feladatoknál rendre a matematika egy-egy területéről származnak a felsorolt tulajdonságok. Először fogalmazza meg e tulajdonságokat, majd válasszon alkalmas nyelvet, amelyik alkalmas a formalizálásra!*

19. Legyen H' síkbeli ponthalmaz. Formalizálja a következő ponthalmaz-tulajdonságokat!

a) x torlódási pontja H'-nek

b) H' zárt

c) x belső pontja H'-nek

d) H' nyílt

20. Formalizálja a következő geometriai tulajdonságokat!

a) „Minden egyenesnek van legalább két különböző pontja.”

b) „Minden egyeneshez van olyan pont, amely nincsen rajta.”

c) „Bármely ponthoz található rajta átmenő egyenes.”

d) „Az egyenes tetszőleges két pontjához van az egyenesnek olyan pontja, hogy az utóbbi elválasztja az előző két pontot egymástól.”

e) „Az egyenes bármely három pontja közül legfeljebb egy van, amelyik elválasztja a másik kettőt.”

21. Formalizálja a következő számelméleti tulajdonságokat!

a) „x prímszám.”

b) „Végtelen sok prím létezik.”

c) „Az x szám y-nak és z-nek a legnagyobb közös osztója.”

d) „Az x szám y-nak és z-nek a legkisebb közös többszöröse.”

22. Formalizálja a következő analízisbeli tulajdonságokat!

a) A számegyenesen értelmezett, adott f valós függvény értékkészlete zárt intervallum.

b) Az $a(n)$ valós számsorozat konvergál az A valós számhoz (ε-δ-s definíció).

c) Az $a(n)$ sorozat a természetes számoknak egy permutációja.

d) $\sin x$ korlátos $(0, 1)$-ben, de nincs maximuma.

23. Formalizálja a következő algebrai tulajdonságokat!

a) A v és s síkvektorok lineárisan függetlenek (a 0 vektor csak a triviális lineáris kombinációval állítható elő).

b) Egy vektortér kétdimenziós (léteznek olyan lineárisan független v és s vektorok, hogy bármely síkvektor előáll ezek lineáris kombinációjaként).

c) Az $x + 2y = a$, $4x - y = b$ egyenletrendszernek pontosan 1 megoldása van.

d) Minden másodfokú egyenletnek vagy nincs valós gyöke, vagy pontosan egy vagy pontosan két gyöke van.

e) Egy csoportban egy elem rendje n.

24. Formalizálja a következő gráftulajdonságokat!

a) Egy G gráf részgráfja a K gráfnak.

b) Egy gráf rendezett (azaz adott csúcsainak egy olyan lineáris rendezése, hogy az ezen rendezés szerint egymást követő csúcsok között létezik a gráfban irányított él).

Használja az E kétváltozós relációt (összekötve lenni) és a $<$ rendezési relációt (csúcsok rendezése).

25. Formalizálja a következő állításokat!

a) Tetszőleges x-hez van olyan y, hogy $x \cdot y = 0$.

b) Van olyan y tetszőleges x-hez, hogy $x \cdot y = 0$.

c) Tetszőleges, rögzített x-hez van olyan y, hogy $x \cdot y = 0$.

d) $x = a$-hoz van olyan y, hogy $x \cdot y = 0$.

e) Van olyan y, hogy $x \cdot y = 0$.

f) Valamely x-re és tetszőleges y-ra $x \cdot y = 0$.

26. Tekintsük az $f(x)$ valós függvény a-beli folytonosságának következő definícióját: „Tetszőleges pozitív ε-ra, valamely pozitív δ-ra $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, ha $|x-a|<\delta$. Keresse meg a hibákat a definíció alábbi formalizálásaiban!

a) $\varepsilon>0\to\exists\delta(\delta>0\wedge|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$

b) $\exists\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists\delta(\delta>0\wedge|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon))$

c) $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\wedge\exists\delta(\delta>0\wedge|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon))$

d) $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists\delta(\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\wedge|f(x)-f(a)|<\varepsilon)))$

e) $\forall\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists\delta(\delta>0\wedge\exists x(|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon)))$

27. Fogalmazza meg az ε-δ-s változatban az alábbi, a számegyenesen értelmezett valós függvényekre vonatkozó tulajdonságpárokat, majd alkalmas nyelvet választva formalizálja e tulajdonságokat. Vesse össze az így nyert formulapárokban a kvantorok sorrendjét!

a) Az $f(n,x)$ függvénysorozat konvergál az $F(x)$ függvényhez.
Az $f(n,x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $F(x)$ függvényhez.

b) Az $f(x)$ függvény folytonos.
Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos.

c) Az $f(x)$ függvény monoton.
Az $f(x)$ függvény minden pontban lokálisan monoton.

d) Az $f(x)$ függvénynek létezik maximuma.
Az $f(x)$ függvénynek létezik lokális maximuma.

2.2 A logikai következmény fogalmáról

A **28–34.** *feladatoknál formalizálja a megadott következményeket a zárójelben megadott atomi formulák segítségével, majd bizonyítsa definíció alapján, hogy a következmények* helytelenek!

28. „Ha Jutka *eléri az 50%-ot* a vizsgán, akkor átmegy. Ha nem puskázik, akkor *megbukik*. Vagy eléri az 50%-ot, vagy megbukik. Tehát akkor és csak akkor éri el az 50%-ot, ha *puskázik*." (E, B, P.)

29. „Kovács doktor nem tudja ellátni a régi betegeit, ha sürgősségi *telefonhívást kap*. Vagy *el tudja látni a régi betegeit*, vagy *elveszíti őket*. Tehát ha nem kap sürgősségi hívást, akkor nem veszíti el a betegeit." (T, E, V.)

30. „Nincs olyan állat, amelyik *pettyes*, és amelyik *csíkos* is. A pettyes állatok között *kutyák* is vannak. Tehát a kutyák között nincsenek *macskák*." (Px, Cx, Kx, Mx.)

31. „Csak olyasvalaki *tölthet be* bizalmi állást, aki *megvesztegethetetlen*. Aki nem tölthet be bizalmi állást, az nem is *folyamodhat* ilyen állásért. Léteznek intelligens *politikusok*. Az, hogy valaki *intelligens*, még nem garantálja azt, hogy megvesztegethetetlen. Tehát vannak olyan politikusok, akik nem folyamodhatnak bizalmi állásért." (Tx, Mx, Fx, Px, Ix.)

32. „Csak azokkal *vitatkozom*, akiket *tartok valamire*. *Fanatikusokkal* sohasem vitatkozom. Tehát én a fanatikusokat nem sokra tartom." (Vx, Tx, Fx.)

33. „Minden *kábítószer-terjesztő*, aki *részt vett* a múlt heti akcióban, *bűnös*. *Kábítószer-fogyasztó* nem vett részt az akcióban. Tehát ha egy terjesztő nem fogyasztó, akkor bűnös." (Tx, Rx, Bx, Fx.)

34. „Egy összejövetelről a *meghívott* összes *színész* és *újságíró* elkésett. Volt azonban olyan vendég is, aki nem késett el. Tehát volt olyan meghívott, aki se nem színész, se nem újságíró." (Hx, Sx, Ux, Kx)

35. Melyek a logikailag igaz, logikailag hamis, illetve egyik kategóriába sem sorolható formulák az alábbiak közül?

a) $\forall x(Px \lor \neg Px)$

b) $\forall x\, Px \lor \forall x \neg Px$

c) $\exists x(Px \land \neg Px)$

d) $\exists x\, Px \land \exists x \neg Px$

e) $\forall x\, Px \to \exists x\, Px$

f) $\forall x\, Px \land \exists x \neg Px$

g) $\forall x \exists y(Pxy \lor \forall z \neg Pxz)$

h) $\exists x \forall y \exists z(Qxz \land \neg Qxy)$

i) $\exists x\, Px \to \forall x\, Px$

j) $\exists x \exists y\, Qxy \leftrightarrow \forall x \exists y\, Qxy$

36. Igazolja igazsághalmazok alkalmazásával, hogy a következő formulapárok logikailag ekvivalensek!

a) $\forall x(\alpha \vee \beta)$ és $\forall x\alpha \vee \beta$, ha x nem szabad β-ban,

b) $\exists x(\alpha \to \beta)$ és $\forall x\alpha \to \exists x\beta$.

37. Igazolja igazsághalmazok alkalmazásával, hogy $\exists x(\alpha \to \beta)$ és $\exists x\alpha \to \exists x\beta$ nem ekvivalensek logikailag, de $\exists x\alpha \to \exists x\beta \vDash \exists x(\alpha \to \beta)$ teljesül!

38. Párosítsa össze a bal és jobb oldali oszlopból a logikailag ekvivalens formulákat!

$\exists x\,Px \wedge \exists x\,Qx$	$\exists y(Py \wedge \forall x\,Rxy)$
$\exists x\,Px \wedge \forall y\,Qy$	$\forall z(Pz \to \exists u\,Ruz)$
$\exists x(Px \wedge \forall y\,Rxy)$	$\exists x\,Px \wedge \exists y\,Qy$
$\forall x(Px \to \exists y\,Rxy)$	$\forall y \exists z\,Ryz \to \exists w\,Pw$
$\forall x(Px \to \exists y\,Ryx)$	$\exists u(Pu \wedge \forall w\,Ruw)$
$\forall y(\exists z\,Ryz \to Py)$	$\exists z\,Pz \wedge \forall z\,Qz$
$\exists x(Px \wedge \forall y\,Ryx)$	$\forall x(\exists y\,Rxy \to Px)$
$\forall x \exists y\,Rxy \to \exists x\,Px$	$\forall x(Px \to \exists z\,Rxz)$

39. Ekvivalensek-e logikailag a következő formulapárok? Ha nem, akkor következménye-e az egyik a másiknak?

a) $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta)$ és $\forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta$

b) $\exists x(\alpha \leftrightarrow \beta)$ és $\exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta$

c) $\forall x \exists x\alpha$ és $\exists x\alpha$

d) $\forall x\alpha$ és $\exists x \forall x\alpha$

40. Alakítsa át *pozitívvá* a Cauchy-konvergenciakritérium, illetve az a-beli folytonosság tagadásának alábbi formalizálásait (azaz alakítsa át őket olyan formulákká, amelyekben negáció csak literálokban szerepel).

a) $\neg\forall\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists N(TN\wedge\forall n\forall m(Tn\wedge Tm\wedge n>N\wedge m>N\to|a(n)-a(m)|<\varepsilon)))$

b) $\neg\forall\varepsilon(\varepsilon>0\to\exists\delta(\delta>0\wedge\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon)))$

2.3 Normálformák

41. Hozza konjunktív normálformára a következő formulákat!

a) $(\neg Pax \to Qfy) \to (\neg Qb \to Pxy)$

b) $(Rxy \to A) \to ((B \to \neg Pax) \to \neg Rxfx)$

c) $(Rab \to Qfx \wedge Pb) \leftrightarrow (\neg(Rxfy \to Py \to Qb) \vee Px)$

42. Hozza a következő formulákat először prenex, majd erős Skolem-formára!

a) $\exists x(Rxy \vee \neg\forall y\,Sy) \to (\neg\exists y\,Sy \wedge \forall z\,Sz)$

b) $\forall x\,Rxy \wedge (\neg Sz \vee \neg\forall z\,Rxz)$

c) $\forall x\forall y(\exists z\,Rxz \to \exists u\,Txyu)$

d) $\forall x\forall y(\exists z\,Txyz \wedge (\exists u\,Qxu \to \exists u\,Qyu))$

e) $\forall u(\exists y\,Quy \vee \neg\exists x\forall y\,Qxy)$

f) $\forall y(\exists x\,Rxy \to Qyz) \wedge \exists y(\forall z\,Lzy \vee Qxy)$

g) $\forall x\exists y\,Qxy \vee \exists x\forall y\,Rxy \wedge \neg\exists x\exists y\,Lxy$

h) $\neg(\forall x\exists y\,Qxy \to \exists x\exists y\,Rxy) \wedge \forall x\neg\exists y\,Lxy$

i) $\forall x\forall y(\exists x\,Px \to \neg\exists u(\exists u\,Qxu \to Qyu))$

j) $\exists x\forall y\,Rxy \to \exists x(Pfx \to \forall y(Rxy \vee B)) \to \exists x\,Qxa$

k) $\forall y(\exists x\forall x\,Rxy \to \exists x\forall x\,Qxy) \vee \forall y\exists x(Qxy \to Lxy)$

l) $\forall x(\forall y\neg\exists z\,Txyz \to \neg(\exists y\exists z\,Vxyz \vee Sx))$

m) $\exists y\forall x(\exists x\forall x\,Rxy \leftrightarrow \forall y\exists y\,Qxy)$

n) $\exists x(\forall x\,Rxy \to \forall y(Qxy \to Lxy))$

43. Hozza először prenex, majd erős Skolem-formára a következő halmazelméleti tulajdonságokat!

a) $\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y)))$

b) $\forall x\exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists v(z \in v \wedge v \in x))$

2.4 Redukciós tételek

A **44–46.** *feladatoknál alkalmazza a kompaktsági tételt!*

44. Igazolja, hogy ha egy formulahalmaznak létezik tetszőleges nagy véges modellje, akkor van végtelen modellje!

45. Igazolja, hogy a körmentes gráfok osztálya nem axiomatizálható végesen!

46. Igazolja, hogy egy gráf akkor és csak akkor színezhető k színnel, ha minden véges részgráfja színezhető k színnel!

47. Tegyük fel, hogy a φ mondat igaz valamely Γ mondathalmaz minden modelljén. Igazolja, hogy van olyan $n \in \omega$, hogy φ igaz Γ-nak minden legfeljebb n elemű modelljén.

48. Egy $\mathcal{H}$ Herbrand-modellen a következők az igaz formulák:

$$Q(a),\ Q(f(a)),\ Q(f(f(a))),\ S(a,f(a)),\ S(a,f(f(a))),$$

ahol f egyváltozós függvényjel, a individuumkonstans, Q, illetve S pedig egy-, illetve kétváltozós relációjelek. Igazak-e a következő formulák $\mathcal{H}$-n?

a) $\forall x(Q(x) \to S(x,f(x)))$

b) $\forall x(Q(x) \to \exists y\, S(x,y))$

c) $\exists x(Q(x) \wedge S(x,f(x)))$

49. Egy $\mathcal{H}$ Herbrand-modellen a következők az igaz formulák:

$$R(a,b),\ R(a,f(b)),\ R(a,f(f(b)),\ldots,$$
$$S(a,b),\ S(f(a),b),\ S(f(f(a)),b),\ldots,$$

ahol f egyváltozós függvényjel, a individuumkonstans, Q, illetve S pedig egy-, illetve kétváltozós relációjelek.

Mit állíthatunk a következő formulák igazságáról $\mathcal{H}$-n?

a) $\forall x \forall y(S(f(x),x) \wedge R(y,f(y)))$

b) $\forall x(R(a,f(x)) \to S(f(x),b))$

c) $\forall x(R(x,f(b)) \to S(f(x),b))$

d) $\forall x(R(x,f(b)) \to \exists y\, S(x,y))$

e) $\forall x(R(x,f(b)) \to \forall y\, S(x,y))$

3. A bizonyításelméletről

3.2 Analitikus fák

1. Igazoljuk analitikus fákkal, hogy az alábbi következmények fennállnak!

a) $\{P \to Q,\ \neg R \to \neg Q,\ R \to \neg S\} \vDash S \to \neg P$

b) $P \to \neg Q \vDash P \to (Q \to R)$

c) $\{P \wedge Q \to R,\ R \wedge S \to T,\ Q\} \vDash P \wedge S \to R \wedge T$

d) $\forall x \exists y (Px \to Sxy) \vDash \forall x (Px \to \exists y Sxy)$

e) $\exists x Px \to Qa \vDash \forall x (Px \to Qa)$

f) $\{\exists x (Px \wedge Qx),\ \forall x (Qx \to Rx)\} \vDash \exists x (Px \wedge Rx)$

g) $\{\forall x Sxax,\ \forall x \forall y \forall z (Sxyz \to Sxfyfz)\} \vDash \forall x Sfxfaffx$

h) $\{\forall x \forall y (Px \wedge Py \to Sxy), \forall x (Qx \to Pfx), \forall x (Rx \to Pgx), \forall x Rx, \exists x Qx\} \vDash \exists x Sfxgx$

i) $\{\exists x (Px \wedge \forall y (By \to Cxy)),\ \forall x (Px \to \forall y (Qy \to \neg Cxy))\} \vDash \forall x (Bx \to \neg Qx)$

2. Igazolja, hogy az alábbi formulák azonosan igazak!

a) $((B \to A) \wedge (C \to A)) \to ((B \vee C) \to A)$

b) $\neg \exists x \forall y (Sxy \leftrightarrow \neg Sxy)$

c) $\forall x \exists y (Qxy \vee \forall z \neg Qxz)$

d) $\forall x \exists y (Pxy \to \forall z Rz \to \forall x \exists y \forall w (Pxy \to Rw))$

3. Igazolja analitikus fákkal a következőket!

a) $\{\forall x (Px \to \exists y Qxy),\ \exists y \neg Qay\} \nvDash \neg Pa$

b) $\{\forall x (Px \to \exists y Ty),\ \exists x Px\} \nvDash \exists x (Px \wedge Tx)$

c) $\exists x (\alpha \to \beta) \nvDash \exists x \alpha \to \exists x \beta$

d) $\forall x \alpha \to \forall x \beta \nvDash \forall x (\alpha \to \beta)$

4. Vizsgálja analitikus fákkal, hogy kielégíthetőek-e a következő formulahalmazok! Ha igen, akkor adja meg egy-egy modelljüket!

a) $\{P \wedge Q, \neg(Q \to R), \neg P \wedge \neg R\}$

b) $\{\forall x \exists y (Px \to Rxy), \exists x \forall y \neg(Px \to Rxy)\}$

c) $\{\exists x \forall y (Py \to Rxy), Pa, \forall x \neg Rxa\}$

d) $\{\forall x (Px \to Qx), \exists x (Qx \wedge Sx), \forall x (\neg Px \vee \neg Sx)\}$

e) $\{\neg \forall y (\exists y Py \to Py)\}$

f) $\{\exists x \forall y Rxy \wedge \exists x \forall y Lxy, \forall x \exists y \neg(Rxy \vee Lxy)\}$

5. Igazolja analitikus fával, hogy a $\exists x \forall y \neg(Px \to Py)$ formula érvénytelen!

6. Igazolja analitikus fák segítségével, hogy a 2. fejezet **28–34.** feladatoknál felsorolt következtetések helytelenek!

Az alábbi **7–9.** *feladatoknál formalizálja a megadott következtetéseket a zárójelben megadott atomi formulák segítségével, és igazolja analitikus fák segítségével a következtetések helyességét!*

7. „Dékáni *utóvizsgára* akkor és csak akkor kerülhet sor, ha *betegek voltunk*, vagy egyáltalán *van dékáni engedélyünk*. Dékáni engedélyt csak akkor kapunk, ha betegek voltunk, vagy *haláleset fordult elő* a családban. Tehát ha senki sem halt meg a családban, és van dékáni engedélyünk, akkor betegek voltunk." (U, B, E, H.)

8. „Egy gyümölcs pontosan akkor *csonthéjas*, ha *almaféle*, vagy *körteféle*. A *bogyók* nem lehetnek csonthéjasak. Tehát nincs olyan gyümölcs, amelyik körteféle és bogyó." (Cx, Ax, Kx, Bx.)

9. „Csak akkor tudunk *másokat elfogadni*, ha saját magunkat el tudjuk fogadni. Vannak emberek, akik nem tudnak saját magukkal kibékülni. Tehát vannak olyanok, akik senkit sem tudnak elfogadni." (Exy)

10. Mutassa meg analitikus fák segítségével, hogy a

$$\forall x (x + 0' = x) \quad \text{és} \quad \forall x \forall y \forall z (x + y = z \to x + (y + 1') = z + 1')$$

axiómákból következik, hogy $1' + 1' = 2'$, ahol $S0' = 1'$ és $S1' = 2'$
(használja az $M(x, y, z) := x + y = z$ relációt)!

3.3 Rezolúció

11. Vizsgálja meg, hogy illeszthetőek-e a következő klózhalmazok?

a) $\{F(a,g(x)),\ F(y,b)\}$

b) $\{F(x,f(a,x)),\ F(f(a,y),z)\}$

c) $\{H(f(a),g(a,y)),\ H(x,g(x,f(a)))\}$

d) $\{F(g(h(a,x),x),x),\ F(y,g(a,z))\}$

e) $\{P(f(y,g(z)),h(b)),\ P(f(h(w),g(a)),t),\ P(f(h(b),g(z)),y)\}$

f) $\{P(h(y),a,z),\ P(h(f(w)),a,w),\ P(h(f(w)),a,u)\}$

g) $\{P(h(y),a,z),\ P(h(f(w)),a,w),\ P(h(f(a)),a,b)\}$

h) $\{P(x,g(x),y,h(x,y),z,f(x,y,z)),\ P(u,v,g(v),w,k(v,w),s)\}$

i) $\{Q(g(a),h(x),f(a,y)),\ Q(x,h(g(a)),f(y,y))\}$

j) $\{Q(g(x),h(x),f(a,y)),\ Q(y,h(g(a)),f(y,y))\}$

12. Igazolja rezolúcióval az alábbi következményeket!

a) $\{P\vee Q, P\to R\vee S, R\to T\wedge U, U\wedge\neg S\to\neg T\}\models\neg S\to Q$

b) $\{\exists x\forall y Pxy,\ \forall x\forall y(\neg Pxy\vee Qxy)\}\models\exists x\forall y Qxy$

c) $\{\forall x\forall y\forall z(\neg Rxy\vee\neg Ryz\vee Rxz),\ \forall x\forall y(\neg Rxy\vee Ryx),\ \forall x\exists y Rxy\}\models\forall x Rxx$

d) $\{\forall x S(a,x,x),\ \forall x\forall y\forall z\forall w(\neg S(x,y,z)\vee S(f(w,x),\ y,\ f(w,z)))\}\models$
$\models\forall x\forall y S(f(x,a),f(y,a),f(x,f(y,a)))$

e) $\{\forall x(Px\to\exists y Qxy),\ \forall x\forall y(Qxy\to Pfy)\}\models\forall x(Px\to\exists y Pfy)$

f) $\{\exists x(Px\wedge\forall y(Ty\to Qxy)),\ \forall x(Px\to\forall y(Wy\to\neg Qxy))\}\models\forall x(Tx\to\neg Wx)$

g) $\forall x\forall y((Rxy\to\neg Qyx)\wedge\exists z Qzx)\models\exists x\exists y\neg Rxy$

h) $\{\forall x Mx\vee\forall x Fx,\ \exists x Fx,\ \forall x(Fx\to\neg Mx)\}\models\forall x Fx$

13. Igazolja rezolúcióval, hogy az alábbi formulák azonosan igazak!

a) $((A\to B)\to\neg B)\to\neg B$

b) $(\exists x Px\to\forall x Qx)\to\forall x(Px\to Qx)$

c) $\exists x\forall y Pxy\to\forall y\exists x Pxy$

14. Igazolja rezolúcióval, hogy a következő klózhalmazoknak nincs modellje!

a) $\{P\vee R,\ \neg R\vee S,\ \neg P\vee S,\ \neg S\}$

b) $\{\neg P(x)\vee\neg T(x,y)\vee R(y),\ T(fx,gx),\ P(fa),\ \neg R(ga)\}$

c) $\{P(x)\vee Q(x),\ \neg P(fx)\vee R(x),\ \neg Q(fy)\vee S(gx),\ \neg R(a),\ \neg S(ga)\}$

d) $\{M(a,x,fy) \vee M(a,z,fhb) \vee \neg Q(y,z),\ \neg Q(hb,w) \vee H(w,a),$
$\neg M(a,w,fhb) \vee H(x,a),\ M(a,u,fhu) \vee H(u,a) \vee Q(hb,b),\ \neg H(v,a)\}$

e) $\{P(u) \vee \neg M(x,fa,fa),\ P(u) \vee M(fa,u,u),\ \neg P(u)\}$

16. Kielégíthetőek-e a következő klózhalmazok (lezárásai)?

a) $\{P \vee Q \vee R,\ \neg S,\ \neg Q \vee S,\ \neg P \vee S\}$

b) $\{\neg A(x) \vee B(x,y),\ \neg A(x) \vee B(y,y) \vee \neg B(x,y),\ Aa\}$

c) $\{H(u) \vee \neg P(x,ffa,fa),\ H(v) \vee P(fa,y,y),\ \neg H(u)\}$

d) $\{P(a,x,fgy),\ \neg P(y,fz,fz)\}$

e) $\{P(x,gcz,ty),\ \neg P(tu,gxz,u)\}$

f) $\{P(a,x,h(gz)),\ \neg P(z,hy,hy)\}$

g) $\{P(x,gb),\ \neg P(gx,y)\}$

h) $\{R(w,y) \vee Q(w,fz,z) \vee \neg R(w,w),\ R(w,z) \vee \neg Q(fw,w,z)\}$

17. Vizsgálja rezolúcióval, hogy kielégíthetőek-e a következő formulák. Ha igen, akkor adja meg egy modelljüket!

a) $\forall x \forall y \forall z((P(a,x,fgy) \wedge \neg P(x,hxz,fz) \vee A) \wedge \neg A)$

b) $\exists u \forall x \forall y \forall z(H(x) \wedge (P(x,gfu,fx) \wedge \neg P(fy,z,y) \vee \neg H(x))$

c) $\forall x \forall y(A(x) \wedge (\neg A(x) \vee Q(y,y) \vee Q(x,y)) \wedge (\neg A(x) \vee Q(y,y) \vee \neg Q(x,y)))$

d) $\exists v \forall u \forall x \forall y(H(u) \vee \neg P(x,ffa,fa) \wedge (H(v) \vee P(fa,y,y)) \wedge \neg H(u))$

18. Keresse meg a következő cáfolható klózhalmazok alapelőfordulásainak egy olyan véges részhalmazát, amelyek cáfolhatók az állításlogikában!

a) $\{P(x),\ \neg P(x) \vee R(fx),\ \neg R(fa)\}$

b) $\{P(x),\ Q(x,fx) \vee \neg P(x),\ \neg Q(gy,z)\}$

c) $\{P(x,a,g(x,b)),\ \neg P(fy,z,g(fa,b))\}$

Az alábbi **19–21.** *feladatoknál formalizálja a megadott következtetéseket a zárójelben megadott atomi formulák segítségével, és igazolja rezolúcióval a következtetések helyességét!*

19. „Ha *Pali sovány,* akkor *Karcsi* nem *fekete hajú* és *Ricsi* nem *magas*. Ha Ricsi magas, akkor *Andris* zöld szemű. Ha Andris zöld szemű és Karcsi fekete hajú, akkor Pali sovány. Karcsi fekete hajú. Tehát Ricsi nam magas.” (P, Sx, K, Fx, R, Mx, A, Zx)

20. „Nem minden Zala megyei lakos *szereti Zala megyét*. A Zala megyei lakosok közül viszont azok, akik szeretik a megyét, nem *szeretnék, ha a választásokat* a *Néppárt nyerné*, de a többi Zala megyei lakos ezt szeretné. Tehát van legalább egy Zala megyei lakos, aki szeretné, hogy a Néppárt nyerjen.” (Zx, Nx.)

21. „Ha valaki *belép* az országba és nem *diplomata,* akkor a valaki őt *átvizsgálja*. Egy hírhedt *tagja* a kábítószerbandának bejutott az országba. Ha a bandának egy tagját tisztességes *vámos* vizsgálja át, akkor a bandatag biztosan lebukik. A kábítószerbanda tagjai között nincsenek diplomaták. Tehát a vámosok között van olyan, aki tagja a bandának.” (Bx, Dx, Axy, Tx, Vx.)

22. „Nyáron egy medve vagy alszik a barlangjában, vagy vadászik. Ha éhes, akkor nem tud aludni, ha fáradt, akkor pedig nem tud vadászni.”

a) Mit csinál a medve, amikor éhes?

b) Mit csinál a medve, amikor fáradt?

Formalizálja alkalmas nyelven a premisszákat, majd rezolúció segítségével válaszolja meg a fenti kérdéseket!

23. Igazolja rezolúcióval, hogy egy Pxy reláció tranzitivitásából és szimmetriájából következik a $\forall x \forall y \forall z(Pxy \wedge Pzy \to Pxz)$ tulajdonság!

24. Reprezentálja a csoportösszeadás műveletét az $S(x, y, z)$ reláció ($S(x, y, z) := x + y = z$). Tekintsük a csoportaxiómákat a következő alakban:

(i) $\forall x \forall y \exists z\, S(x, y, z)$ (értelmezett az összeadás)

(ii) $\forall u \forall v \forall w \forall x \forall y \forall z((Sxyu \wedge Syzv) \to (Sxvw \leftrightarrow Suzw))$ (asszociativitás)

(iii) $\exists x(\forall y\, Sxyy \wedge \forall y \exists z\, Szyx)$ (balzéró és balinverz létezése)

Igazolja rezolúcióval a jobbinverz létezését, azaz azt, hogy $\exists x(\forall y\, Sxyy \wedge \forall y \exists z\, Syzx)$ következik a fenti axiómákból!

3.5 A logikai programozásról

25. Adja meg a következő logikai programokhoz tartozó Herbrand-bázist, legszűkebb Herbrand-modellt. Igazolja SLD-rezolúcióval a megadott „célt”, és adjon meg egy korrekt válasz helyettesítést, ahol ez értelmes!

a) $\{A \wedge B \wedge C \to D,\ E \wedge F \to C,\ B,\ G \wedge C \to A,\ E,\ G,\ G \to F\}$
Cél: D.

b) $\{Qy \wedge Rxy \to Sx,\ Lc \to Rbb,\ Px \to Qx,\ Pb,\ Lc\}$
Cél: $\exists x\, Sx$

c) $\{Sx \wedge Nb \to Mx,\ Sx \wedge Nx \to Mx,\ Lx \to Sx,\ Qy \wedge Rxy \to Sx,\ Px \to Qx,$ $Pb,\ Rab,\ Lc,\ Na\}$,
Cél: Ma

d) $\{Rx \to Rfx,\ Ra,\ Rb\}$
Cél: $\exists x\, Rfx$

e) $\{Qy \wedge Rxy \to Sx,\ Px \to Qx,\ Pb,\ Rab\}$
Cél: Sa

26. A **11.** feladathoz kapcsolódóan igazolja, hogy $n' + m' = r'$, ha $n + m = r$, ahol n', m' és r' az n, m és r természetes számok nevei a nyelvben és $S0' = 1'$, $S1' = 2', \ldots S(n-1)' = n'$.

27. Tekinthetők-e a következő definíciók PE definícióknak (pozitív egzisztenciális induktív definícióknak)? Ha igen, akkor adja meg rendre a legkisebb Herbrand-modellt!

a) $RSx \leftrightarrow Rx$

b) $RSx \wedge \neg Rx \leftrightarrow Rx$

c) $x = 0 \vee RSx \leftrightarrow Rx$

d) $x = 0 \wedge RSx \leftrightarrow Rx$

e) $x = 0 \vee \exists y(x = Sy \wedge Ry) \leftrightarrow Rx$

28. Tekintsük a következő PE definíciót!

$$x = 0 \vee \exists y(x = SSSy \wedge Ry) \leftrightarrow Rx$$

a) Határozzuk meg a legszűkebb Herbrand-modellt, $\mathcal{H}$-t!

b) Vezessük le formálisan, hogy $SSSSSS0$ eleme R interpretációjának $\mathcal{H}$-n!

Az alábbi **29–31.** *feladatoknál formalizálja a megadott következtetéseket a zárójelben megadott atomi formulák segítségével, és igazolja a következtetések helyességét SLD-rezolúcióval!*

29. „Ha *esik*, akkor a *kirándulás elmarad*. Ha a kirándulás elmarad, akkor *múzeumba megyünk*. Ha múzeumba megyünk, és esni fog, akkor *autóbusszal megyünk*. Ha autóbusszal megyünk, akkor *pénzre is lesz szükség*. Esni fog az eső. Tehát szükségünk lesz pénzre."(E, K, M, A, P.)

30. „Ha Péter *megkapja az ösztöndíjat*, akkor *be tudja fejezni* ezen a szakon az egyetemet. Megkapta az ösztöndíjat. Ha valaki elvégzi azt a szakot, amelyet *Péter* végez, akkor biztosan *kap munkát*. Tehát lesz valaki, aki elvégzi ezt a szakot, és munkát is kap." (Ox, Fx, p individuumkonstans, Mx.)

31. „Ha Spicces Ottó be van csípve, akkor jókedvű. Ha éhes, akkor eszik. Ha énekel és nevet, akkor be van csípve. Ha eszik és TV-t néz, akkor jókedvű. Ha boldog és iszik, akkor TV-t néz. Ha pénze van, akkor iszik. Ha énekel, akkor boldog. Ha boldog, akkor van pénze. Az biztos, hogy most éhes. Most éppen énekel."
Alkalmas nyelvet választva formalizálja a fenti premisszákat, majd SLD-rezolúció segítségével vizsgálja, hogy Spicces Ottó

a) be van-e éppen csípve,

b) jókedvű-e?

4. Modellelmélet

4.1 Nevezetes axiómarendszerek. Modellmódszer

1. Ellentmondástalanok-e a következő formulák, illetve formulahalmazok? Ha igen, akkor adja meg egy modelljüket!

a) $\{P \to Q \wedge R,\ Q \to S,\ R \to S,\ \neg(P \to S)\}$

b) $\{(P \to Q) \to (Q \to P),\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee Q,\ \neg(P \vee Q) \vee \neg Q\}$

c) $\{\forall x(\neg Px \vee Lx),\ \forall x(\neg Lx \vee Rx),\ \exists x(Lx \wedge \neg Rx)\}$

d) $\{\forall x\, Sxx,\ \forall y(Tay \leftrightarrow \forall x(Sxy \to Dax)),\ \exists x(Tax \wedge \neg Dax)\}$

e) $\exists x \forall y(Qxx \wedge \neg Qxy)$

f) $\neg \forall x(Px \to \forall y(Py \to ((Qx \to \neg Qy) \vee \forall z\, Pz)))$

g) $\forall x \exists z \forall y(((Py \wedge Lz) \to (Px \vee Rz)) \to (Lx \leftrightarrow \neg Qy))$

h) $\{\forall x \exists y(\neg Px \vee Qxy),\ \exists x\, Px,\ \forall x \forall y \neg Qxy\}$

2. Igazolja, hogy a $\forall x \exists y\, Pxy$ formula független a

$$\{\forall x \forall y(Pxy \to \neg Pyx),\ \forall x \forall y \forall z(Pxy \to (Pyz \to Pxz))\}$$

axiómarendszertől!

3. Függetlenek-e rendre a

a) $\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx \vee x = y)$ (linearitás)

b) $\forall x \exists y\, Rxy$

c) $\forall x \exists y(x \neq y \wedge Rxy \wedge \forall z(Rxz \wedge Rzy \to x = z \vee y = z))$

tulajdonságok attól, hogy az R reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

4. Független-e az a tulajdonság, hogy egy R reláció „reflexív vagy irreflexív” attól, hogy R lineáris?

5. Akkor mondjuk, hogy egy R reláció *ciklikus*, ha rendelkezik a $\forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Ryz \to Rzx)$ tulajdonsággal. Független-e az, hogy R ciklikus és reflexív rendre attól, hogy

a) tranzitív,

b) lineáris.

6. Igazolja, hogy az inverz létezését garantáló csoportaxióma független a többi csoportaxiómától!

7. Függetlenek-e rendre a következő tulajdonságok a csoportaxiómáktól?

a) $\forall x(x+x+x=0 \to x=0)$

b) $\forall u \forall x \forall y(ux=uy \to x=y)$

8. Független-e a gyűrűaxiómáktól a $\forall x(x^2=0 \to x=0)$ tulajdonság?

9. Tekintse a teljes indukciós sémától megfosztott Peano-axiómarendszert, Π-t (lásd 3.1 rész). Igazolja, hogy a Π-beli alábbi axiómák rendre függetlenek a többi axiómától!

a) $\forall x(Sx \neq 0)$

b) $\forall x \forall y(Sx=Sy \to x=y)$!

10. Függetlenek-e a Boole-axiómáktól a következő tulajdonságok?

a) $\forall x \forall y(xy=0 \to x=0 \vee y=0)$

b) $\forall x \forall y(x \neq y \to \exists z(z \neq 0 \wedge z+x=z+y))$

c) $\forall x \forall y z(x \neq y \wedge z \neq 0 \to zx \neq zy)$

11. Tétele-e a 0 karakterisztikájú, algebrailag zárt testek elméletének a $\forall x \forall y(x^2+y^2 \neq -1)$ tulajdonság?

12. Mutassa meg, hogy a következő axiómarendszerek inkomplettek!

a) félcsoportok

b) csoportok

c) kommutatív testek

d) Boole-algebrák

4.2 Standard és nemstandard modellek

13. Igazolja a Łoś–Vaught-teszt segítségével, hogy a következő axiómarendszer komplett!

(i) $\forall x\, Sx \neq 0$

(ii) $\forall x \forall y(y \neq 0 \to \exists x(y=Sx))$

(iii) $\forall x \forall y(Sx=Sy \to x=y)$

(iv) $\forall x(SSS\dots Sx \neq x)$, S tetszőleges számú véges sok alkalmazására, ahol S a rákövetkezés operátor.

14. Mutassa meg, hogy az 1 végponttal rendelkező, de másik irányban nem korlátos

a) diszkrét rendezés,

b) sűrű rendezés

elmélete komplett! Adjon példákat ilyen elméletek nemstandard modelljeire!

15. Mutassa meg, hogy a két végponttal rendelkező
a) sűrű rendezés komplett,
b) diszkrét rendezés inkomplett!

16. Igazolja, hogy a sűrű rendezések elméletének 4 komplett kiterjesztése van, és ezek η, $\eta + 1$, $1 + \eta$ és $1 + \eta + 1$ elméletei, ahol η a racionális számok rendezése.

17. Jelölje ω, ω^*, β, η és λ rendre a természetes számok, a negatív egész számok, az egész számok, a racionális számok és a valós számok szokásos rendezését.
Elemien ekvivalensek-e, illetve izomorfak-e a következő rendezések?

a) λ és $\lambda + \lambda$

b) ω és $\omega + \omega^* + \omega$

c) η és $\eta \cdot \eta$

d) η és $\eta \cdot \beta$

e) ω és $\omega + \omega$

f) $\omega \cdot \omega^*$ és $\omega^* \cdot \omega$

g) $\beta \cdot \omega^*$ és $\omega^* \cdot \beta$

h) $\eta + 1 + \eta$ és η

i) $\eta + 2 + \eta$ és η

j) $\eta + \eta$ és η

k) $\omega \cdot \eta$ és $\omega \cdot (\eta + 1)$

l) $\lambda + 1 + \lambda$ és λ

18. Legyen n négyzetmentes rögzített természetes szám. Legyen az algebra alaphalmaza n osztóinak összessége. A $+$ művelet legyen a legkisebb közös többszörös, a $\cdot$ művelet a legnagyobb közös osztó képzése, a $-k$ művelet értéke legyen n/k, az egység legyen n, a null elem pedig legyen 1.
Igazolja, hogy az így nyert algebra Boole algebra! Mi a $<$ jelentése?

19. Igazolja, hogy $a \cdot (b + c) \simeq a \cdot b + a \cdot c$ tetszőleges a, b és c rendezésekre, de $(b + c) \cdot a \simeq b \cdot a + c \cdot a$ nem feltétlenül teljesül (itt $+$, illetve $\cdot$ a rendezések összeadását, illetve szorzását jelöli)!

20. Léteznek-e olyan a, b és c rendezések, hogy c nem izomorf b-vel, de

a) $a + c \simeq a + b$,

b) $a \cdot c \simeq a \cdot b$.

21. Legyen γ az irracionális számok rendezése. Igazolja, hogy a következő rendezéspárok izomorfak!

a) $\gamma + \gamma$ és γ

b) $\gamma + 1 + \gamma$ és γ

22. Igazolja, hogy az algebrai számok teste nem elemien ekvivalens a valós számok testével!

Az alábbi **23–24.** *feladatokban $\mathcal{P}$ hatványhalmazképzést, $\subset$ pedig szigorú tartalmazást jelöl.*

23. Tekintsük a $\langle \mathcal{P}(H), \subset \rangle$ struktúrát. Kielégíti-e a diszkrét, illetve sűrű rendezések axiómáit ez a struktúra, ha H

a) az egész számok,

b) a racionális számok

halmaza?

24. Elemien ekvivalensek-e, illetve izomorfak-e a következő struktúrapárok?

a) $\langle$valós számok, $+$, $\cdot\rangle$ és $\langle$komplex számok, $+$, $\cdot\rangle$

b) $\langle \mathcal{P}$(egész számok), $\subset \rangle$ és $\langle \mathcal{P}$(racionális számok), $\subset \rangle$

4.3–4.4 Modellkonstrukciók, karakterizációs tételek

25. Vizsgálja meg, hogy teljesülnek-e az $N \equiv M$ (elemi ekvivalencia), $\mathcal{N} \simeq M$ (izomorfia), illetve $\mathcal{M} \leq N$ (elemi rész) relációk az $\mathcal{N} = \langle N, < \rangle$ és $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ struktúrákra, ahol N a természetes számok halmaza, és

a) M a pozitív egészek halmaza,

b) M a páros pozitív egészek halmaza.

26. Igazolja, hogy ha az

a) ultraszorzat tagjai legfeljebb n eleműek, akkor az ultraszorzat is legfeljebb n elemű,

b) ultraszorzat tagjai végtelenek, akkor az ultraszorzat is végtelen,

c) ultraszorzat tagjai véges kivétellel legalább n eleműek, és az ultraszűrő nem fő ultraszűrő, akkor az ultraszorzat végtelen.

27. Igazolja, hogy rendezett halmazok ultrahatványa is rendezett!

28. Igazolja a 2.4-beli **44–46.** feladatokat ultraszorzatok alkalmazásával!

29. Igazolja, hogy a következő struktúraosztályok zártak az elemi ekvivalenciára és az ultraszorzatképzésre!

a) rendezések

b) csoportok

c) Boole-algebrák

d) 0 karakterisztikájú testek

e) algebrailag zárt testek

f) az egyenlőség elméletének végtelen modelljei

30. Igazolja, hogy a következő osztályok EC_Δ-beli osztályok, de nem elemi osztályok!

a) végtelen csoportok

b) végtelen rendezett halmazok

c) 0 karakterisztikájú testek

d) algebrailag zárt testek

e) valósan zárt testek

31. Igazolja, hogy a következő osztályok nem alkotnak EC_Δ osztályt!

a) véges Abel csoportok

b) ciklikus csoportok

c) szabad csoportok

d) egyszerű csoportok

e) véges karakterisztikájú testek

f) archimedesi testek

32. Igazolja, hogy a következő osztályok zártak a direkt szorzat képzésére!

a) félcsoportok, amelyekben igaz a $\forall x \forall y \forall z (xy = xz \to y = z)$ egyszerűsítési szabály,

b) kommutatív gyűrűk, amelyekre igaz a $\forall x (x^2 = 0 \to x = 0)$ tulajdonság.

33. Igazolja, hogy a következő osztályok zártak a direkt szorzat-, homomorfizmus- és részalgebraképzésre!

a) csoportok

b) gyűrűk

c) Boole-algebrák

34. Igazolja, hogy az alábbi struktúraosztályok nem varietások (tehát nem axiomatizálhatók azonosságokkal)!

a) testek

b) nem egyszerű csoportok

c) végtelen Boole-algebrák

35. Igazolja, hogy a legalább n elemű halmazok összessége nem pozitív osztály!

5. Klasszikus logikák, modális logika

5.1–5.2 Másodrendű logika, többfajtájú logika

1. Válasszon rendre alkalmas nyelveket, és formalizálja az alábbi, idézőjelben szereplő tulajdonságokat!

a) Legyen H és K a valós számoknak két *rögzített*, nem üres diszjunkt részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy H bármely eleme kisebb K bármely eleménél. „Létezik olyan valós szám, amely H bármely eleménél nem kisebb, de K bármely eleménél nem nagyobb.”

b) Legyen H és K a valós számoknak két *tetszőleges*, nem üres diszjunkt részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy H bármely eleme kisebb K bármely eleménél. „Létezik olyan valós szám, amely H bármely eleménél nem kisebb, de K bármely eleménél nem nagyobb.”

c) Legyen H és K a $\{0, 1, 2\}$ halmaznak két *tetszőleges*, nem üres diszjunkt részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy H bármely eleme kisebb K bármely eleménél. „Létezik olyan valós szám, amely H bármely eleménél nagyobb, de K bármely eleménél kisebb.”

2. Formalizálja azt a tulajdonságot, hogy a természetes számok halmaza *jólrendezett*

a) egyetlen formulával, másodrendű logikát használva,

b) végtelen sok formulával, alkalmas kontinuum számosságú elsőrendű nyelvet használva.

3. Fogalmazza meg, majd formalizálja másodrendű nyelvet használva az alábbi gráftulajdonságokat!

a) Egy gráf x csúcsából az y csúcs elérhetetlen.

b) Létezik a gráfban olyan irányított út, amely minden csúcsot pontosan egyszer érint (ezzel ekvivalens az, hogy létezik a gráfnak lineáris rendezése).

4. Definiálja másodrendű nyelv alkalmazásával a következő relációkonstansokat!

a) valós függvények folytonossága ($C(x)$)

b) valós számsorozatok konvergenciája ($K(x)$)

c) halmazok zártsága ($Z(x)$)

5. Fogalmazza meg, majd alkalmas többfajtájú logika segítségével formalizálja az alábbi definíciókat!

a) valós számsorozat konvergenciája

b) valós függvény sorozat konvergenciája

c) halmaz torlódási pontja

6. Fogalmazza meg, majd formalizálja többfajtájú logika segítségével a metrikus tér axiómáit!

7. Egészítse ki a vektortér axiómáit a normált tér axiómáival, és formalizálja az egész axiómarendszert többfajtájú logika segítségével!

8. Egészítse ki a Boole-axiómákat a (végesen additív) valószínűségi mérték axiómáival, és formalizálja az egész axiómarendszert többfajtájú logika segítségével!

9. A 2.1 rész 17. feladatban válassza ki azokat az állításokat, amelyek alkalmasak arra, hogy többfajtájú logikával formalizáljuk őket, és végezze el a formalizálást!

5.3 Modális logika

10. Igazolja a következő modális formulasémák érvényességét!

a) $\Box(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \Diamond(\alpha \vee \neg\alpha)$

b) $\Box\alpha \wedge \Box\beta \leftrightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$

c) $\Box\alpha \vee \Diamond\neg\alpha$

d) $\Box\alpha \vee \Diamond(\beta \vee \neg\beta)$

e) $\forall x \Box\varphi(x) \to \exists x \Box\varphi(x)$

f) $\Box\forall x \varphi(x) \to \forall x \Box\varphi(x)$

g) $\Box\Box((\psi \vee \forall x \varphi(x)) \to \forall x(\psi \vee \varphi(x)))$, ahol x nem szabad ψ-ben

h) $\neg\Diamond(\neg(\psi \wedge \exists x \varphi(x)) \wedge \exists x(\psi \wedge \varphi(x)))$, ahol x nem szabad ψ-ben *i)* $\Box\exists x(\psi \wedge \varphi(x)) \to \Box(\psi \wedge \exists x\varphi(x))$, ahol x nem szabad ψ-ben

j) $\Diamond\exists x(\varphi(x) \to \Box\psi) \to \Diamond(\forall x\varphi(x) \to \Box\psi)$, ahol x nem szabad ψ-ben

11. Igazolja az 5.3 alfejezet 6. Tétel még nem bizonyított állításait!

12. Igazolja, hogy a következő formulák nem érvényesek!

a) $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
b) $\forall x\neg\Box\alpha \to \neg\Box\exists x\alpha$

13. Igazolja az alábbi következményeket!

a) $\alpha \vDash \Box\alpha$

b) $\alpha \to \Box\alpha \vDash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

c) $\forall x\varphi(x) \vDash \Box\forall x\varphi(x)$

14. Igazolja, hogy az alábbi következmények helytelenek!

a) $\Box\alpha \vDash \alpha$
b) $\Box\alpha \to \alpha \vDash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

15. Igazolja, hogy a következő formulák érvényesek $S4$-ben!

a) $\Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

b) $\Box\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\Box\Diamond\alpha$

c) $\Box\alpha \to \Box\Diamond\Box\alpha$

d) $\Box\Diamond\Box\alpha \to \Box\Diamond\alpha \wedge \Diamond\Box\alpha$

e) $\Box\Diamond\alpha \vee \Diamond\Box\alpha \to \Diamond\Box\Diamond\alpha$

f) $\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$

16. Igazolja, hogy a következő formulák érvényesek $S5-$ben!

a) $\Box\Diamond\alpha \leftrightarrow \Diamond\alpha$

b) $\Diamond\Box\alpha \leftrightarrow \Box\alpha$

17. Igazolja az 5.3 alfejezet 8. Tétel még nem bizonyított állításait!

18. Tekintsük a következő relációtulajdonságot:

$$\forall s\forall t\forall u(Rst \wedge Rsu \to Rtu \vee t = u \vee Rut)$$

(„gyengén összeköthetőség”) és a következő modális tulajdonságot:

$$\Diamond\Box\alpha \to \Box\Diamond\alpha$$

Igazolja, hogy az 5.3 alfejezet 8. Tétel állítása kiterjeszthető erre a tulajdonságpárra!

6. Logika és a matematika egyéb területei

6.1 Algebrai logika (Boole-algebrák és logika)

1. Igazolja logikai „fordítás” segítségével a következő Boole-algebrai azonosságokat!

a) $(a+b)(b+c)(c+a)=ab+bc+ac$

b) $a(-(a(-b)))=b(-(b(-a)))$

c) $(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)=ad+bc$

2. Igazolja Boole-algebrák alkalmazásával, hogy a következő formulák érvényesek!

a) $(\neg P\to\neg Q)\to(Q\to P)$

b) $(P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R))$

c) $(P\to Q)\vee(P\to\neg Q)$

d) $(P\to R)\to((Q\to R\to((P\vee Q)\to R)))$

3. Modellezze és oldja meg Boole-algebrák segítségével a következő feladatokat:
2.1 rész **13., 14.** és 2.2 rész **1.** a), b), c), **12.** a), **13.** a), **19.**

4. Igazolja Boole-algebrák alkalmazásával a következő logikai ekvivalenciákat!

a) $(A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)\leftrightarrow A$

b) $A\vee(\neg A\wedge B)\leftrightarrow A\vee B$

c) $A\wedge(A\vee C)\wedge(B\vee C)\leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

d) $(A\to\neg A)\leftrightarrow\neg A$

6.3 A nemstandard analízisről

5. Igaz-e, hogy bármely két nemstandard valós szám között van egy nemstandard és egy standard valós szám is?

6. Mutassa meg, hogy

a) a nemstandard valós számok rendezése ${}^*\leq$-ra nézve sűrű, végpont nélküli rendezés,

b) a nemstandard egész számok rendezése ${}^*\leq$-ra nézve diszkrét, végpont nélküli rendezés.

7. Jólrendezés-e a nemstandard természetes számok rendezése ${}^*\leq$-ra nézve?

8. Igazolja, hogy ${}^*Q$ sűrű ${}^*R$-ban, azaz minden nemstandard valós szám infinit közel esik valamely nemstandard racionális számhoz!

9. Legyen N, Q és R rendre a standard természetes számok, racionális számok és a valós számok halmaza. Igazolja, hogy

a) $c \leq |{}^*N|$,

b) $c \leq |{}^*Q|$,

c) $|{}^*R| = c$,

ahol c jelöli a kontinuum számosságot!

10. Mutassa meg, hogy egy nemstandard (a_n) valós számsorozat tagjainak számossága lehet kontinuum!

11. Igazolja, hogy ha az $F(x)$ valós függvény

a) invertálható, akkor ${}^*F(x)$ kiterjesztése is invertálható,

b) folytonos, akkor ${}^*F(x)$ kiterjesztése is folytonos.

12. Igazolja, hogy az $F(x)$ valós függvény akkor és csak akkor korlátos R-en, ha ${}^*F(x)$ csak véges értékeket vesz fel ${}^*R$-on!

13. Igazolja, hogy ha $F(x)$ invertálható valós függvény, és r nemstandard szám, akkor az ${}^*F(r)$ érték is nemstandard!

14. Igazolja, hogy a másodfokú egyenleteknek a nemstandard számok körében is vagy 2, vagy 1 valós gyöke van, vagy nincs gyöke!

15. Igazolja nemstandard analízis segítségével, hogy valós függvények differenciálhatóságából következik ezen függvények folytonossága!

16. Legyen r végtelen szám. Léteznek-e a következő értékek? Ha igen, akkor egyértelműek-e, és mivel egyenlőek?

a) $^*\mathrm{arctg}\, r$

b) $^*\sin r$

17. Igazolja a Cauchy-konvergenciakritérium következő változatát nemstandard számokra: „Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $a_n \sim a_m$ bármely végtelen n és m természetes számpárra”!

18. Igazolja nemstandard analízis segítségével, hogy minden standard korlátos valós (a_n) számsorozatnak van torlódási pontja!

19. Lehet-e egy nemstandard konvergens (a_n) valós számsorozatnak standard szám a határértéke?

20. Igazolja, hogy ha egy végtelen természetes szám osztható minden véges prímmel, akkor osztható egy végtelen prímmel is!

21. Lehetséges-e, hogy két végtelen természetes szám legnagyobb közös osztója véges?

22. Mutassa meg, hogy az ikerprímsejtés (végtelen sok szomszédos prímszám létezik) ekvivalens a következővel: „Létezik egy végtelen ikerprímpár, azaz létezik egy végtelen p prím, hogy $p + 2$ is prím”.

6.4 A halmazelmélet alapjairól

23. Igazolja, hogy ZF-ben teljesülnek a következők!

a) $\forall x \neg(x \in x)$

b) $\forall x \forall y \neg(x \in y \wedge y \in x)$

24. Formalizálja a halmazelmélet nyelvén a következőket, és ezzel igazolja, hogy halmazok!

a) az x és y halmazokból képzett rendezetlen pár

b) az x és y halmazokból képzett rendezett pár

c) egy reláció függvény

d) adott függvény értékkészlete

f) két halmaz direkt szorzata

25. *a)* Igazolja, hogy a rendszámok összessége valódi osztály.

b) Igazolja, hogy az azonos számosságú halmazok összessége valódi osztály.

Az alábbi **26–39.** *feladatokban adott H halmazokra határozza meg rendre a szereplő halmazok számosságát.*

26. H az algebrai számok halmaza.

27. H azon 0 és1 közötti valós számok halmaza, amelyek végtelen tizedestört kifejtésében végtelen sok 3-as jegy szerepel.

28. H a természetes számok véges részhalmazai.

29. H a végtelen 0–1 sorozatok összessége.

30. H a természetes számok sorozatainak összessége.

31. H a monoton növekvő valós sorozatok összessége.

32. H a természetes számok permutációinak összessége.

33. H a valós számsorozatok összessége.

34. H a valós függvények összessége.

35. H egy valós függvény lokális maximum értékeinek halmaza.

36. H egy valós monoton függvény szakadási pontjainak halmaza.

37. H a valós folytonos függvények összessége.

38. H a természetes számokon értelmezett ekvivalenciarelációk összessége.

39. H a természetes számokon értelmezett rendezési relációk összessége.

40. A 4.1 rész **17.** feladatánál vizsgálja meg valamennyi rendezéspár esetére, hogy az egyes rendezésekhez tartozó rendtípusok egyenlőek-e vagy sem!

41. Adja meg a Peano-axiómáknak egy halmazelméleti modelljét!

42. Igazolja, hogy létezik a természetes számok részhalmazainak olyan kontinuum számosságú $\{H_i\}$ rendszere, hogy bármely $i \neq j$-re a $H_i - H_j$, $H_j - H_i$, és $H_i \cap H_j$ halmazok számossága is megszámlálhatóan végtelen!

43. Adjon meg a természetes számok halmazán olyan kontinuum sok H_i részhalmazt, hogy bármely két különböző i-re és j-re $H_i \subseteq H_j$ vagy $H_j \subseteq H_i$ teljesüljön (azaz a H_i halmazrendszer tartalmazkodó halmazrendszer legyen)!

44. Adjon meg a természetes számokon kontinuum sok olyan részhalmazt, hogy páronkénti metszetük véges legyen!

45. Adjon meg egy olyan R^ω-n értelmezett f valós függvényt (azaz egy olyan ω változós valós függvényt), amelyik nem konstans, de bárhogyan helyettesítve változóit véges sok kivétellel valós számokkal, az így nyert véges változós függvény már konstans!

46. Igazolja, hogy ha $f: R \to N$ valós függvény, akkor van olyan kontinuum számosságú halmaz, amelyre f-et megszorítva f már konstans függvény!

TÁRGYMUTATÓ

A

abszolút ellentmondástalanság 174
adatbázis 191–192
  – deduktív 192
  – definit 192
alapelőfordulás 89
alapnyelv 191
alaprezolúció 148–149
algebra 47, 268, 274, 281
algebrai logika 268
algebraizáció 269–270, 272, 275, 279, 280
  – állításlogika 269–270, 272
  – elsőrendű logika 275, 279
algebra–logika kapcsolat 274, 281
algoritmus 127
algoritmus
  – determinisztikus 127
  – nemdeterminisztikus 127
állításkonstans 31–32, 35
állításlogika 35
állításrezolúció 143, 152
általánosított igazsághalmaz 279
általánosított szemantika 250
alternatívareláció 257
analitikus fa 120–121, 127
  – egyenlőséges 133
  – keresési stratégia 134
  – megszámlálható sok formuláé 133
  – nyílt 127
  – zárt 127
Andréka 11, 27
antinómia 307
applikáció 194
Arisztotelész 20
aritmetika 108
  – szűkített elmélete 218
atomi formula 34
atommentes 206
automatikus tételbizonyítás 132–134, 159
axióma 97, 104
axiómarendszer 63, 104, 203
axiomatikus halmazelmélet 307
axiomatizálás 65, 106, 168, 249
azonosság 243

B

balról jobbra szabály 38
beágyazás 224, 297
  – elemi 297, 301

– izomorf 224, 297
belső halmaz 298, 303
beta normálforma 197
beta redukció 196
bináris rezolvens 155
Birkhoff-tétel 243
bizonyítás 103, 260
bizonyításelmélet 97, 271, 280, 310, 328
bizonyítási reláció 98, 104
– cáfolati reláció 98
– levezetési reláció 98
bizonyítási rendszer 98, 104, 112, 247, 260
– cáfolati rendszer 98
– helyessége 112
– levezetési rendszer 97
– teljessége 113
Bolyai 14, 19
bonyolultságelmélet 267, 283
bonyolultsági osztály 283–285, 289
Boole 20, 25
Boole-algebra 205–206
box operátor 256

C

cáfolati fa 121
cáfolati rendszer 98
cáfolható 121, 155, 177
Cantor 21, 307
Carnap 257
Cayley–Klein-modell 17
célklóz 176
Church 22
– I. tétele 169
– II. tétele 169
Church–Rosser 197
cilinderhalmaz 276
cilindrifikáció 276–277
cilindrikus algebra 25, 277
cilindrikus halmazalgebra 54, 276
– általánosított 276, 279
Cohen 24, 309
Cons operátor 65
Craig 25
csere (individuumváltozóké) 37

D

DATALOG 192
Davis–Putnam-módszer 92
de Morgan 20, 25
Ded operátor 105
Dedukció tétel 68–69, 109
deduktív adatbázis 192
definíció
– egzisztenciális 189
– pozitív 189
– rekurzióval 42
definit adatbázis 192
definit klóz 176–177
determinisztikus 127, 284
diagonális 276–277
diagram 52
differenciálhatóság 300
dimenzióhalmaz 277
dinamikus logika 264–265
direkt hatvány 226
direkt szorzat 226
diszjunktív normálforma 78
diszkrét 217
doboz operátor 256
döntési eljárás 129, 170
dualitás 205

E

egyenlőségjel kiküszöbölése 111
egyértelmű olvashatóság 35
egységrezolúció 160
egzisztenciális
– definíció 189
– lezárás 36
– másodrendű Horn-formula 286
egzisztenciatétel (infinitezimálisoké) 297

eldöntésprobléma 99, 169
eldönthetetlen 106, 168
eldönthető 35, 106, 171, 172, 202
– bizonyítási reláció 106
– elsőrendű következmény 171
– félig eldönthető 170
elemi beágyazás 224, 297, 301
elemi ekvivalencia 210
elemien ekvivalens 210
elemi kiterjesztés 223
elemi osztály 235, 239
– Δ-elemi 235
– Σ-elemi 236
elemi részstruktúra 223
elérhetőség 257, 285
ellentmondásos 66, 106
ellentmondástalan 66, 106, 173, 174
– abszolút 174
– relatív 166
elmélet 51, 65, 105, 107, 235
– axiomatizálható 65, 106
– eldönthető 65, 106
– ellentmondástalan 66, 106
– komplett 66, 115, 170, 221
– konzisztens 66, 106
– lambda kalkulusé 199
– lambda-kategorikus 214
– struktúráé 51
– struktúraosztályé 52, 108, 235
elsőbbségi (precedencia) szabály 38
elsőrendű rezolúció 152–156, 158
elsőrendű tulajdonság 211
elvetési fa 121
emelés 92, 155
erős Skolem-forma 82
erős teljesség 114
érvényesség 67–68, 258
érvénytelen 67
euklideszi tulajdonság 261

F

fa 121, 144
faépítési szabályok 127
Fagin-tétel 285
fajta 251
félig eldönthető 170
φ gráfprobléma 285
fixpont 185
Fixpont tétel 199
fogalom 36
folytonosság 300
formációfa 34
formalizálás 46, 54–56
formula 34–35, 252
– hossza 43
– igazságértékelése 49
– infix alak 37
– magja 78
– másodrendű 247
– nyílt 36
– prefix alak 37
– részformula 36
– többfajtájú 252
– zárt 36
formulaalgebra 272, 279
formulaindukció 42
formulaosztály 272
formulaséma 102
főszűrő 232
frame 257
Frege 20
függetlenség 66, 106, 170
függvény 300
– differenciálhatósága 300
– folytonossága 300
– határértéke 300
függvényjel kiküszöbölése 112
függvényváltozó 246
funkcionális program 193

G

Gauss 14
generalizáció 103
Gentzen 22
geometria 15
– formális nyelve 15
– formalizálása 16
– szemantikai megalapozása 16
Gödel 13, 22, 309
Gödel-számozás 166
Gödel-teljességi tétel 113–114
Gödel inkomplettségi tételei 165
gráf 206, 286

Gy

gyenge modell 249
gyenge teljesség 114
gyűrű 204
– nullosztómentes 204

H

halmazelmélet 308, 310
– naiv 21
halmazelméleti felépítés 45, 317
Halmos 25
Hamilton-kör 285
három színezés probléma 292
határérték 300
hatványhalmaz-algebra 206
hazug-paradoxon 21
helyesség 112
helyettesítés 37, 150, 153, 195
helyettesítéses rezolúció 148–150, 152
hengerhalmaz 276
Henkin 25, 249
Herbrand-modell 93, 95
Herbrand-tétel 89, 91
Herbrand-univerzum 89, 93
Heyting 25
Hilbert 14, 16, 20–22, 102
Hilbert-kalkulus 102, 113
homomorfizmus 224–225, 237, 270
Horn-formula egzisztenciális másodrendű 286
Horn-klóz 177, 181
HORNSAT-probléma 289

I

igazság 21, 46, 48–49, 51, 54
igazságértékelés 51, 54, 247, 252, 257
igazsághalmaz 52–53, 278
– általánosított 279
igazságtáblázat 51
illesztés 153
indexezett Boole-algebra 281
individuumkonstans 31
individuumváltozó 36
– kötött 36
– szabad 36
indukció 41–42
indukciós elv 42
indukciós séma 248
induktív definíció 189
induktív lezárás 41
infinit logika 282
infinitezimális 296, 302
infix 37
inkomplettség 165, 172
inkomplettségi tétel
– első 165
– második 165
inkonzisztens 66, 106
inputrezolúció 160
interpretáció 47, 53, 55
– formuláé 53
– nyelvé 47
– reláció- és függvényjeleké 47
– szándékolt 55
ismeretelmélet 19
izomorfizmus 210, 224

J

jólfundált halmaz 311
jólrendezés 216, 241, 308

K

kalkulus 98
Kalmár 27
karakterizációs tétel 235
káró operátor 256
kategoricitás 168, 214, 248
keresési
– fa 179
– stratégia 179, 182
– tér 134
kielégít 50
kielégíthetetlen 67, 91
kiküszöbölés 111
– egyenlőségé 111
– függvényjeleké 112
kiterjesztés 224
kiválasztási axióma 308
klasszikus logika 245, 341
Kleene 22
klóz 34, 176
– alapelőfordulása 91
– célklóz 176
– definit 177
– Horn 177
– programklóz 176
– üres 143
klózok szeparálása 154
kombinátor 194
kompaktsági tétel 86, 109, 234
– szintaktikai 109
komplettség 66, 106, 168, 214, 217, 219, 221
konjunktív normálforma 77
kontinuumhipotézis 309
kontrapozíció 70
konvergencia 300
konvertálás (többfajtájú logikáé) 252
konverzió 196
konzervatív bővítés 111
konzisztens 66, 106, 198
korlátozott kvantor 56
korrekt válasz 186
ko-véges 232
kötött változó 36
következmény 21, 64–65, 171
következtetés 65
K rendszer 260
Kripke-szemantika 25, 257
kSAT-probléma 291
K tulajdonság 260
külső halmaz 303
kvantálás 34, 246
– függvényé 246
– relációé 246
kvantor 31
kvantorelimináció 168, 219
kvázipoliadikus algebra 281
kvázivarietás 243

L

lambda
– absztrakció 194
– kalkulus 199
– kifejezés 193
– típusnélküli kalkulus 193
lehetséges világok 257
Leibniz 20
levezetés 103, 143, 260
levezetési rendszer 97
levezetési szabály 199, 260
Lewis 25, 256
Lindenbaum–Tarski-algebra 272, 280
Lindenbaum-tétel 115
literál 34
Lobacsevszkij 14, 19
logika
– alapjai 13

– és a matematika egyéb területei 267, 344
– és bonyolultságelmélet 283
– filozófiai 20
– klasszikus 245
– korlátai 164
– másodrendű 246
– matematizálása 20
– modális 245, 256
– többfajtájú 251
logikai axiómák 199
logikai ekvivalencia 67, 69, 71
logikai következmény 62–65, 171, 258
logikai programozás 175–176, 191
lokálisan véges dimenziós 277
Łoś-tétel 241
Łoś–Vaught-tétel 219, 221
Löwenheim–Skolem–Tarski-tétel 210, 213–214
Löwenheim–Skolem-tétel 93, 95
Łukasiewicz 25
Lyndon-tétel 244

M

magasabb rendű logika 249
majdnem mindenütt 227
Makkai 11, 27
Markov-algoritmus 174
másodrendű logika 246
megengedett helyettesítés 39
mérték 227, 232
metanyelv 167
modális logika 245, 256, 260, 265, 341
modell 16, 47, 52
modellelmélet 201–202, 335
modellkonstrukció 223
modellmódszer 18, 115, 166, 203, 206, 208, 309
modellosztály 23, 203
– pozitív 241
– univerzális 241
– varietás 243
modellosztály lezárása 237–238
– direkt szorzat képzésre 238
– elemi ekvivalenciára 237
– homomorfizmus-képzésre 237
– részstruktúraképzésre 237
– ultraszozatképzésre 238
modus ponens 65, 103, 143
monád 298
mondat 36
Monk 25
multimodális logika 264

N

naiv halmazelmélet 21
negáció problémája 187
nem mind egyenlő SAT-probléma 291
nemdeterminisztikus 127, 284
Németi 11, 27
nemklasszikus logikák 25
nemstandard 210, 296
– analízis 295, 302–303
– modell 210, 212
– struktúra 301
– szám 297, 300, 306
normálforma 77–78
– diszjunktív 78
– erős Skolem 82
– konjunktív 77
– Skolem 80–81
NP osztály 284

Ny

nyelv 29, 31, 251, 315
– állításlogikáé 35
– elsőrendű logikáé 31, 284
– másodrendű logikáé 246
– modális logikáé 256
– számossága 31
– típusa 31
– többfajtájú logikáé 251

O

osztály 309
osztályalgebra 269

P

paradoxon 13
párhuzamossági axióma 14
Peano 108
Peano-aritmetika 248
– másodrendű 248
Peirce 20, 25
példány (sémáé) 102
permanenciaelv 224, 298
Péter Rózsa 27
poliadikus algebra 25
P osztály jellemzése 287
pozitív 189
– definíció 189
– diagram 52, 185
– modellosztály 241
– mondat 225
precedenciaszabály 38
prefix 37
prefixum 78
prenex normálforma 78
program 191
programklóz 176
programnyelv 193
programozás 191
PROLOG 175, 182

R

redukció 86, 196
redukciós tételek 86
rekurzió 41–43
rekurzív 35
– felsorolható 35
reláció 46, 260
relációalgebra 281
relációváltozó 246
relatív ellentmondástalanság 166
rendezés 203, 214–215
– diszkrét 217
– sűrű 218
– végpont nélküli 217
rendszám 216, 309
rendtípus 216
részstruktúra 89
– elemi 223
rezolúció 142, 149, 152, 159
– alaprezolúció 149
– állításrezolúció 143
– egység 160
– helyettesítéses 149–150
– input 160, 178
– teljessége 156
rezolvens 143, 149, 155
– elsőrendű 149
– klózoké 143, 150
– összetett 155
rezolvensképzés 149
Robinson 13, 24, 295
Russell 13, 20–21, 249, 309
Ruzsa 11, 27

S

$S4$ logika 262
$S5$ logika 262
SAT-probléma 291
– elsőrendű 293
SBSAT-probléma 293
Schröder 20, 25
séma 64
Skolem 295
Skolem-alak 79, 82
Skolem-normálforma 80–81
SLD-rezolúció 175–177, 181
standard 210–211
– modell 212
– valós szám 301
Stone-tétel 273
struktúra 46–47, 210

– algebra 47
– elemien ekvivalens 210
– elmélete 51
– elsőrendű tulajdonságai 211
– homomorf képe 224–225
– izomorf 210
– kiterjesztése 89
– másodrendű 247
– modell 47
– nemstandard 212
– részstruktúra 89
– standard 212
– számossága 47
– többfajtájú 252
struktúraosztály 52

Sz

szabad változó 36, 53, 194
szakmai axióma 97, 104
számosság 31
– nyelvé 31
– struktúráé 47
szándékolt interpretáció 16, 55
származék 127
szekunder modell 249
szemantika 48, 250, 269
– általánosított 250
szemantikus fa 144
szemantikus táblázat 121
szeparálás 152
sztochasztikus folyamat 282
szűkített elmélet (aritmetikáé) 218
szükségességi szabály 260
szűrő 232

T

tárgynyelv 167
Tarski 21–23, 25, 27
Tarski–Vaught-tétel 223
teljesség 114, 129, 143, 150, 178, 181, 273
– bizonyítási rendszeré 113
– erős 114
– gyenge 114
– másodrendű logikáé 249
– véges 114
teljességi tétel 113–115, 117, 119, 143, 156
– analitikus fáké 129
– állításrezolúcióé 143
– elsőrendű rezolúcióé 156
– Hilbert-kalkulusé 113–119
– SLD-rezolúció 181
teljességi tulajdonság 113
temporális logika 264
term (függvényszerű kifejezés) 34, 252
test 204–205
tétel 103
típus 31–32
típuslogika 249, 302
többfajtájú logika 251
tranzitív modell 312
tranzitív osztály 311
Turing 22
– kiszámíthatóság 200

U

ultrahatvány 226, 228, 231, 233
ultraszorzat 226, 231, 233–234
– alkalmazása 233
ultraszűrő 226, 232, 238
unifikáció 153
univerzális 241
– algebra 281
– lezárt 36
– modellosztály 241

V

valószínűség 227
valószínűségszámítás 282
változó 193, 246
– függvényváltozó 246

– individuumváltozó 36
– relációváltozó 246
varietás 243
– Birkhoff-tétel 243
véges 296
– metszet tulajdonságú 232
végtelen 302
– kicsiny 296
– nagy 296

Z

zárt világ feltétel 187
Zermelo–Fraenkel 307