

”

A MATEMATIKA ALAPJAIRÓL

Bevezetés és Példák

1. Halmazokról I.

- Elemi fogalmak
- Halmazműveletek
- Halmazalgebrák, halmazalgebrai azonosságok

2. Állítás logika

- Formális állítás nyelv
- Interpretáció, igazság értékelés, halmazalgebra kapcsolatok
- Állítások modellezése a halmaz nyelv közvetítésével
- A logikai következmény definíciójáról
- A logikai következmény fogalom kezeléséről

3. Relációk, függvények, struktúrák

- Relációk, függvények általában
- Ekvivalencia reláció
- Rendezési reláció
- A kiválasztási axióma ekvivalensei
- Struktúrák

4. Az elsőrendű logikáról

- Formális nyelv
- Interpretáció
- Kitekintés a másodrendű logikára

- Formalizálás, nevezetes axióma rendszerek
- Struktúrák megadása, a bizonyításelmélet elemei
- Logikai következmény
- A bizonyításelmületről, az axiomatikáról

5. Halmazokról II.

- Nevezetes számosságok
- Számosságok rendezése
- Műveletek számosságokkal
- Axiomatikus halmazelmélet

6. A számfogalomról

- Természetes számok
- Racionális számok
- Valós számok
- Komplex számok
- Nem-standard valós számok

Part I

Halmazokról I.

A matematikában végső soron bármely fogalom bevezetése a halmazelmélethez vezet, ezért tekinthető a halmazelmélet az egész matematika megalapozásának. Ilyenek fogalmak például a függvény, reláció, rendezett pár, struktúra, stb fogalmak. Fontos ezért, hogy “körüljárjuk” a halmazelmélet alapfogalmait. Ezt első-sorban úgynevezett “naív megközelítésben tesszük, ami egy "leíró" megközelítés jelent, szemben az axiomatikussal. Bevezetjük azonban külön pontban az axiomatikus halmazelmélet alapjait is, megmutatva, hogy hogyan vonhatóak be az addig tanultak az axiomatikába. Ez a felépítés szokásos a halmazelmélet tankönyvekben.

1 Elemi fogalmak

Maga a *halmaz* és az *eleme* reláció *alapfogalmak*, azaz nem visszavezethetők már definiált matematikai fogalmakra (hasznlóan pl, a geometriában a ponthoz, vagy az egyeneshez). Az “alapfogalom” jelentését majd a formális nyelv fogalmánál ismertetjük. A következőkben leszögezzük a halmazokkal kapcsolatos néhány tudnivalót, amelyek körül gyakoriak a félreértések.

A halmaz fogalom heurisztikus jelentése: *dolgok* (véges, vagy végtelen) *összessége*. Azonban,

a halmaz, dolgoknak - nem tetszőleges - összessége.

Russel hívta fel első között a figyelmet arra, hogy dolgok tetszőleges összessége nem feltétlenül halmaz. Tekintsük azon x halmazok y összességét, amelyek nem elemei önmaguknak, azaz, amelyekre $x \notin x$. Ha y halmaz, akkor két eset van: $y \in y$, vagy $y \notin y$. Azonban y definíciója implikálja az első esetben azt, hogy $y \notin y$, a második esetben viszont azt, hogy $y \in y$, azaz, minden esetben ellentmondást kapunk. Mivel halmaz nem lehet eleme önmagának, azt kaptuk, hogy a halmazok összessége nem alkothat halmazt.

Dolgok egy összességével kapcsolatban tehát *az egyik fontos kérdés az, hogy egyáltalán halmazt alkotnak-e?* Például belátható, hogy az összes kételemű halmazok sem alkotnak halmazt - és lehetne sorolni a példákat.

Azokat az összességeket, amelyek nem halmazok, de a “halmazelmélet nyelvén definiálhatók” (valódi) *osztályoknak* hívjuk. Az osztályok tehát azonosíthatóak a halmazelmélet nyelvénél valamely formulájával (lásd később). A halmazelmélet nyelvénél egyetlen “speciális szimbóluma” az $\in$ jel. Például az előző példánál ez a formula az $x \notin x$. Az osztályok tehát *nem* feltétlenül “kerülendő” összességek, csupán nem halmazok. Tulajdonságaik számos tekintetben hasonlóak a halmazokhoz, sőt, osztályokra gyakran a halmaz jelöléseket alkalmazzuk.

Megjegyezzük, hogy a naív tárgyalásban halmaz eleme természetesen nem feltétlenül halmaz, szemben az axiomatikus tárgyalással, ahol majd halmaz eleme csak halmaz lehet.

Gyakori jelölés halmazokra, hogy a $\{\}$ zárójelek között, vesszővel elválasztva, felsoroljuk az elemeket, vagy utasítást adunk a felsorolásra.. Például: $\{1, 2\}$, vagy, $\{\{1\}, 2, 3\}$, vagy $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

Megjegyezzük, hogy

létezik olyan halmaz, az üres halmaz, amelyiknek nincsen eleme.

Jelölése: $\emptyset$.

Az üres halmaz hasonló absztrakció a halmazelméletben, mint az aritmetikában a nulla. A halmazelméletnek fontos fogalma.

Fontos alapelv a következő tulajdonság (extenzionalitás):

Két halmaz akkor és csak akkor egyezik meg, ha pontosan ugyanazok az elemeik.

Ebből következik, hogy például $\{1\} \neq \{\{1\}\}$, hiszen $1 \neq \{1\}$, mivel 1 nem is halmaz, vagy a következő halmazok mind különbözőek: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$.

Halmazok közötti adott *reláción* értünk egy olyan kapcsolatot, amely bármely két halmazra, vagy fennáll, vagy nem áll fenn (lásd később a % pontban a relációkat). A halmazelmélet egyik relációja a $\subset$ *tartalmazás* reláció.

$A \subset B$ akkor és csak akkor, ha $x \in A$ implikálja $x \in B$ -t minden $x \in A$ -ra, vagy A az üres halmaz.

$A \subset$ jelölés helyett a $\subseteq$ -t is szokták használni. A valódi részhalmaza B -nek, ha $A \subset B$, $A \neq B$, ezt így is szokták jelölni: $A \subsetneq B$.

$A \subset$ fenti definíciójának következménye a következő állítás:

$$A = B \text{ akkor és csak akkor, ha } A \subset B \text{ és } B \subset A \quad (1)$$

:

.

Balról jobbra irányban az állítás triviális. Fordítva, indirekt, tegyük fel, hogy $A \neq B$. Például tegyük fel, hogy A -nak van olyan eleme, amely nem eleme B -nek. Azonban ez ellentmond az $A \subset B$ feltételnek.

Egy A halmaz részhalmazainak összessége halmaz, a halmaz úgynevezett hatvány halmaza.

Jelölése $\mathcal{P}(A)$.

Ismert, hogy n elemű halmaz hatványhalmaza 2^n elemű - ez indukcióval igazolható.

Felhívjuk a halmazok következő tulajdonságaira a figyelmet:

A halmazok elemei “egyszeres multiplicitásúak”, azaz halmaznak valami csak egyszer lehet eleme!

Az $\{1, 2, 1, 2, \{1\}\}$ halmaz például három elemű. Felsorolhatunk egy elemet többször a jelölésnél, de csak egyszeres multiplicitással számít (más lesz a helyzet például “sorozatoknál”, a 0, 1, 0, 1 sorozat 4 tagú).

Ha egy halmaz valamely eleme halmaz, akkor az utóbbinak elemei nem feltétlenül elemei az eredeti halmaznak .

Tehát, $x \in y$ és $y \in z$ általában nem implikálja $x \in z$ -t. Például az $\{1, \{2\}\}$ halmaznak 2 nem eleme, bár a $\{2\}$ halmaz eleme. Azokat a halmazokat melyeknél a $x \in y$ és $y \in z$ implikálja $x \in z$ -t *transzitiv* halmazoknak hívjuk. Például az $\{1, \{2\}, 2\}$ halmaz már transzitiv. A transzitivitás fogalma jelentős szerepet játszik a halmazelméletben.

E pont végén visszatérünk a pont elején ismertettekre:

Elterjedt jelölés halmazokra, az $\{x : \Phi(x)\}$ jelölés, ahol a $\Phi(x)$ egy tulajdonság, pontosabb értelemben, a halmazelmélet nyelvének egy “formulája” (lásd %). Például az $\{x : x = 2k, \text{ valamely } k \text{ természetes számra, ahol } x \text{ is természetes szám}\}$ halmaz a páros természetes számok. Azonban általában, a fentiek értelmében, $\{x : \Phi(x)\}$ nem biztos, hogy halmaz, lehetséges az is, hogy osztály.

Létezik-e feltétel arra, hogy "dolgok egy összessége" halmaz legyen? Erre vonatkozik a következő egyszerű kritérium:

Dolgok egy összessége pontosan alkot halmazt, ha része (részhalmaza) valamely halmaznak.

Ugyanis halmaz "része" is halmaz, a részhalmaz és fordítva, minden halmaz, új elemek hozzávételével, bővíthető nagyobb halmazzá.

A szóban forgó halmazt *majoráns* halmaznak, vagy *belefoglaló* halmaznak is szoktuk hívni.

Tehát, az $\{x : \Phi(x)\}$ jelölésre gondolva, a jelölés akkor ad halmazt, ha ki tudjuk egészíteni így:

$$\{x \in A : \Phi(x)\}, \text{ ahol } A \text{ egy halmaz.}$$

vagyis az összesség egy A halmaz azon elemeinek összessége, amelyek rendelkeznek a $\Phi(x)$ tulajdonsággal.

FELADATOK:

1. Sorolja fel az $\{\emptyset, 1, \{\emptyset, 1\}\}$ halmaz részhalmazait.

M. A halmaz 3 elemű, ezért 2^3 darab részhalmaza lesz, ezek:

A "triviális" részhalmazok: $\emptyset$ és $\{\emptyset, 1, \{\emptyset, 1\}\}$

Az 1 elemű részhalmazok: $\{\emptyset\}$, $\{1\}$, $\{\{\emptyset, 1\}\}$ és a

2 elemű részhalmazok: $\{\emptyset, 1\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset, 1\}\}$, $\{1, \{\emptyset, 1\}\}$

2. Igazolja, hogy az 1 elemű halmazok összessége nem alkot halmazt!

M. Minden A halmazhoz hozzá tudunk rendelni egy olyan 1 elemű halmazt, amelynek egyetlen eleme van, mégpedig az illető halmaz, azaz A -hoz hozzá tudjuk rendelni az $\{A\}$ halmazt. Azt állítjuk, hogy már ez utóbbi összeség sem alkot halmazt. Hiszen ha lenne hozzá majoráns halmaz, akkor az összes halmazok összességéhez is lenne egy ilyen halmaz, az egy.egy értelmű hozzárendelés miatt. Az összes halmazok viszont, mint azt tudjuk, nem alkotnak halmazt. Viszont, ha azok az 1 elemű halmazok, melyeknek elemei halmazok nem alkotnak halmazt, akkor a náluk bővebb összesség, az 1 elemű halmazok sem alkothatnak halmazt.

2 A halmaz műveletekről

Ebben az alponban olyan hozzárendelésekkel foglalkozunk, amelyek halmazokhoz rendelnek egy további halmazt, azaz halmaz *műveletekkel* foglalkozunk. Egy halmaz művelettel már megismerkedtünk az előző pontban, a hatvány halmaz képzéssel.

Definiáljuk halmazok unióját, metszetét és relatív komplementerét.

Definíció.

Az A és B halmazok $A \cup B$ uniója halmaz, mégpedig a következő:
 $\{x : x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$

$A \cap B$ metszete a $\{x : x \in A \text{ és } x \in B\}$ halmaz, az $A - B$ relatív komplementere pedig a $\{x : x \in A \text{ de } x \notin B\}$ halmaz.

Ha az $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B halmazok kizáróak (diszjunktak). Ha valamennyi előforduló halmaz része valamely H halmaznak, akkor A -nak a H -ra vonatkozó $H - A$ komplementerét $\bar{A}$ -val szoktuk jelölni és egyszerűen *komplementernek*, vagy *univerzális komplementernek* hívjuk. Nyilván, $\bar{\bar{A}} = A$. Az $A - B$ relatív komplementer így fejezhető ki az univerzális komplementerrel:

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$A \cup$ és $\cap$ műveletek indukció segítségével általánosíthatók véges sok komponensre.

Kimondunk néhány a halmazműveletekre vonatkozó elemi tételt.

Tétel (de Morgan szabályok)

- (i) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- (ii) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Biz.: (ii) A (??)-t alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy $x \in \overline{A \cap B}$. Ez azt jelenti, hogy $x \notin A \cap B$, azaz, $x \notin A$, vagy $x \notin B$, vagy mindkettő. Vagyis x eleme a jobb oldalnak. fordított tartalmazás: vagyük észre, hogy az előző lépések megfordíthatók, azaz, ekvivalens átalakítások.

(i) Hasonlóan igazolható, mint (ii).

q.e.d.

Következmény, hogy az $\cup$ kifejezhető a $\cap$ -el és a komplementerrel és fordítva. Ugyanis $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$, illetve $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$.

Érdekes tulajdonsága a halmazoknak a kétféle disztributivitás:

Tétel (disztributivitás)

- (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Biz.:

(i) Alkalmazzuk a (1) tulajdonságot. Tegyük fel $x \in A \cup (B \cap C)$. Ekkor $x \in A$ vagy, ha $x \notin A$, akkor $x \in B \cap C$. Ha $x \in A$, akkor x benne van a jobb oldal mindkét komponensében, tehát benne van a metszetben is, azaz a jobb oldali halmazban., Ha $x \notin A$ és $x \in B \cap C$, akkor ugyanez állítható. Fordítva, tegyük fel, hogy $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Szintén megkülönböztethetjük a fenti két esetet: $x \in A$ vagy, ha $x \notin A$, és $x \in B \cap C$. Ezután már hivatkozhatunk az előző gondolatmenet megfordíthatóságára.

A (ii) igazolása hasonló.

q.e.d.

Az unió műveletnél számok összeadására, a metszetnél számok szorzására asszociálva, míg a (ii) tulajdonság analóg a hasonló aritmetikai tulajdonsághoz, az (i) disztributivitásnál ez már nem igaz, mivel ezt a disztributivitást az $a + (bxc) = (a + b)x(a + c)$ tulajdonságra fordíthatnánk. Ebből láthatjuk, hogy a "halmazok algebrai struktúrája" és a valós számok algebrai struktúrája lényegesen különbözik.

A következőből az derül ki, hogy a tartalmazás kifejezhető egyenlőség, valamint metsze, illetve unió segítségével::

Tétel A következők ekvivalensek:

- (i) $A \subset B$
- (ii) $A \cap B = A$
- (iii) $A \cup B = B$
- (iv) $\overline{B} \subset \overline{A}$

Biz. (i) $\Rightarrow$ (ii) triviális. (ii) $\Rightarrow$ (i) $A = A \cap B$ -ből következik $A \subseteq A \cap B$, ami implikálja $A \subset B$ -t.

(i) és (iii) ekvivalenciája hasonlóan igazolható.

(iii)-ra alkalmazva a de Morgan szabályt, azt kapjuk, hogy $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B}$. Azonban (i) és (ii) ekvivalenciája miatt ez ekvivalens $\overline{B} \subset \overline{A}$ -val. Ezzel (iv) és (i) ekvivalenciáját is igazoltuk

q.e.d.

Az unió és a metszet kommutatív és asszociatív műveletek, ez könnyen belátható. A következő pontban foglalkozni fogunk további tulajdonságaikkal is. E tulajdonságok vizsgálatára az egyik módszer a definíciójuk és az extenzionalitás használata.

FELADATOK

1. Igazoljuk a következőt:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (B \cap A)$$

M: Két megoldást adunk. Az elsőnél használjuk a halmaz műveletek definícióit (mint a de Morgan szabályok igazolásánál), míg a második megoldásban visszavezetjük az állítást már ismert algebrai tulajdonságokra.

A) Tegyük fel, hogy $x \in (A - B) \cup (B - A)$. Ekkor vagy $x \in A$ és $x \notin B$, vagy $x \notin A$ és $x \in B$. Mindkét esetben azt kapjuk, hogy x eleme a jobb oldalnak, mivel $x \notin B$ és $x \notin A$ mindegyike implikálja azt, hogy $x \notin A \cap B$. Fordítva, ha $x \in (A \cup B) - (B \cap A)$, akkor is tekinthetjük az előbbi két esetet, mivel más lehetőség nincsen. Ekkor $x \in (A - B) \cup (B - A)$ nyilvánvaló.

B) Használjuk többször a már bizonyított $X - Y = X \cap \overline{Y}$ azonosságot. Első lépésként elimináljuk a relatív komplementereket komplementerekkel. Ekkor a következőt kapjuk:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap \overline{B \cap A} \quad (2)$$

A bal oldalon, használva a disztributivitást, ezt kapjuk:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$$

ahol kihasználjuk, hogy $A \cup \bar{A} = B \cup \bar{B} = H$.

A jobb oldalon, használva a de Morgan azonosságot, ezt kapjuk:

$(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A})$ és így készen vagyunk.

2. Tegyük fel, hogy f egy függvény A -ból B -be és $C = \bigcap_{i=1}^n C_i$, ahol

$C, C_i \subset A$, akkor $f(\bigcap_{i=1}^n C_i) = \bigcap_{i=1}^n f(C_i)$ nem következik, csak akkor ha f injektív.

$f(\bigcup_{i=1}^n C_i) = \bigcup_{i=1}^n f(C_i)$ viszont mindig következik. Itt $f(A)$ jelöli az A halmaz "képét" az f leképezésnél.

Igazoljuk $f(\bigcap_{i=1}^n C_i) = \bigcap_{i=1}^n f(C_i)$ -t.

Ha $x \in f(\bigcap_{i=1}^n C_i)$, akkor valamely $y \in \bigcap_{i=1}^n C_i$ -re $x = f(y)$. De $f(y) \in f(C_i)$ ha

$1 \leq i \leq n$, ezért $x = f(y) \in \bigcap_{i=1}^n f(C_i)$. Fordítva, ha $x \in f(\bigcap_{i=1}^n C_i)$, akkor, definíció

szerint, léteznek olyan $y_1 \in C_1, y_2 \in C_2, \dots, y_n \in C_n$ elemek, hogy $f(y_i) = x$. Az injektivitás miatt azonban $y_1 = y_2 = \dots = y_n$, ezért erre az y elemre $f(y) = x$

és $x \in f(\bigcap_{i=1}^n C_i)$.

Az $\cup$ és $\cap$ műveletek végtelen sok komponensre is általánosíthatók.

3. Adjunk szükséges-elégőséges feltételt az $(A-B)-C = A-(B-C)$ egyenlőség teljesülésére.

M: Kiszöböljük ki először a bal és jobb oldalon is a relatív komplementereket. Ezt kapjuk:

$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cap B \cap C}$. A jobb oldalt így alakíthatjuk tovább: $A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$, tehát

$$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) \quad (3)$$

Ekkor $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \supset (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$ -ből azt kapjuk, hogy $\bar{C} \supset A \cap C$. Ez csak úgy lehetséges, hogy ha $A \cap C = \emptyset$. Ez tehát *szükséges* feltétele az eredeti egyenlőség teljesülésének.

Vizsgáljuk meg, hogy vajon elégséges-e ez a feltétel? $A \cap C = \emptyset$ -ből következik, hogy $A \cap \bar{C} = A$, ezért (3) így alakul: $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{B}$, vagyis a $A \cap \bar{B}$ feltétel elégséges is.

Megjegyzés: Szükséges-elégőséges feltételek keresésénél gyakori, hogy egy lehetőleg "erős" csak szükséges (vagy elégséges) feltételt keresünk és aztán megpróbáljuk igazolni elégségeségét is (vagy szükségességét). Segít, ha a szemlélet alapján már van "sejtésünk" a feltételt illetően.

Definíció. Tegyük fel, hogy $\{A_t\}_{t \in T}$ halmazoknak egy összessége, ahol T tetszőleges halmaz. Ezen halmazok $\bigcup_{t \in T} A_t$ uniója halmaz, mégpedig a következő:

$\{x : x \in A_t \text{ valamely } t \in T\text{-re}\}$, $\bigcap_{t \in T} A_t$ metszete pedig a $\{x : x \in A_t \text{ minden } t \in T\text{-re}\}$ halmaz.

Vegyük észre, hogy a fenti definíció *nem függ* az indexhalmaz T és a halmazrendszer egymáshoz rendelésétől. A végtelen unió és metszet algebrai tulajdonságai hasonlóak a véges unió és metszet tulajdonságaihoz (pl. kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás, stb). De több, a végestől eltérő tulajdonsággal is találkozunk itt, például $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$, de bármely véges részmetszet nemüres.

Az eddigi tanulmányainkból ismert az x és y elemekből álló $\langle x, y \rangle$ rendezett pár fogalma. Tudjuk, hogy az $\langle x, y \rangle$ és $\langle z, w \rangle$ rendezett párok pontosan akkor egyeznek meg, ha $x = z$ és $y = w$. Felmerül a kérdés, hogy a rendezett pár fogalma hogyan illeszthető be a halmazelméletbe? Vajon $\langle x, y \rangle$ egy halmaz?

Definíció A rendre x és y elemekből álló $\{x, \{y\}\}$ halmazt “rendezett párnak” tekintjük. A halmazra az $\langle x, y \rangle$ rövidített jelölést alkalmazzuk.

Nyilvánvaló, hogy $\{x, \{y\}\} = \{z, \{w\}\}$ pontosan akkor, ha $x = z$ és $y = w$.

Megjegyezzük, hogy az axiomatikus halmazelméletben az is axióma, hogy bármely két a és b halmazból képezhető egy olyan halmaz, amelynek pontosan ezek a halmazok az elemei, azaz képezhető az $\{a, b\}$ halmaz (páraxióma).

A rendezett pár fogalmára épül a következő halmaz műveletnek a definíciója:

Definíció. Az A és B halmazok $A \times B$ kereszt (vagy Descartes) szorzatán értjük a $\{\langle x, y \rangle : x \in A \text{ és } y \in B\}$ halmazt. Az $A = B$ esetben a kereszt szorzatot A^2 -el jelöljük és négyzetnek is nevezzük.

A kereszt szorzat nyilván nem kommutatív és asszociatív művelet. A definíció az unió és metszet műveletekhez hasonlóan általánosítható véges és végtelen sok tényezőre is.

3 Halmazalgebrák, halmazalgebrai azonosságok

Az előző pont első feladatában már láttuk (B) megoldás), hogy a “halmaz azonosságok” igazolhatók úgy is, hogy nem megyünk vissza a műveletek definíciójáig, hanem visszavezetjük az azonosságokat már bizonyított azonosságokra. Ebben a pontban ezt a módszert vizsgáljuk.

Vegyük észre, hogy az eddig vizsgált "halmaz azonosságok" bal és jobb oldalán is olyan "értelmes" kifejezések állnak, amelyek "halmaz változókból" az $\cup, \cap$ és a halmaz műveletek segítségével állnak elő (a relatív komplementer képzést az univerzálissal helyettesítve), továbbá az egyenlőségek, a halmaz változók minden lehetséges konkrét helyettesítésére halmazokkal, igazak. Ilyen egyenlőségek például a de Morgan azonosságok, vagy a disztributivitások. Az egyenlőség két oldalán álló kifejezések tehát olyan halmaz rendszereken értelmezettek, amelyek zártak az $\cup, \cap$ és a műveletekre.

Fontosak azok a halmazrendszerek, amelyek részhalmazai egy bizonyos H rögzített halmaznak, továbbá, zártak az $\cup, \cap$ és a halmaz műveletekre. E halmazrendszerek egy változatát először George Boole definiálta a 19. sz. közepén.

Definíció Egy H halmaz részhalmazainak olyan összességét, amely zárt az $\cup, \cap$ és a H -ra vonatkozó komplementer műveletekre és tartalmazza magát H -t is, halmazalgebrának nevezzük, H alaphalmazzal.

PÉLDÁK

Három egyszerű példa halmazalgebrára egy tetszőleges H halmaz esetén

- H összes részhalmazainak algebrája (hatványhalmaz algebra).
- a H -ból és az üres halmazból, mint részhalmazokból álló kételemű algebra.
- a sík egy területtel rendelkező H részhalmazának, szintén területtel rendelkező részhalmazainak összessége.

Halmazalgebrákat először George Boole brit logikus, matematikus, filozófus vizsgált először, bár nem pontosan a mai formában. Ő fedezte fel az elsők között a szoros kapcsolatot a logika és az algebra között.

Azon halmazalgebrákat, amelyek az úgynevezett "megszámlálható" uniókra és metszetekre is zártak, σ -halmazalgebráknak nevezzük. σ -halmazalgebrákat alkalmazunk gyakran a mértékelméletben és a valószínűségszámításban.

Definíció *Halmazalgebrai azonosság* egy olyan egyenlőség, amelynek két oldalán "halmazalgebrai kifejezések", azaz a halmaz változókból az $\cup, \cap$ és a műveletek segítségével véges lépésben képezett "kifejezések" állnak, továbbá, az egyenlőség bármely halmazalgebrán, a halmaz változók bármely konkrét helyettesítéseire halmazokkal, igaz.

A "kifejezés" pontos fogalmát majd a % fejezetben ismertetjük. A "halmaz azonosságokat" ezután *halmazalgebrai azonosságoknak* is nevezzük. Az azonosságok két oldalán álló kifejezésekre pedig azt mondjuk, hogy ekvivalensek.

Térjünk vissza a pont % elején szereplő példára és módszerre. Nem használjuk a halmaz műveletek definícióit, ezért tulajdonképpen egy "levezetést" keresünk

már ismert azonosságokból, axiomatikus módon. A következő fontos probléma merül fel:

Probléma:

Megadhatók-e bizonyos halmazalgebrai azonosságok úgy, hogy ezekből már bármely halmazalgebrai azonosság levezethető, azaz megkapható véges lépésben úgy, hogy bennük (rész) kifejezéseket helyettesítünk velük már bizonyítottan ekvivalens kifejezésekkel?

A fenti problémának pozitív a megoldása:

Tétel Létezik véges sok halmazalgebrai azonosság, melyekből az összes halmazalgebrai azonosság levezethető. Azonosságoknak ilyen nevezetes összessége a következő:

- (i) $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
- (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (iv) $A \cup \bar{A} = H$
 $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- (v) $(A \cup B) \cap B = B$
 $(A \cap B) \cup B = B$
- (vi) $A \cup \bar{A} = H$, ahol H az egység halmaz
 $A \cap \bar{A} = \emptyset$

A bizonyítást lásd a % fejezetben.

Vegyük észre, hogy a fenti párok "duálisak", azaz a pár egyik tagjából a másik az $\cup$ és a $\cap$ műveletek felcserélésével nyerhető. A fenti rendszer nem egyértelmű.

Megjegyezzük, hogy a fenti "axiomatizációból" született meg a *Boole algebra* absztrakt fogalma, mely utóbbi az egész matematikában és a számítástudományban is nagy jelentőséggel bír. Lásd a % fejezetet. A Boole algebrák elméletében az $\cup, \cap$ és $\bar{}$ műveleteknek az $+, \cdot$ és $-$ műveletek felelnek meg.

FELADAT

Igazoljuk, hogy $(A - (B \cap C)) \cup (B - C) = (A \cup B) - (B \cap C)$

M: Először küszöböljük ki a relatív komplementereket:

$$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Használjuk a de Morgan tulajdonságokat és a disztributivitásokat. A bal oldal:

$$(A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}). \text{ A jobb oldal:}$$

$(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{B})$. Az utolsó tag az üres halmaz.

Látjuk, hogy az eredeti bal és jobb oldalak ugyanazon kifejezéssel ekvivalensek.

E pont végén egy kis kitérőt teszünk.

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK:

Igazak-e a következő állítások:

1. A halmaz, dolgoknak tetszőleges összessége.
2. Halmazban egy dolog akárhányszor előfordulhat.
3. Egy halmaz mindig valamely másik halmaznak a részhalmaza.
4. A három elemű dolgok összessége nem halmaz.
5. Ha egy halmaz valamely eleme halmaz, akkor ez utóbbinak az eleme az első halmaznak is eleme.
6. Van olyan halmaz, hogy a hatványhalmaza nem halmaz
7. A $\{x : \Phi(x) \text{ igaz}\}$ összesség mindig egy halmaz.
8. Az $\langle a, b \rangle$ rendezett pár egy egyelemű halmaznak tekinthető.
9. Az $\{1, 2\}$ és az $\{\{1\}, 2\}$ halmazok ugyanazok
10. Az $\langle a, b \rangle$ és az $\{a, b\}$ fogalmak azonosíthatók.
Az $\emptyset$ és az $\{\emptyset\}$ nem ugyanazok a halmazok.
Az $\{\emptyset\}$ egy egyelemű halmaz.

1. Lehetséges, hogy egy H egységshalmazú halmazalgebrában valamely $A \subset H$ részhalmaz nincs benne.
2. Ha A benne van egy halmazalgebrában és a B halmazra $A \cap B$ is benne van, akkor B is benne van. (terület)
3. Ha az A halmaz benne van egy halmazalgebrában és $B \subset A$ akkor B is benne van (terület)
4. Ha az A halmaz benne van egy halmazalgebrában és $A \subset B$ akkor B is benne van (terület)
5. Halmazalgebrai azonosság nem tartalmazhat végtelen halmaz műveletet.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. Akárhány halmaz uniója is halmaz.
8. Ha $A \cap B = \emptyset$, Akkor $A = \emptyset$, vagy $B = \emptyset$.
9. Ha $C \cap A \subset C \cap B$ akkor $A \subset B$
5. Ha $C \cup A \subset C \cup B$ akkor $A \subset B$
10. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Fontos fogalmai a matematikának a szükséges feltétel, elégséges feltétel és szükséges-elégséges feltétel fogalmak.

B az A -nak szükséges feltétele, ha B teljesülése SZÜKSÉGES A teljesüléséhez. Azaz, $A \Rightarrow B$ helyes! Azt is mondjuk, hogy B CSAK AKKOR TELJESÜL, ha A is teljesül

Példák:

Tegyük fel, hogy egy lakás kölcsön elnyeréséhez bizonyos összeg önrész szükséges, azaz, a kölcsön csak akkor elnyerhető (B), ha megvan az önrész (A). Ekkor az önrész megléte *szükséges feltétele* a kölcsön elnyerésének. Másképpen fogalmazva: ha a kölcsönt elnyerik, akkor megvolt az önrész, azaz $B \Rightarrow A$ helyes!

Ahhoz, hogy egy szám négyzete 9 legyen (B), szükséges feltétel, hogy a szám természetes szám legyen (A). Azaz, $B \Rightarrow A$ helyes.

B az A -nak ELÉGSÉGES feltétele, ha B teljesüléséből következik A teljesülése. Azaz, $B \Rightarrow A$ helyes! Másképpen: ha B AKKOR A .

Példák:

A lakás kölcsön példánál maradva, ha B ugyanazt jelenti, mint fent, és A azt jelenti, hogy a kérelmező "jó adós" (beleértve azt is, hogy rendelkezik az önrésszel), akkor A a B -nek elégséges feltétele, mert egy "jó adós" mindig elnyeri a kölcsönt. Másképpen fogalmazva: Ha A jó adós, akkor elnyeri a kölcsönt, azaz $A \Rightarrow B$ igaz.

Annak, hogy egy szám négyzete 9 legyen (B), annak elégséges feltétele, hogy a szám 3 legyen (A). Tehát $A \Rightarrow B$ igaz.

Mindig feltehető az a kérdés, hogy egy-egy szükséges feltétel egyúttal elégséges feltétel-e, vagy fordítva, egy-egy elégséges feltétel szükséges feltétel-e? Ha valamilyen kérdésre "igen" a válasz, akkor azt mondjuk, hogy a feltétel szükséges és elégséges.

B az A -nak SZÜKSÉGES-ELÉGSÉGES (másképpen szükséges és elégséges) feltétele, ha B teljesüléséből következik A teljesülése és fordítva. Azaz, $B \Rightarrow A$ és $A \Rightarrow B$ is helyes, röviden: $B \Leftrightarrow A$ helyes. Azt is mondjuk, hogy B PONTOSAN AKKOR TELJESÜL, ha A teljesül, vagy hogy, B AKKOR ÉS CSAK AKKOR TELJESÜL, ha A teljesül,

Belátható, hogy ez a fenti példák egyikénél sem teljesül. De, például mondhatjuk, hogy a kölcsön elnyerhető (B) pontosan akkor, ha valaki teljesíti a kölcsön elnyerésének összes feltételét (A). Vagy, egy szám négyzete 9 (B) pontosan akkor, ha a szám abszolút értéke 3 (A)..

4 Állítás logika

A matematikához elválaszthatatlanul hozzá tartozik a *formalizálása* (példul a jelölések). Ez a matematika története során többé vagy kevésbé, de tudatosult is. Amikor a matematika "hétköznapi nyelven", azaz egy "meta nyelven" íródik, ezt "*kvázi formalizálásnak*" tekinthetjük, mert mögötte ott van egy formalizálás, akkor is, ha ez nincs explicit kimondva. Például, amikor a geometriában megfogalmazzuk azt az axiómát, hogy "Bármely két ponton át fektethető egyenes", akkor tudjuk, hogy a "pont" és az "egyenes", valamint az "illeszkedik" (azaz, "ráfektethető") definiálatlan alapfogalmak, továbbá, az állítás mögött egy logikai szerkezet áll. "Gyorsírással" leírva a következő: $\forall x \forall y (Px \wedge Py \rightarrow \exists z (Ez \wedge Ixz \wedge Iyz))$. Utóbbi részletezésére a % pontban térünk ki.

A formalizálás követelménye a matematika különböző területeit nem érinti egyformán "érzékenyen". Ha például számelmélettel, vagy, differenciálegyenletekkel foglalkozunk, akkor egy szűkebb formalizmust használunk, amelynek keretei pontosan érzékelhetők. De ha a "matematika alapjaival" foglalkozunk, a formalizálás és a formális logika kulcskérdéssé válik. Látszólag kis különbségek, például az, hogy egy-egy matematikai állítás "elsőrendű", vagy "másodrendű" nyelven fogalmazható-e meg, jelentős következményekkel járnak. Különösen előtérbe került a formalizálás kérdése a számítástudomány fejlődésével, hiszen *a számítógépekkel formális nyelveken kommunikálunk*.

A 20. sz. elején lezajlott "matematikai forradalomban" nagy része volt a formális nyelv fogalma létrejöttének és tudatos alkalmazásának. A formális nyelv fogalma később, nem utolsósorban a számítástudomány hatására finomodott, köréje egy egész tudományág épült. Ma a számítógépek korában elmondhatjuk, hogy a *formális nyelv a 20. sz. matematikájának egyik legfontosabb találmánya és jelentős áttörést hozott*.

A matematika túlnyomó részében úgynevezett elsőrendű logikát használunk, de használunk állítás logikát és másodrendű logikát is. Az állítás logika "el-dönthető", míg az elsőrendű logika nem. Az elsőrendű logika "teljes", míg a másodrendű nem. Az elsőrendű logika megértéséhez fontos, az állítás és a másodrendű logika áttekintése is. Az előbbivel kezdjük.

"Állítás nyelvről" (nullad rendű nyelvről) beszélhetünk a természetes nyelvnél akkor, ha bizonyos "elemi állításokat" az "és", "vagy", "nem", "ha, akkor" kötőszavakkal kötünk össze és ilyen módon kapunk összetett állításokat. Itt "elemi állításoknak" tekintjük azokat az állításokat, amelyeket már nem tekintünk más állításokból összetettnek.

Ilyen összetett állítás például: "Esik az eső, vagy fúj a szél és nem esik az eső vagy felszárad a fű". Itt az elemi állítások az "esik az eső" (E), a "Fúj a szél" (F) és a "felszárad a fű" (S). Gyorsírással így jegyeznénk le a fenti állítást: $(E \vee F) \wedge (\neg E \vee S)$, ahol $\wedge, \vee, \neg$ rendre az "és", "vagy", "nem" kötőszavakra utal.

"Magasabb rendű nyelvről" beszélhetünk a természetes nyelvnél akkor ha a mondat tartalmazza a "létezik" vagy/és "minden" fordulatokat, vagy, ezek szinonímáját.. Például ilyen a "Minden nőnek van választottja". Az ilyen kijelentések modellezésére később, a % pontban térünk ki.

Meg kell különböztetnünk a természetes nyelven megfogalmazott állításokat, azok matematikai, formalizált modelljeitől.

Az állítások *formalizálására*, azaz, matematikai megfogalmazására, alapvetően két lehetőség van.

1. *Definiálunk egy "formális állítás nyelvet" és ebben modellezzük a hétköznapi állításokat*
2. *A halmazok nyelvét használjuk a modellezésre.*

Mindkét út "értelmezése" (szemantikája) állítások *egy további modellezéséhez, egy halmaz modellhez* vezet.

Az első megközelítéssel kezdjük, definiáljuk a *formális állítás nyelv* fogalmát.

4.1 A formális állítás nyelv

Az *abc*-t, azaz a nyelv szimbólumainak összességét alkotják

- (1) az állítás jelek (vagy állítás konstansok) $A, B, C, \dots$ sorozata
- (2) a logikai konstansok: $\vee, \wedge, \neg$
- (3) bal és jobb zárójelek: $($ és $)$.

Az *abc* jeleiből alkotható értelmes véges jelsorozatok a *formulák*. A formulák rekurzív definíciója a következő:

- (i) az állítás jelek formulák
- (ii) ha φ és ψ formulák, akkor $(\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\neg\varphi)$ szintén formulák

A *formulák* az állítás jelekből az (i) és (ii) szabályok véges sokszori alkalmazásával nyert jelsorozatok.

A természetes nyelv "elemi állításait", állítás jelekkel modellezzük (különbözőket különbözőkkel), a természetes nyelv "összetett állításait", pedig formulákkal. Az "és" -t a $\wedge$ konjunkcióval, a "vagy" -ot a $\vee$ diszjunkcióval, a "nem"-et a $\neg$ negációval modellezzük. Felhívjuk arra figyelmet, hogy a "vagy" itt a megengedő és nem a kizáró "vagy".

A modellezésnél a természetes állítások elveszítik jelentésüket, csupán logikai szerkezetük marad meg és igazság értékük (lásd lent)

A formulák számos zárójelet tartalmazhatnak. Az egyszerűsítés céljára szolgálhatnak a preferencia (vagy elsőbbségi) szabályok - hasonlóan a matematika más területeihez. A műveletek preferencia sorrendje erősségük szerint a következő: $\neg, \wedge, \vee$.

Például az $((A \wedge \neg(B \vee C)) \wedge D)$ zárójelezést így egyszerűsíthetjük: $(A \wedge \neg(B \vee C)) \wedge D$. Azonban a megmaradt zárójelet elhagyva a formula már lényegesen megváltozik.

A zárójelek elhagyásának szabályai hasonlóak az aritmetikai szabályokhoz.

Szoktunk formulákat helyettesíteni velük úgynevezett *logikailag ekvivalens* formulákkal (a definíciót lásd a következő pontban, - a legfontosabbak felsorolását lásd a % pontban). Az ilyenek ekvivalenciáját egyenlőre fogadjuk el használatuk gyakorlata alapján. Ilyen triviálisan ekvivalens formulák például $A \wedge B$ és $B \wedge A$, vagy $(A \vee B) \vee C$ és $A \vee (B \vee C)$, (azaz, a $\vee$ ismételt használatánál feleslegesek a zárójelek), stb.

PÉLDÁK

Adjon meg olyan formális állítás nyelvet, amelyben a felsorolt állítások modellezhetők, azaz, formalizálhatók, és adja is meg a formalizálást

1. Egy vonósnégyesben hegedű, másodhegedű, brácsa és cselló játszik.

a) Éppen csak 1 hangszer játszik b) egyik hegedű sem játszik c) legalább 1 hangszer játszik.

M: A nyelv álljon a H, M, B és C állítás jelekből, melyek jelentései rendre: a hegedű, a másodhegedű, a brácsa, a cselló játszik.

a) $(H \wedge \neg M \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg H \wedge M \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg H \wedge \neg M \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg H \wedge \neg M \wedge \neg B \wedge C)$

b) $\neg H \wedge \neg M$

Megj: a formula semmit sem állít arra nézve, hogy a brácsa és a cselló játszik-e vagy sem.

c) $H \vee M \vee B \vee C$ (Másik megoldás: $\neg(\neg H \wedge \neg M \wedge \neg B \wedge \neg C)$)

2. Dobókockával dobunk.

a) párosat dobunk b) 2-nél nagyobbat dobunk c) nem dobunk 6-t.

M: Jelentsenek a nyelvben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok állítás jeleket azzal a szándékolt jelentéssel, hogy hányast dobunk.

a) $2 \vee 4 \vee 6$ b) $3 \vee 4 \vee 5 \vee 6$ (vagy $\neg(1 \vee 2)$) c) $\neg 6$

3. a) Dezső vagy Péter ott voltak, de Józsi nem volt ott.

b) Dezső és Péter vagy Józsi ott voltak.

M: a) $(D \vee P) \wedge \neg J$

b) A mondat nem egyértelmű, így formalizálni sem lehetséges egyértelműen $(D \wedge P \vee J)$ nem egy formula. A két lehetséges értelmezés: $(D \wedge P) \vee J$ és $D \wedge (P \vee J)$

4 Két fekete dobókockával dobunk.

a) ugyanazt a számot dobjuk b) ötös összeget dobunk

M: Jelentsenek az $\{i, j\}$ ($1 \leq i, j \leq 6$) párok állítás jeleket azzal aszándékolt jelentéssel, hogy az $\{i, j\}$ párt dobjuk.

a) $\{1, 1\} \vee \{2, 2\} \vee \{3, 3\} \vee \{4, 4\} \vee \{5, 5\} \vee \{6, 6\}$

b) $\{1, 4\} \vee \{2, 3\}$

4.2 Interpretáció, igazság értékelés, kapcsolat a halmazalgebraikkal

A tudomány történetében, filozófusok, matematikusok, természettudósok, sokat gondolkodtak már az "igazság" fogalmáról. Ezt a bonyolult kérdést a matematikai logika a most tanult állítás logikában a lehető leginkább *leegyszerűsíti*.

Amikor természetes nyelvi összetett állítások "igazságáról" beszélünk a logika megközelítésben akkor egyrészt feltételezzük, hogy az állítások *igazak*, vagy *hamisak* és azt, hogy harmadik lehetőség nincs, vagyis *feltételezzük a "harmadik kizárásának elvét"*, másrészt, feltételezzük, hogy az elemi állítások igazságértékei *meghatározzák* a teljes állítás igazságát és csak ezek határozzák meg. Ezt az elgondolást modellezzük a matematikában.

Egy már *formalizált állításnál*: feltételezzük, hogy igazságát jól definiált módon meghatározzák a benne szereplő állítás jelek "igazság értékei" és csak ezek határozzák meg.

Lehetőség van arra, hogy egy hétköznapi állítás igazságát modellezzük a matematikában (az elemi állítások igazsága modellezésén keresztül).

Az elemi állításokat modellező állítás jelekhez egy f függvény segítségével úgynevezett *igazság értékeket* rendelhetünk az i illetve a h értékeket (igaz, illetve, hamis, másképpen $\uparrow$ vagy $\downarrow$). i illetve h helyett választhatnánk akár az 1 illetve 0 értékeket is. f tehát egy leképezés az állítás szimbólumok halmazáról a $\{i, h\}$ két elemű halmazba. f elnevezése *interpretáció*.

f -t a lehető legtermészetesebb módon, kiterjesztjük az állítás szimbólumokról az összes formulára, a művelet igazság definíciók (másképpen igazság táblázatok) segítségével. Ezek pontosan definiálják azt, hogy a $\vee, \wedge, \neg$ logikai műveletek komponensei igazság értékei hogyan határozzák meg a művelet eredményének igazság értékét. f kiterjesztését *igazság függvénynek* nevezzük (állítás logikában az interpretáció és az igazság függvény elnevezések gyakran szinonímák).

Az igazság definíciók a következők:

$\varphi \vee \psi$ pontosan akkor igaz, ha φ igaz, vagy ψ igaz (tehát legalább az egyik igaz)
 $\varphi \wedge \psi$ pontosan akkor igaz, ha φ igaz és ψ igaz (tehát mindkettő igaz)
 $\neg\varphi$ pontosan akkor igaz, ha φ hamis.

Táblázattal:

$A \vee B$ igazság táblája:

$A \setminus B$	↑	↓
↑	↑	↑
↓	↑	↓

Az $A \wedge B$ igazság táblája:

$A \setminus B$	↑	↓
↑	↑	↓
↓	↓	↓

A nyelv kiterjesztése az $\rightarrow$ implikáció állítás művelettel

A nyelv logikai konstansait gyakran kiegészítjük az $\rightarrow$ állítás művelettel. Az jelentése: “ha A , akkor B ” és tulajdonképpen $A \rightarrow B$ a $\neg A \vee B$ formula rövidítése.

A formula definíció így kiegészül a következővel: ha φ és ψ formulák, akkor $(\varphi \rightarrow \psi)$ szintén formula.

Az $\rightarrow$ igazság táblája:

$A \setminus B$	↑	↓
↑	↑	↓
↓	↑	↑

Másképpen: $\varphi \rightarrow \psi$ pontosan akkor *hamis*, ha φ igaz, és ψ hamis (az “igaz” érték, tehát ennek tagadása).

Megjegyzések:

Vegyük észre, hogy a definíció például azzal a következménnyel jár, hogy ha A hamis és B is hamis, akkor $A \rightarrow B$ igaz!

Az implikáció műveletre vonatkozó elsőbbségi szabály a következő: az implikáció gyengébben köt az eddigi műveleteknél, tehát a műveletek sorrendje, az erősebbek felé haladva: $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$. Két, egymást követő implikáció esetén pedig a “balról jobbra” szabály érvényes, azaz, a baloldali implikációt olvassuk először, vagyis zárójelezéssel: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ az $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ formulát jelenti.

Az implikáció segítségével definiálhatjuk az $A \leftrightarrow B$ ekvivalencia állítás műveletet, mint az $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$ műveletet.

Rögzítsünk egy $\mathcal{L}$ formális állítás nyelvet és legyen H az állítás jelek összes lehetséges f interpretációinak halmaza. Legyen $T \subset H$ rögzített. Ha α egy formula, akkor legyen .

$$\|\alpha\| := \{f : f(\alpha) = \uparrow, f \in T\}.$$

ahol $\|\alpha\|$ – t az α formula *állítás igazság halmazának* nevezzük.

Definíció Az α és β formulák logikailag ekvivalensek, ha $\|\alpha\| = \|\beta\|$, azaz, az állítás szimbólumok minden értékelése esetén (minden interpretáció esetén), igazságértékük megegyezik.

Könnyen ellenőrizhetők a következők:

$$\begin{aligned}\|\alpha \vee \beta\| &= \|\alpha\| \cup \|\beta\| \\ \|\alpha \wedge \beta\| &= \|\alpha\| \cap \|\beta\| \\ \|\neg\alpha\| &= T - \|\alpha\| \\ \|\alpha \vee \neg\alpha\| &= T\end{aligned}$$

(4)

****Tétel** (i) Az $\|\alpha\|$ halmazok egy $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^T$ halmazalgebrát alkotnak T -n, ahol α a nyelv formuláin fut.

(ii) Fordítva, minden halmazalgebra, izomorfától eltekintve, felfogható valamely $\mathcal{L}$ állítás nyelvhez tartozó $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}^T$ algebrának.

Biz. Az (i) állítás az 4 összefüggésekből következik, mivel így a kérdéses halmazrendszer zárt az $\cup, \cap$ és komplementer műveletekre és univerzuma T .

(ii) Tekintsünk egy halmazalgebrát T egység halmazzal és rögzítsük egy $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ generátor rendszerét, azaz tagjainak egy olyan részhalmazát, hogy azokból az unió, metszet és komplementer képzés véges sokszori alkalmazásával, a halmazalgebra minden elemét megkapjuk (ilyen létezik, hiszen maga, az egész halmazalgebra tekinthető önmaga generátor rendszerének). Vezessünk be a generátorrendszer minden tagjára egy állítás szimbólumot. Ez definiálja az $\mathcal{L}$ nyelvet.

Tekinethetnénk T -t az igazságértékelések halmazának, ha pedig A egy állítás-jel, akkor tekinthetnénk a hozzá tartozó halmazt $\|A\|$ -nak és $\|\alpha\|$ -nak pedig az állításjelekből adódó megfelelő tagját a halmazalgebrának . Egyetlen probléma

az, hogy így bizonyos igazságértékelések többször is előfordulhatnak, ezért T -t tovább szűkítjük:

Legyen $h \sim k$, ahol $h, k \in T$, ha minden G_γ -ra $h \in G_\gamma$ akkor és csak akkor, ha $k \in G_\gamma$. ($\sim$ nyilván "ekvivalencia reláció", lásd a % fejezetet). Válasszunk ki minden ekvivalencia osztályból egy reprezentáns elemet, legyen az így nyert halmaz T' . Ekkor a nyert halmazalgebra T' egységgel már egy $\mathcal{I}_C^{T'}$ típusú algebra, másrészt az eredeti halmazalgebra nyilván izomorf vele. Így a tételt beláttuk.

q.e.d.

A tételt röviden így foglalhatjuk össze: *Egy állítás nyelv formuláinak megfeleltethető egy halmazalgebra, az állítás igazsághalmazok algebrája, és izomorfíától eltekintve minden halmazalgebrát megkapunk ilyen módon. A hétköznapi állításokat, az állítás formulákon keresztül, igazság halmazokkal is modellezhetjük.*

Megállapíthatjuk, hogy az állítás logika fogalmának, ilyen értelemben, megfeleltethető a *halmazalgebra* fogalma, vagy azt is mondjuk, hogy utóbbi az előbbinek "algebraizációja".

A fentiekben a halmazalgebrákat "korlátoztunk" a H egység bizonyos T részhalmazára, Azt fogjuk erre mondani, hogy a halmazalgebrát *relativizáltuk*. Erre a fogalomtra még visszatérünk a % pontban.

Foglaljuk össze egy rövid táblázatban a hétköznapi fogalmak és az igazsághalmazok kapcsolatát:

<i>Hétköznapi élet, Természetes nyelv</i>	<i>Állítás logikában</i>
az igazságokkal kapcsolatos lehetőségek állítások	az igazság értékelések T halmaza
"és", "vagy", "nem",	T -nek az $\ \alpha\ $ részhalmazai
állítások összessége	halmaz műveletek: $\cap, \cup$, az $\ \alpha\ $ -k halmazalgebrája T alaphalmazzal

4.3 Állítások modellezése a halmaz nyelv közvetítésével

Az % pont elején már említettük, hogy a hétköznapi állítások formalizálására két lehetőség van: 1, az állítás logika formális nyelve segítségével és 2. a halmazok nyelve segítségével. Ebben az alponban ez utóbbival foglalkozunk és a hozzá tartozó halmaz modellel (szemantikával).

"Halmaz kifejezésekről" már volt szó a % pontban. Ahogyan a hétköznapi állításoknak megfeleltethetjük egy állítás nyelv formuláit, úgy megfeleltethetünk halmaz kifejezéseket is. Az $\vee, \wedge, \neg$ állítás művelet jelek helyett az $\cup, \cap$ és művelet jeleket használjuk.

Így például az % pont.beli 1c példában a “legalább egy hangszer játszik” állításnyelvi $H \vee M \vee B \vee C$ megoldásnak a $H' \cup M' \cup B' \cup C'$ megoldás felel meg, ahol H', M', B', C' halmaz változók. A 3a) példában pedig a $(D \vee P) \wedge \neg J$ megoldásnak a $(D' \cup P') \cap \overline{J'}$ felel meg.

Nyilvánvaló az állítás nyelvi- és a halmaz kifejezésekkel történő modellezések közötti analógia. *Az igazi különbség a hozzájuk tartozó halmaz modellek között van.* Az állításokhoz, mint láttuk, állítás igazsághalmazok tartoznak. Ezt a megközelítést a következőképpen absztrahálhatjuk:

Definiálunk a modellezendő hétköznapi állításokhoz kapcsolódó, kizáró (diszjunkt) "elemi lehetőségeket", amelyek valamelyike biztosan bekövetkezik (ezek összességét tekintjük "alaphalmaznak", másképpen "univerzumnak") úgy, hogy a szóban forgó állítások leírhatók legyenek ezen elemi lehetőségek valamely halmazával. Ezen elemi lehetőségek összességét tekintjük a kérdéses állításnak megfelelő konkrét halmaznak.

Ehhez az eljáráshoz nincs szükség a formális állítás nyelvre, csak a halmazok nyelvére és a halmaz fogalomra van szükség.

Vegyük sorra a % pont példáit.

PÉLDÁK

Adja meg az állításokhoz elemi lehetőségeknek egy alkalmas halmazát, melynek bizonyos részhalmazai az adott állítások leírhatók

1c). Választási lehetőség például az elemi lehetőségekre az, hogy az egyes hangszerek játszanak-e vagy sem, ez 2^4 lehetőség. Ezek az elemi lehetőségek alkotják az univerzumot. Az a kijelentés, hogy legalább 1 hangszer játszik, nyilván egy $16-1=15$ elemű részhalmazzal azonosítható.

2.a) Az elemi lehetőségek összessége például lehet hat elemű: 1,2,3,4,5 vagy 6-t dobunk a kockával. A "páros számot dobunk" kijelentés pedig egy három elemű részhalmazzal azonosítható, a $\{2, 4, 6\}$ -tal.

3a) .Az elemi lehetőségek lehetnek annak variációi, hogy Dezső, Péter és Józsi ott voltak-e, vagy sem. Ez összesen 8 eset. A “Dezső és Péter ott volt, de Józsi nem” állításnak ezek közül 1 felel meg.

Ne tévesszük össze az “elemi lehetőségeket” az elemi állításokkal. Az elemi állítások a nyelv azon állításai, amelyeket már nem kívánunk visszavezetni állítás műveletekkel más állításokra. Az elemi lehetőségeknek megfelelő állításokat viszont nem kötelező szerepeltetni a nyelvben.

Vegyük észre, hogy az elemi lehetőségek választása *nem egyértelmű*. Például a 2. példánál kételemű alaphalmazt is választhatnánk: párosat dobunk, vagy páratlant dobunk. Ez esetben a páros dobásnak egyelemű részhalmaz felel meg.

Ha netán egy másik kockát is feldobunk, akkor választhatunk 36 elemű alaphalmazt is, tekintetbe véve a másik kockán elért eredményt is. Ebben az esetben a "mi kockánkkal párosat dobunk" kijelentésnek $3 \cdot 6 = 18$ elemű részhalmaz felel meg. Vagy a 4. példánál, választhatunk 36 elemű alaphalmazt (a dobások sorrendjére is tekintettel vagyunk), vagy 21 elemű alaphalmazt.

Jelen megközelítésben, a hétköznapi állításoknak a halmaz kifejezéseken keresztül felel meg közvetlenül egy *halmazalgebra*, melynek alaphalmazát az elemi kimenetek összessége alkotja, tagjait pedig a halmaz kifejezéseknek, a fenti módon megfeleltethető halmazok. Egy-egy ω elemi lehetőség esetén egy állítás aszerint teljesül, vagy nem teljesül (igaz, vagy hamis), hogy a neki megfelelő A részhalmaznak ω eleme, vagy nem eleme. Ebben a megközelítésben tehát az "igaz" vagy "hamis" igazság értékeket az $\in$ vagy $\notin$ fogalmakkal modellezzük. A "ha A , akkor B " alakú nyelvi- logikai fordulat modellezésére (azaz, az $A \rightarrow B$ implikáció logikai művelet modellezésére) az $\bar{A} \cup B$ halmazművelet alkalmas.

Az állításnyelvi igazsághalmazos megközelítés és a mostani abban térnek el, hogy a mostani megkerüli az állítás logika formális nyelvét és az igazságértékelés fogalmát, helyette halmaz nyelvet használ. Megjegyezzük, hogy a halmaz kifejezések helyett úgynevezett "Boole kifejezéseket" is használhatnánk, de ez is az ismertett halmaz modellhez vezetne (például a fenti 3a) $(D \vee P) \wedge \neg J$ megoldásnak $(d + p) \cdot (-j)$ lenne a Boole megfelelője, de ezt most nem részletezzük).

Az elemi lehetőségek összességét tovább is szűkíthetjük. Erre sor kerülhet például újabb megszorítások (pl axiómák) feltevése miatt, vagy új információ modellezése miatt, stb. Ez az eredeti halmazalgebrai modellben azt jelenti, hogy az eredeti H egység-halmaz szerepét H -nak egy rögzített C nem üres részhalmaza veszi át.

Tétel A $C - A$ alakú halmazok, ahol A az eredeti halmazalgebra tagja, szintén halmazalgebrát alkotnak C egység halmazzal.

Biz. Igazolható a $C - A$ alakú halmazok zártak az unió, metszet és komplementer képzésre, mert

$$(C - A) \cup (C - B) = C - (A \cap B)$$

$$(C - A) \cap (C - B) = C - (A \cup B)$$

$$C - (C - A) = C - \bar{A}$$

Például az elő igazolása: áttérve az univerzális komplementerre, igazolandó, hogy

$$(C \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{B}) = C \cap \overline{A \cap B}. \text{ De a jobb oldalra alkalmazva a deMorgan}$$

azonosságot: $C \cap \overline{A \cap B} = C \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$. A disztributivitást használva fejezhetjük be a bizonyítást.

A másik két összefüggés hasonlóan igazolható.

q.e.d.

Definíció A fenti halmazalgebrát az eredeti $\mathcal{H}$ halmazalgebra C -re vett *relativizáltjának* (másképpen: *nyomának*) nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a valószínűesszámszámításban állítások modellezésére a *jelelen pontbeli megközelítést* használják. Az "alaphalmaz" elnevezése általában "eseménytér" (vagy "biztos esemény"), jelölése Ω , a részhalmazok elnevezései pedig az "események", jelöléseik A, B, C , stb. Amikor a valószínűesszámszámításban "feltételes eseménytérrel" beszélünk, akkor az eredeti eseménytér (halmazalgebra) egy relativizálásról van szó.

A fent felsorolt példák lehetnének valószínűesszámszámítás feladatok is. Csupán a terminológia különbözik. Így például 2.-ben az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz a "biztos esemény" (az Ω halmaz), például $\{4\}$ egy "elemi esemény" és $\{2, 4, 6\}$ egy "esemény". Ha például tudomásunkra jut, hogy a kocka cinkelt és például hatos dobás nem fordulhat elő, akkor az eseményteret relativizáljuk a $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazra.

Most is készítsünk a hétköznapi fogalmak és fent vázolt "közvetlen" halmaz modelljük kapcsolatáról egy táblázatot:

<i>Hétköznapi élet, Természetes nyelv</i>	<i>Halmazok elméletében</i>
lehetséges esetek	egy rögzített alkalmas halmaz (H)
állítások	H bizonyos részhalmazai
"és", "vagy", "nem",	halmaz műveletek: $\cap, \cup$,
állítások összessége	egy halmazalgebra H alaphalmazzal

4.4 A (logikai) következmény fogalmáról

A matematikában sokszor használunk logikát "meta szinten". Ennek megvan a precíz háttere a matematikai logikában, de ezt sokszor nem tesszük explicitté, ha félreértés nem lehetséges. Például alapvető a matematikában az $A \Rightarrow B$ "következtetés". Ezen azt értjük, hogy ha A igaz, akkor B is igaz - egy helyes következtetés. E mögött a matematikai logikában a "logikai következmény fogalom" precíz fogalma áll. Vagy, gyakran használjuk a "szükséges feltétel", "elégséges feltétel", "szükséges és elégséges feltétel" fogalmakat, ugyanezen kifejezéseket a matematikai logikában is használjuk a következmény fogalommal kapcsolatban. Használjuk a harmadik kizárásának elvét is, amely alapelv a szokásos matematikai logikában is.

Több érv szól amellett, hogy ne elégedjünk meg azzal, hogy a matematikában csak "meta szinten" használjuk a logikát. Az egyik érv az, hogy a matematikában nem csak helyenként használunk logikát, hanem a logika az egész matematikát áthatja, sőt, kis túlzással azt is szokták mondani, hogy a matematika a "logika tudománya". A 20. század elején kiderült (a "matematika forradalma"), hogy a matematika mibenlétének megértéséhez elengedhetetlen a matematikai logika alapszintű ismerete. A matematikai logika hatására a matematika számos új területtel gazdagodott. Ilyenek területek például a modellelmélet, a nem-standard analízis, vagy az algebrai logika. Napjainkban a matematikának is elengedhetetlen kelléke a számítógépes gondolkodás. Az elméleti

számítástudomány és a matematikai logika a 20. század második felétől viszont lényegesen összefonódtak olyannyira, hogy azt tartják, hogy a *matematikai logika a számítástudomány nyelve*.

Mindez indokolja, hogy megismerkedjünk a matematikai logika elemeivel.

4.5 A (logikai) következmény fogalom definíciójáról

A logika talán két legfontosabb alapfogalma az igazság fogalom és a "logikai következmény" (röviden "következmény") fogalom. Az igazság fogalomról már volt szó.

A természetes nyelv használatánál egy állítás akkor *logikai* következménye más állításoknak (premisszáknak), ha eltekintve az a szóban forgó állítások jelentésétől, vagy a premisszák igazságától, a szóban forgó állítások (logikai) szerkezetét tekintve, az állítás "következik" a premisszákból.

PÉLDÁK

1. Premisszák: Ha egy állat *tud repülni*, akkor az állat egy *madár*. A *katicabogár* állat és *tud repülni*. Konklúzió: a *katicabogár* egy *madár*.

Érezzük, hogy a következtetés helyes. Formalizálva az állításokat: $T \rightarrow M$ és $K \rightarrow T$ ből következik $K \rightarrow M$. A formalizálásból is sejtjük, hogy a következtetés helyes, holott a konklúzió hamis.

2. Premisszák: Ha a *halak tudnak úszni*, akkor a *vidra is tud úszni*. A *vidra* tud úszni. Konklúzió: A *halak tudnak úszni*.

Azt érezzük, hogy a következtetés helytelen. Formalizálva az állításokat: $H \rightarrow V$ és V -ből következik H .

A következtetés helytelen, de a konklúzió helyes.

Tegyük fel, hogy $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ és φ egy formális állítás nyelvnek formulái.

Definíció. φ a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formuláknak logikai következménye, ha bármely olyan f igazságértékelés, amely a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formulákhoz rendre i értéket rendel, a φ formulához is i -t rendel.

A logikai következmény fennállását így jelöljük: $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$, ha pedig nem áll fenn, azt így: $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \not\models \varphi$.

A definíció értelmében, ha egyáltalán nincs olyan f igazság értékelés, amely a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formulákhoz rendre i értéket rendel, $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$ -t akkor is helyesnek tekintjük. A definíció alkalmazható a végtelen sok premissza esetére is.

Ha φ az üres halmaznak logikai következménye, azaz φ bármely igazság értékelés esetén igaz, akkor azt mondjuk, hogy φ *azonosan igaz*, vagy azt, hogy φ egy *tautológia* és így jelöljük: $\models \varphi$.

A következő egyszerű állítást gyakran használjuk a következmény vizsgálatánál.

Következmény. $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$ akkor és csak akkor a $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ formula halmaz nem kielégíthető (azaz, kielégíthetetlen) valamely f interpretációra, azaz van olyan f interpretáció, hogy erre valamennyi formula igazság értéke *i*.

Biz.:

A két állítás tagadásáról gondoljuk meg, hogy ekvivalensek. $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \not\models \varphi$ azt jelenti, hogy van olyan f igazság értékelés, amelyre $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ valamennyien igazak, de φ hamis. Viszont $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ kielégíthetősége pontosan $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ kielégíthetősége ugyanazt jelenti.
q.e.d.

A fenti következmény negált alakja:

$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \not\models \varphi$ akkor és csak akkor ha a $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ formula halmaz kielégíthető.

Levonva a tanulságot a jelen pont % elején szereplő példákból, a logikai következmény fogalom alkalmazásáról a következőt állíthatjuk:

A helyes logikai következmény arra alkalmas, hogy igaz premiszákból igaz konklúziót nyerjünk. Egyéb esetekben a logikai következmény alkalmazása értelmetlen.

Az igazság értékelés definíciójára gondolva, nyilvánvaló a következő:

A logikai következmény helyessége véges lépésben eldönthető.

Ez egy kivételes tulajdonsága az állítás logikának, például összevetve az elsőrendű logikával, de ugyanakkor az állításlogika gyengeségét is mutatja.

Azonban nem mindegy, hogy hogy formulák kielégíthetősége (vagy következmény helyessége) hány lépésben dől, azaz mennyire hatékony algoritmussal rendelkezünk a probléma eldöntésére. Az állításformulák kielégíthetőségének problémája az úgynevezett SAT probléma és verziói, amelynek kiterjedt irodalma létezik az algoritmus elméletben (lásd %).

Vigyázat! Ne tévesszük össze a $\models$ következmény relációt az $\rightarrow$ implikáció művelettel.

$\alpha \models \beta$ -re két eset van: fennáll, vagy nem áll fenn. Míg $\models$ egy *reláció*, $\alpha \rightarrow \beta$ egy *művelet* (két formulához egy harmadikat rendel, hasonlóan például az $A \vee B$ -hez). $\models$ és $\rightarrow$ között természetesen szoros a kapcsolat, ezt a logika Dedukció tétele fogalmazza meg:

Tétel (dedukció tétel)

(i) $\alpha \models \beta$ akkor és csak akkor, ha $\models \alpha \rightarrow \beta$

(ii) $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ akkor és csak akkor, ha $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$

Biz: (ii) nyilván általánosítása (i)-nek. (ii) esetén viszont a kér állítás tagadása ekvivalens. Ugyanis $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ helytelensége azt jelenti, hogy valamely igazság értékelésre $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ valamennyi formulája igaz, de β hamis. $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ helytelensége azt jelenti, hogy valamely értékelésre $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ hamis, azaz erre az értékelésre $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ igaz, de β hamis.

q.e.d.

Szerepelt már, hogy az $\rightarrow$ művelet kifejezhető a $\vee$ és a $\neg$ műveletek segítségével, pontosabban,

$\alpha \rightarrow \beta$ "logikailag ekvivalens" a $\neg\alpha \vee \beta$ formulával

Beszélhetünk nevezetes *következtetési sémákról*. Ilyen például a *rezolúciós következtetés*:

$$\{L \vee \alpha, \neg L \vee \beta\} \models \alpha \vee \beta$$

ahol L egy tetszőleges állítás jel, vagy a rezolúció speciális esete a *modus ponens*

$$\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \models \beta$$

A fentiek igazolását az olvasóra bízuk.

Formulák *logikai ekvivalenciája* megfogalmazható a következmény fogalom, illetve a tautológia fogalom segítségével:

α és β logikailag ekvivalensek, ha $\alpha \models \beta$ és $\beta \models \alpha$ fennáll egyidejűleg. Ezzel ekvivalens az, hogy az $\alpha \leftrightarrow \beta$ formula egy tautológia, azaz, $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

Léteznek triviálisan logikailag ekvivalens formulák, ilyenek például a $\varphi \vee \psi$ és a $\psi \vee \varphi$ pár, vagy a φ és $\neg\neg\varphi$ pár. A következő tételben tartalmazott ekvivalenciák kevésbé nyilvánvalóak:

Tétel A következő formula párok logikailag ekvivalensek:

- (i) $\varphi \wedge (\psi \vee \gamma)$ és $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)$
 $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$ és $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$
- (ii) $\neg(\varphi \wedge \psi)$ és $\neg\varphi \vee \neg\psi$
 $\neg(\varphi \vee \psi)$ és $\neg\varphi \wedge \neg\psi$
- (iii) $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ és $\varphi \wedge \neg\psi$
 $\varphi \rightarrow \psi$ és $\neg\varphi \vee \psi$
- (iv) $\varphi \rightarrow \psi$ és $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

A fentieket a definíció alapján igazolhatjuk.

PÉLDA

Igazolja azt, hogy $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$ és $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$ formulák logikailag ekvivalensek.

Megmutatjuk, hogy a két formula pontosan egyszerre hamis

$\varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$ akkor hamis, ha φ és $(\psi \wedge \gamma)$ is hamis. Utóbbi akkor teljesül, ha ψ és γ legalább egyike hamis.

$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$ akkor hamis, ha $(\varphi \vee \psi)$ vagy $(\varphi \vee \gamma)$ legalább egyike hamis. Ha például $(\varphi \vee \psi)$ hamis, akkor φ és ψ is hamis. Hasonló a $(\varphi \vee \gamma)$ esete. Tehát a feltétel: φ hamis és ψ és γ legalább egyike hamis.

Fontos kérdés a matematikában a függetlenség kérdése.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy egy φ formula független a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formuláktól, ha $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \not\models \varphi$ és $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \not\models \neg\varphi$ egyidejűleg, vagyis sem φ sem a tagadása $\neg\varphi$ nem logikai következmény.

Tétel A φ formula független a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formuláktól, ha $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi\}$ és $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ is kielégíthető.

A fenti következmény értelmében a függetlenség vizsgálata úgy történik, hogy keresünk $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ -t és $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg(\neg\varphi)\}$, azaz $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi\}$ -t is kielégítő f igazság értékelést. Ezt az eljárást a *függetlenségre vonatkozó modell módszernek* hívjuk*****.

Definíció Egy $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ axióma rendszer ellentmondástalan, ha nincs olyan α formula, hogy $\Sigma \models \alpha$ és $\Sigma \models \neg\alpha$.

Igaz a következő tétel:

Tétel $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ellentmondástalan akkor és csak akkor, ha Σ -nak van modellje.

Biz.: A negáltak ekvivalenciáját igazoljuk. Σ ellentmondásos pontosan akkor, ha valamely α formulára $\Sigma \models \alpha$ és $\Sigma \models \neg\alpha$. % tétel értelmében ekvivalens azaz, hogy valamely α formulára $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ és $\Sigma \cup \{\alpha\}$ sem kielégíthető. Ha Σ kielégíthető lenne, akkor viszont az utóbbi formulák egyike is kielégíthető lenne, ez ellentmondás. Tehát Σ kielégíthetetlen.

q.e.d.

4.6 A logikai következmény fogalom vizsgálatáról

A logikai következmény helyességét a definíció alapján vizsgáljuk, mégpedig úgy, hogy ellenpéldát keresünk (azaz modellt keresünk a cáfolatra). Ha találunk ellenpéldát, akkor igazoltuk a következmény helytelenségét, ha pedig keresésünk bizonyítottan sikertelen, akkor a következmény helyes.

PÉLDÁK:

Vizsgálja meg, hogy az %-beli következtetések helyesek-e?

1. A formalizálás után a kérdés, hogy a $\{T \rightarrow M, K \rightarrow T\} \models K \rightarrow M$ következtetés helyes-e?

Indirekt, tegyük fel, hogy, hogy $K \rightarrow M$ hamis, de $T \rightarrow M$ és $K \rightarrow T$ igaz. Ekkor K igaz és M hamis. Mivel $K \rightarrow T$ igaz, ezért T is igaz. Viszont $T \rightarrow M$ igaz, ez ellentmondás.

2. A kérdés: helyes-e a $\{H \rightarrow V, V\} \models H$ következtetés?

Nem, ellenpélda: H legyen hamis és V igaz.

FELADATOK

Helyesek-e az alábbi következtetések?

1. "Ha *Pali sovány*, akkor *Karcsi nem fekete hajú* és *Ricsi nem magas*. Ha *Ricsi magas*, akkor *Andris zöld szemű*. Ha *Andris zöld szemű* és *Karcsi fekete hajú*, akkor *Pali sovány*. Tehát *Karcsi fekete hajú*."

Nyelv: P, K, R, A

M: Először formalizáljuk a következtetést:

$\{P \rightarrow K \wedge R, \neg R \rightarrow A, A \wedge \neg K \rightarrow P\} \models \neg K$

Ellenpélda keresése: Tegyük fel, hogy $\neg K = \downarrow$, azaz $K = \uparrow$ és az összes többi premissza igaz.

Ekkor $A \wedge \neg K \rightarrow P$ igaz. $P \rightarrow K \wedge R$ igaz, ha például R igaz. Ekkor $\neg R \rightarrow A$ is igaz. Tehát a következmény nem helyes.

2. Vegyük hozzá a premisszákhöz azt, hogy "Karcsi fekete hajú". Következik-e ezután, hogy "Ricsi nem magas"?

M: Ellenpélda keresése

A premisszákhöz jön az, hogy: $\neg K$, és az új konklúzió az, hogy R

Tegyük fel, hogy $R = \downarrow$ és az összes többi premissza igaz.

(a) Mivel $\neg R \rightarrow A = \uparrow$, ezért $A = \uparrow$

(b) $\neg K = \uparrow$, ezért $K = \downarrow$

(c) $P \rightarrow K \wedge R = \downarrow$, ezért $P = \downarrow$

(d) az eddigiekből következik, hogy $A \wedge \neg K \rightarrow P = \downarrow$

Ezért ellenpélda nem létezik, a következtetés helyes.

3. Az 1. feladatnál, független-e a premisszáktól az az állítás, hogy "Karcsi fekete hajú"?

M: Azt már igazoltuk, hogy $\neg K$ nem következik a premisszákból. Most a kérdés az, hogy

$\{P \rightarrow K \wedge R, \neg R \rightarrow A, A \wedge \neg K \rightarrow P\} \models K$ helyes-e?

Tegyük fel, hogy $K = \downarrow$ és az összes többi premissza igaz.

a) $P \rightarrow K \wedge R = \uparrow$ miatt $P = \downarrow$

b) Ekkor $A \wedge \neg K \rightarrow P = \uparrow$ miatt $A = \downarrow$

c) R -t $\uparrow$ -nak választva, $\neg R \rightarrow A = \uparrow$

Találtunk ellenpéldát a következmény helytelenségére, ezért K sem következik a premisszákból, így a függetlenség fennáll.

Láttuk, hogy az állítás logikának, bizonyos értelemben, megfeleltethető a halmazalgebra fogalom. *Felvetődik a kérdés, hogy mi felel meg halmazalgebrákban a logikai következmény fogalmának?*

Ha tekintjük a $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$ következményt, akkor tudjuk, hogy az egyes formuláknak megfeleltethető egy-egy halmaz, a lehetséges igazság értékelések összességének bizonyos részhalmazai, jelöljük ezen részhalmazokat rendre $I_1, I_2, \dots, I_n$ és I -el. Szükséges és elégséges, hogy közöttük a

$$I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n \subset I \quad (*)$$

reláció fennálljon, mivel a logikai következmény definíciója szerint, valahányszor egy igazság értékelés kielégíti valamennyi formulát $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ -ben, akkor φ -t is kielégíti.

(*) tehát egy speciális halmazalgebrán teljesül. A következő tétel ezt általánosítja és ekvivalens feltételt ad a következmény fogalom teljesülésére:

Tegyük fel, hogy $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi$ az állítás logika formulái. Rendeljük általában a φ_i formulához a halmazalgebrák nyelvén az F_i formuláját, amely φ_i -ből úgy jön létre, hogy az állítás jeleket halmaz változókkal, a $\vee, \wedge$ és $\neg$ műveleteket pedig rendre az $\cup, \cap$ és $\neg$ műveletekkel helyettesítjük.

Tétel

$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$ teljesül akkor és csak akkor, ha az

$$F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \subset F \quad (**)$$

tartalmazás bármely halmazalgebrán teljesül a szereplő halmaz változók bármely helyettesítésére konkrét halmazokkal.

Biz.:

Az állítás $\Leftarrow$ iránya. Ez következik a (*) tartalmazásból.

Tekintsük azt a halmazalgebrát, amelyik az igazságértékelések halmazán, vagy egy részhalmazán, a nyelv formuláinak felel meg (lásd fent). Amennyiben ezen teljesül a (**) feltétel, abból, a következmény fogalom definíciója szerint adódik hogy a következmény teljesül.

Az állítás $\Rightarrow$ iránya. **Tétel (ii) ből % tudjuk, hogy bármely halmazalgebra tekinthető izomorfiára úgy, mint valamely formális nyelv formulái igazság értékeléseinek halmazalgebrája. A szóban forgó következmény ezen a nyelven is megfogalmazható, ezért helyessége esetén (**) teljesül.

q.e.d.

A tétel újabb fontos módszert ad a következmény fogalom vizsgálatára.

A halmazalgebrákról tanultak értelmében azt is tudjuk, hogy (*) kifejezhető azonosság formájában, például így

$$(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) \cup F = F$$

Ha az állítás logikai formulában előfordul az $\rightarrow$ művelet, akkor azt az $A \rightarrow B$ -t helyettesítő $\bar{A} \cup B$ átalakítással kezeljük.

PÉLDA

Vizsgáljuk a fenti 2. példát a halmazalgebrás módszerrel:

$$\{P \rightarrow K \wedge R, \neg R \rightarrow A, A \wedge \neg K \rightarrow P, \neg K\} \models R$$

Lefordítva halmazalgebrai tartalmazásra:

$$(\bar{P} \cup (K \cap R)) \cap (R \cup A) \cap ((\overline{A \cap K}) \cup P) \cap (\bar{K}) \subset R, \text{ egyszerűsítve:}$$

$$(\bar{P} \cup (K \cap R)) \cap (R \cup A) \cap ((\bar{A} \cup K) \cup P) \cap (\bar{K}) \subset R,$$

Ha x eleme a bal oldalnak, akkor két eset van: $x \in A$, vagy $x \notin A$.

Ha $x \notin A$, akkor $x \in R \cup A$ miatt készen vagyunk.

De, $x \in A$ nem lehetséges, mert, ha $x \in A$, akkor $x \in \bar{K}$ és $x \in (\bar{A} \cup K) \cup P$ miatt $x \in P$. De $x \in \bar{P} \cup (K \cap R)$ ellentmondás.

Megjegyezzük, hogy ahogyan a halmaz azonosságok végesen axiomatizálhatók (lásd %), úgy a tautológiák összessége is "végesen axiomatizálhatók" az állítás logikában. Ezeket az axiómákat logikai axiómáknak hívjuk.

Az előző és a mostani pont néhány megállapítását összefoglalva egy táblázatot készítünk állításlogikai fogalmak és halmazalgebrai fogalmak kapcsolatáról.

Ez az *algebrai logika* egyik kapcsolat rendszere:

Állításlogika

$\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \rightarrow \beta$ és $\neg \alpha$ állítás műveletek

"igaz", és "hamis"

állítások

$\alpha \models \beta$ (logikai következmény)

α és β logikailag ekvivalensek

formulák összessége

Halmazalgebrák

$A \cup B, A \cap B, \bar{A} \cup B$ és $\bar{A}$ halmazműveletek

H egység halmaz és $\emptyset$ üres halmaz

H egység halmaz bizonyos részhalmazai

$A \subset B$

$A = B$

halmazalgebra H alap halmazzal

A táblázat általánosítható majd elsőrendű logikára is.

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK:

FORMALIZÁLÁS

1. Adjon olyan hétköznapi állításokat, hogy valamennyi formalizálása ez legyen

$$(A \vee B) \wedge (\neg C \vee B)$$

2. Formalizálja azt, hogy az A, B és C közül pontosan 1 teljesül.

3. Mi az $A \rightarrow B$ logikai műveletnek megfelelő halmazművelet?

4. Három dobókockával dobunk. Válassza meg az elemi kimenetek halmazát, ha

a) a kockák különböző színűek

b) három fekete kockáról van szó

c) három fekete kockáról van szó és csak a dobások paritása érdekel bennünket

5. Formalizálja a "kizáró vagy" műveletet.

6. Adja meg a következő igazság értékeket:

a) $\downarrow \rightarrow \downarrow = ?$

b) $\downarrow \rightarrow \uparrow = ?$

7. Szerepelnek-e az állítás nyelvben az $\downarrow$ és $\uparrow$ igazság értékek?

8. Megőrzi-e a formalizálásnál egy állítás az "igazságát"?

9. Adjon példát olyan helyes következtetésre, ahol a konklúzió hamis

10. Adjon példát olyan helytelen következtetésre, ahol a konklúzió igaz

11. Milyen, halmazokra vonatkozó reláció felel meg az $A \models B$ relációnak?

12. Lehetséges-e, hogy A és B igaz, de az $A \models B$ következmény helytelen.

13. A modus ponens miért egy speciális rezolúciós következtetés?

14. Hogyan vezetjük vissza a logikai következmény helyességének vizsgálatát, kielégíthetőség vizsgálatra?

15. Logikailag ekvivalensek-e a következő formula párok?

a) az $\alpha \rightarrow \beta$ és a $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

b) az $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ és a $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$

c) $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$ és $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)$

16. Mit értünk azon, hogy egy α formula független a Σ formula halmaztól?

17. Független-e az α formula az $\{\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta\}$ formula halmaztól?

18. Következik-e

a) $\alpha \models \beta$ helyessége abból, hogy $\alpha \rightarrow \beta$ igaz valamely értékelésre?

b) abból, hogy $\alpha \rightarrow \beta$ azonosan igaz, $\alpha \models \beta$ helyessége?

19. Milyen állításlogikai fogalom felel meg a halmazalgebra fogalomnak?

20. Fordítsa le a halmazok nyelvére:

a) $A \rightarrow B$

b) $A \models B$

5 Relációk (igazsághalmazok), függvények, struktúrák

5.1 Relációkról, függvényekről - általában

A matematikában az "igazság értékek" ("igaz", illetve "hamis") egyik hangsúlyos megjelenése a reláció fogalomnál történik. Nagyon gyakori reláció fajta a kétváltozós, azaz bináris reláció. A bináris relációk elméletének léteznek algebrai, logikai és halmaz vonatkozásai. A "reláció algebraik" fontos algebrai struktúrák, de ezekkel itt nem foglalkozunk részletesen (lásd %). A relációk elmélete logikai szempontból már az elsőrendű logikához kapcsolódik, a relációk pedig az elsőrendű logika *építőkövei*. Elsőrendű logikával a következő fejezetben foglalkozunk. Jelen pontban a reláció fogalom halmaz vonatkozásait vázoljuk.

Bináris relációk. A bináris relációk "lényegében" olyan "igazság függvények" amelyek rendezett párokhoz, közvetve, az "igaz" vagy a "hamis" értékeket rendelik. Például a N természetes számokon értelmezett $<$ reláció bármely $\langle m, n \rangle$ természetes szám párhoz, közvetve, vagy az igaz, vagy a hamis értéket rendeli attól függően, hogy teljesül-e az $m < n$, vagy nem. Vagy, a $\mathcal{P}(N)$ -n értelmezett $\subset$ tartalmazás reláció, közvetve, az $\langle A, B \rangle$ párokhoz rendel igaz, vagy hamis értékeket attól függően, hogy $A \subset B$ teljesül-e, vagy sem, ahol $A \subset N$ és $B \subset N$.

A bináris relációkat is szeretnénk halmazoknak tekinteni. A megadásuk ezért úgy történik, hogy megadjuk azon rendezett párokat, amelyekre a reláció "igaz". A többi rendezett páron a reláció "hamis".

Definíció Egy az A halmazon értelmezett *bináris* (azaz, *kétváltozós*) P reláción az A elemeiből képezett rendezett párok egy összességét, azaz, az A^2 halmaz egy rögzített részhalmazát értjük. Azt is mondjuk, hogy P egy (bináris) *igazsághalmaz*.

A relációk megadásánál tulajdonképpen az igaz és hamis értékeket kódoljuk az $\in$ illetve $\notin$ fogalmakkal. Ha egy rendezett pár, eleme az igazság halmaznak, akkor a relációt ott igaznak tekintjük, ellenkező esetben pedig hamisnak tekintjük.

Az "igaz" és "hamis" helyett gyakran használjuk szinoním kifejezéseket is, például, fennáll, nem áll fenn, helyes, nem helyes, teljesül, nem teljesül, stb. Vegyük észre, hogy a bináris reláció értelmezési tartománya (A), definíció szerint, egy halmaz! Ha kivételt teszünk ez alól, és például megengedjük, hogy A osztály legyen, akkor *általánosított relációról* beszélünk és ezt külön említjük.

PÉLDÁK

1. Tekintsük a $<$ relációt a valós számok $\mathcal{R}$ "struktúráján". Ennek megadása a

$$\{\langle a, b \rangle : a \text{ kisebb } b\text{-nál, } a \in R, b \in R\}.$$

halmaz. Jelölhetjük például $<^{\mathcal{R}}$ -el, hangsúlyozva azt, hogy a reláció R -en értelmezett. Tehát $<^{\mathcal{R}} \subset R \times R$. Például a $2 < 3$ igazságát az kódolja, hogy $\langle 2, 3 \rangle \in <^{\mathcal{R}}$, vagy $3 < 2$ hamisságát az kódolja, hogy $\langle 3, 2 \rangle \notin <^{\mathcal{R}}$. Ráhelyezhetünk egy relációt egy koordináta rendszerre is, pl. az (x, y) eseténa $<^{\mathcal{R}}$ -nek megfelel a síknak, az $x = y$ egyenes feletti része.

2. Tekintsük a $\subset$ relációt az $A = \mathcal{P}(N)$ halmazon, azaz a természetes számok részhalmazainak összességén. Ekkor

$$\subset^A = \{\langle U, V \rangle : U \text{ részhalmaza } V\text{-nek, } U \subset N, V \subset N\}.$$

Például az, hogy a páros számok P halmaza nem része a hárommal osztható számok H halmazának, ez azt jelenti, hogy $\langle Pa, Ha \rangle \notin \subset^A$.

További példák bináris relációkra:

- A természetes számok halmazán értelmezett mod k *kongruencia reláció* (rögzített k osztóra nézve azonos a maradék),
- egy adott "fában" értelmezett *származék* reláció,
- a tér egyenesein értelmezett *párhuzamosság reláció*, stb.

Hangsúlyozzuk, hogy a relációk megadása nem koordináta függő, de belehelyezhetjük egy koordináta rendszerbe.

Például a fenti 1. példára gondolva és az (x, y, z) koordináta térre, a $<$ relációt elhelyezhetjük az (x, y) vagy az (x, z) , vagy a (z, y) térbe, stb.

A *jelölésekről*. Bináris relációknál három féle jelölést szoktunk alkalmazni: a *prefix*, az *infix* és a *posztfix* jelöléseket. A prefix jelölésnél a reláció jelét az argumentumok elé írjuk, pl < 23 , infix jelölés esetén az argumentumok közé írjuk, pl. $2 < 3$, a postfix jelölésnél pedig az argumentumok után írjuk, pl $23 <$. Ezekre a jelölés módokra még visszatérünk a % fejezetben. A jelöléseket illetően még a szokásos infix jelölésen belül is gyakori a pongyolaság. Törekedjünk legalább arra, hogy a kontextusból egyértelmű legyen a jelölés.

Egyváltozós függvények. Ahogyan az A -n értelmezett relációk A^2 -nek P részhalmazai, az A -n értelmezett függvények az előbbiektől a "grafikonok", azaz A^2 olyan P részhalmazai, ahol minden $a \in A$ -hoz egy és csak egy $b \in A$ tartozik, amelyre az $\langle a, b \rangle$ rendezett pár eleme P -nek.

Definíció Egyváltozós *függvény* az A halmazon, egy olyan speciális P bináris reláció A -n, hogy minden $a \in A$ esetén egy és csak egy $b \in A$ elem létezik,

amelyre $\langle a, b \rangle \in P$. Az ilyen tulajdonságú relációkat grafikonoknak nevezzük, azt mondjuk, hogy a függvény grafikonja.

A függvények értelmezési tartományáról (A) is feltételezzük, hogy *halmaz*, a kivételeket majd külön említjük.

PÉLDA

Legyen A a $[-1, 1]$ zárt valós intervallum és $P = \{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\}$, tehát az egységkör vonal. P nem grafikon (tehát nem tartozik hozzá függvény), mivel egy-egy x értékhez a relációnak két eleme is tartozhat.

Függvények jelölése esetén is használhatjuk a prefix, infix, posztfix jelölés módokat. Így például az infix $x + y$, vagy $x \cdot y$ jelölések helyett használhatjuk a prefix $+xy$, $\cdot xy$ jelöléseket is.

Az A halmaz a függvény értelmezési tartománya, az $\{f(a) : a \in A\}$ halmaz pedig a függvény értékkészlete. Akkor mondjuk, hogy egy f függvény *injektív* (vagy, egyrétű), ha minden $a \neq b$ esetén $fa \neq fb$. Egy A -ból B -be képező függvény *szürjektív*, ha B minden eleme fellép képként. Egy A -ból B -be képező függvény *bijektív*, ha injektív és szürjektív, azaz ha kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít A és B között.

n változós relációk ($n \geq 1$). Egyváltozós relációkkal már találkoztunk a % pontban. Három változós reláció például R^3 -nak a következő részhalmaza $\{\langle a, b, c \rangle : a < b \text{ és } a < c\}$. Vagy, egy rögzített gráfon értelmezett azon reláció, hogy három csúcshoz van-e olyan kör, amelyen rajta fekszenek, stb.

Az n változós reláció definíciója hasonló a bináris relációhoz:

Definíció. Egy az A halmazon értelmezett n ($n \geq 1$) változós P reláción az A^n halmaz egy rögzített részhalmazát értjük, azaz A -ból vett rendezett n -sek egy halmazát.

Az n ($n \geq 1$) változós függvények definíciója is hasonló az egyváltozós függvényekéhez.

Definíció n változós *függvény* ($n \geq 1$) az A halmazon, egy olyan speciális $n + 1$ változós P reláció A -n, hogy minden $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in A^n$ esetén egy és csak egy $a_{n+1} \in A$ elem létezik, amelyre $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle \in P$. A szóbanforgó tulajdonságú P relációt grafikonnak nevezzük és azt mondjuk, hogy a függvény *grafikonja*.

Megjegyezzük, hogy az n változós relációnak létezik olyan általánosítása, amely egy $A_1 A_2 x \dots A_n$ halmaz részhalmazának tekinthető, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n$

tetszőleges, rögzített halmazok. Hasonlóan, n változós függvények is lehetnek értelmezettek valamely $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ halmazon és képezhetnek valamely A_{n+1} halmazba. Ezeket az általánosításokat most nem részletezzük.

A matematikából tehát, a függvény fogalma kiküszöbölhető lenne, lehetne csupán relációkról beszélni. Bár léteznek a matematikának területei, ahol ez történik (például a modellelmélet), de általában egyszerre használunk relációkat és függvényeket.

Ez azonban általában nem természetes, jelentősége inkább elvi.

Ezután a bináris relációk két fontos típusát ismertetjük.

5.2 Ekvivalencia reláció

Definíció Egy A -n értelmezett P bináris reláció

reflexív $\Leftrightarrow$ ha minden $a \in A$ -ra $\langle a, a \rangle \in P$

irreflexív $\Leftrightarrow$ ha minden $a \in A$ -ra $\langle a, a \rangle \notin P$

szimmetrikus $\Leftrightarrow$ valahányszor $\langle a, b \rangle \in P$ ($a, b \in A$), akkor $\langle b, a \rangle \in P$

aszimmetrikus $\Leftrightarrow$ valahányszor $\langle a, b \rangle \in P$ és $a \neq b$ ($a, b \in A$), akkor $\langle b, a \rangle \notin P$

transzitiv $\Leftrightarrow$ valahányszor $\langle a, b \rangle \in P$ és $\langle b, c \rangle \in P$ ($a, b, c \in A$), akkor $\langle a, c \rangle \in P$.

Megjegyzés: Vigyázzunk, a fenti elnevezések kissé megtévesztőek. A legtöbb reláció se nem reflexív, se nem irreflexív. Hasonlóan, számos reláció se nem szimmetrikus és nem is aszimmetrikus. Másképpen:

Ha egy reláció nem reflexív, abból nem következik, hogy irreflexív és ha egy reláció nem szimmetrikus, abból nem következik az, hogy aszimmetrikus.

PÉLDÁK

1. Tekintsük az egész számokon a következő P relációt: Pmn fennáll, ha $n \cdot xm$ pozitív, ahol n és m tetszőleges egész számok.

Ez a reláció nem reflexív (mert n vagy m lehet nulla is) és nem is irreflexív.

2. Legyen P a 3×3 -as valós mátrixok összességén egy olyan reláció, hogy rögzített C mátrix mellett, PAB akkor áll fenn (ahol A és B 3×3 -as mátrixok), ha $A \cdot B = C$, ahol C rögzített és minden eleme egyes. Általában ez a reláció sem nem szimmetrikus, nem is aszimmetrikus.

Definíció. Az A halmazon értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat ekvivalencia relációknak nevezzük.

Ha A nem halmaz, hanem osztály, akkor a rajta értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt *általánosított ekvivalencia relációnak* nevezzük.

PÉLDÁK ekvivalencia relációkra:

1. A természetes számokon értelmezett $\equiv \text{mod } k$ kongruencia reláció (ahol k rögzített természetes szám), azaz $n \equiv m \text{mod } k$, ha n és m k -ra nézve azonos maradékot ad.
2. A valós számokon értelmezett azon reláció, amely akkor áll fenn, ha a két valós szám távolsága (különbsége) racionális szám.
3. A tér egyenesein értelmezett párhuzamosság reláció.

Definíció. Az A halmaz részhalmazainak egy $\{A_i\}_{i \in I}$ rendszere A -nak egy *partíciója* (felosztása), ha $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ és $A_i \cap A_j = \emptyset$ ha $i \neq j$.

Tétel Az A -n értelmezett ekvivalencia relációk és A lehetséges partíciói között kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat.

Biz.: Tegyük fel először, hogy $\sim$ egy ekvivalencia reláció az A halmazon. Minden $a \in A$ -hoz tekintsük a következő $B_a = \{b : a \sim b \text{ teljesül}\}$ halmazt. Azt állítjuk, hogy ha $a \sim c$, akkor $B_a = B_c$, ha pedig $a \not\sim c$, akkor $B_a \cap B_c = \emptyset$. Ha $a \sim c$, akkor $B_a \subseteq B_c$, azaz $\{b : a \sim b \text{ teljesül}\} \subseteq \{b : c \sim b \text{ teljesül}\}$ a $\sim$ tranzitivitása és szimmetriája miatt. Hasonlóan, $B_c \subseteq B_a$ is következik, azaz $B_a = B_c$ valóban. Ha $a \not\sim c$ és $B_a \cap B_c$ nemüres halmaz lenne, azaz létezne valamely $d \in B_a \cap B_c$, akkor szintén a szimmetria és a tranzitivitás miatt ellentmondáshoz jutnánk $a \sim c$ -vel. A reflexivitás miatt a B_a halmazok valóban lefedik A -t, továbbá, a fenti tulajdonságok miatt, definiálnak egy partíciót.

Fordítva, tegyük fel, hogy adott A -nak egy partíciója. Defináljunk egy $\sim$ bináris relációt A -n a következőképpen:

$a \sim b$ pontosan akkor, ha a és b egyazon osztályban vannak.

Nyilvánvaló, hogy a reláció reflexív és szimmetrikus. Ha pedig nem lenne tranzitív, akkor a partíció tagjainak diszjunktságával jutnánk ellentmondásra. Ezért $\sim$ valóban egy ekvivalencia reláció.

q.e.d.

Az ekvivalencia relációk egyik fontos alkalmazása, hogy segítségével új fogalmakat vezethetünk be úgy, mint az adott ekvivalencia reláció által definiált partíció tagjait

PÉLDÁK

1. Tekintsük a természetes számok N halmazán $a \equiv \text{mod } 3$ kongruencia relációt. Ez az ekvivalencia reláció egy három elemű partíciót létesít N -n. Ezen partíció tagjait tekintjük a *mod 3 maradék osztályoknak*. Tehát az ekvivalencia reláció segítségével új fogalmat vezettünk be.

2. Tekintsük a tér egyeneseinek halmazát. Két egyenes akkor legyen relációban, ha párhuzamosak. Ez az ekvivalencia reláció partíciót definiál a térbeli egyenesek halmazán. Ezen partíciót tagjait tekintjük a térben *irányoknak*.

3. Tekintsük a véges halmazok összességét. Belátható, hogy ez nem halmaz, hanem osztály. Két halmazt akkor tekintünk ekvivalensnek, ha közöttük kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, tehát ekvivalencia reláció jellegű, így partíciót definiál a véges halmazok osztályán. Ezen partíció tagjait tekinthetjük az úgynevezett "*véges számosságoknak*" (véges elemszámoknak).

Most osztályokra alkalmaztuk az előzőleg halmazokra alkalmazott gondolatmenetet. Egy osztályokra értelmezett, "általánosított ekvivalencia relációt" alkalmaztunk. Belátható, hogy, bizonyos értelemben, ez az eljárás is jogos, ezt itt nem bizonyítjuk.

Megjegyezzük, hogy végtelen halmazok "számossága" majd hasonlóan lesz bevezethető.

5.3 Rendezési reláció

5.3.1 Lineáris rendezések

Definíció Egy A -n értelmezett P bináris reláció

trichotóm (vagy lineáris) $\Leftrightarrow$ minden $a, b \in A$ -ra, vagy, $\langle a, b \rangle \in P$ vagy, $\langle b, a \rangle \in P$ vagy, $a = b$.

Definíció Az A halmazon értelmezett irreflexív és tranzitív relációkat *rendezési* relációknak nevezzük. Ha egy rendezés trichotóm, akkor *lineáris* (vagy *teljes*) *rendezésnek* nevezzük. A nem feltétlenül lineáris rendezést *részben rendezésnek* is hívjuk.

PÉLDÁK

1. Lineáris rendezés a természetes számokon értelmezett szokásos $<$ reláció, jelölése: ω (az $<$ helyett). A lineáris rendezés általános fogalma tekinthető ezen rendezés absztrakciójának.

A következő ismert számstruktúrák rendezései lineáris rendezések (a vesszők után jelöléseik)

az első n természetes szám rendezése, $\underline{n}$
 negatív egészek rendezése, ω^*
 egész számok rendezése, β
 racionális számok rendezése, η
 valós számok rendezése, λ

2. Legyen H tetszőleges halmaz. Ekkor a $\subsetneq$ szigorú tartalmazás egy *részben rendezés* a $\mathcal{P}(H)$ hatvány halmazon.

3. A rendezett valós számpárokon a következő P reláció lineáris rendezés :
 $\langle x, y \rangle P \langle u, v \rangle$ fennáll,
 ha $x < u$ (y és v -től függetlenül), vagy,
 ha $x = u$, akkor $y < v$ esetén
 (ahol $<$ a valós számok szokásos rendezését jelöli).

4. A szokásos $\leq$ reláció nem rendezés a természetes számokon, mert nem irreflexív.

Léteznek a lineáris rendezéseknek még további nevezetes tulajdonságai. Egy lineáris rendezés végpont nélküli, ha nincs sem legnagyobb, sem legkisebb elem. Ilyenek például a sűrű, vagy diszkrét tulajdonság. Egy lineáris rendezés *sűrű*, ha bármely két elem között található egy harmadik. Ilyen rendezés például a racionális, vagy a valós számok rendezése. Bizonyos értelemben ellentétpontjai a sűrű rendezéseknek a diszkrét rendezések:

Egy végpont nélküli lineáris rendezés *diszkrét*, ha bármely elemnek van "rákövetkezője" és "megelőzője". Például a "van rákövetkezője" itt azt jelenti, hogy van egy olyan nála nagyobb elem, hogy közte és az eredeti elem között már nincs elem. Ilyen végpont nélküli, diszkrét rendezés az egész számok rendezése.

Fontos fogalom a matematikában a jólrendezés fogalma:

Definíció. Egy lineárisan rendezett H halmaz *jólrendezett*, ha H bármely nem-üres részhalmazának van legkisebb eleme.

Alappélda jólrendezett halmazra a természetes számok halmaza. De. például a racionális számok, vagy a negatív egész számok rendezése nem jólrendezés.

Definíció Két rendezés $\langle A, < \rangle$ és $\langle B, < \rangle$ izomorf, ha létezik A és B között olyan f kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely megőrzi a $<$ relációt, azaz, ha $a_1 < a_2$, $(a_1, a_2 \in A)$ akkor $f(a_1) < f(a_2)$.

Két rendezés izomorfája azt jelenti, hogy a két rendezés lényegében "azonosítható". Következésképpen, a $<$ relációval kifejezhető bármely tulajdonságuk megegyezik. Ezért azt, hogy két rendezés *nem izomorf*, azt gyakorlatilag úgy bizonyítjuk, hogy keresünk ilyen őket megkülönböztető "tulajdonságot". Viszont azt, hogy két rendezés izomorf, a definíció alapján szoktuk bizonyítani.

FELADATOK.

1. Izomorfak-e a természetes számok és a páros számok rendezése?

M: Igen, mert az $f(k) = 2k$ bijekció megőrzi a rendezést.

2. Izomorfak-e a természetes számok és a racionális számok rendezése?

M: Nem. Ugyan létezik bijekció a természetes számok és a racionális számok között, de a racionális számok rendezése sűrű, míg a természetes számok rendezése nem..

3. Izomorf-e a pozitív és a negatív egész számok rendezése?

M:

Nem lehetnek izomorfak, hiszen az elsőben létezik legkisebb elem, míg a másodikban nem.

5.3.2 Részben rendezések

Definíció. Egy P reláció *antiszimmetrikus* A -n, ha Pab és Pba együttes fennállásából $a = b$ következik, minden $a, b \in A$ -ra.

Találkozunk a rendezési relációnak olyan definíciójával is, hogy a rendezés a természetes számokon értelmezett $\leq$ -nek legyen az általánosítása.

Definíció. $\leq$ -rendezés. Ha a rendezés definíciójánál az irreflexivitás helyett a reflexivitást követeljük meg és tranzitivitáson kívül az antiszimmetriát, akkor $\leq$ -rendezésről beszélünk. Tehát egy P bináris reláció $\leq$ -rendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. $\leq$ -rendezés esetén is beszélhetünk lineáris (azaz, komplett) rendezésről.

Ha rendezésről beszélünk, akkor amennyiben ez a rendezés $\leq$ -rendezés, akkor ezt külön említjük.

Definíció Egy $\leq$ -rendezés részben rendezés, ha nem lineáris (nem trichotóm).

A $\leq$ -rendezés fogalmát általában részben rendezéseknél használják.

Definíció. Egy $\leq$ -rendezett H halmaz nem-üres A részhalmazának a $b \in H$ elem felső korlátja, ha minden $a \in A$ -ra $a \leq b$. b az A -nak legnagyobb eleme (maximális eleme), ha felső korlát és $b \in A$. b az A halmaz legkisebb felső korlátja (supremuma), ha b felső korlát, valamint a felső korlátok közül a legkisebb. Jelölése: $\bigwedge A$, illetve $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ esetén $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$. Az alsó korlát, minimum, legnagyobb alsó korlát (infimum) fogalmak definíciója és jelölése ($\bigvee A$) hasonló.

Definíció Ha egy $\leq$ -rendezési reláció olyan, hogy bármely két x és y elemnek van $x \wedge y$ legkisebb felső és $x \vee y$ legnagyobb alsó korlátja, akkor a $\leq$ -rendezést hálónak nevezzük. Disztributív a háló, ha $\wedge$ disztributív az $\vee$ -ra nézve és fordítva. Egy háló komplementumos, ha van a hálóban legnagyobb elem, jelölje $1'$ és van legkisebb elem, jelölje $0'$, továbbá bármely x elemre van olyan x^* elem, hogy $x \vee x^* = 1$ és $x \wedge x^* = 0$.

PÉLDÁK disztributív komplementumos hálókra

1. Bármely halmazalgebra tagjai, ahol a legkisebb felső korlát és a legnagyobb alsó korlát műveletek rendre az $\cup$ unió és a $\cap$ metszet, a komplementum pedig az egységre vonatkoztatott halmaz komplementere.

2. Rögzítsünk egy K négyzetmentes természetes számot (négyzetmentes egy szám, ha nincs négyzetszám osztója). Legyen a háló alaphalmaza a K osztóiból álló H halmaz. Ha $a, b \in H$, akkor $a \vee b$ legyen a és b legkisebb közös többszöröse, $a \wedge b$ legyen a és b legnagyobb közös osztója, a^* legyen a $\frac{K}{a}$ szám, $1'$ legyen K és $0'$ legyen 1. Igazolható, hogy így disztributív, komplementumos hálót kaptunk.

FELADATOK

Vizsgálja a következő relációkat a reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás, linearitás szempontjaiból

1. Legyen P a valós számokon értelmezett reláció, amelyre Pst igaz $\Leftrightarrow s \cdot t$ racionális szám

M: nem reflexív és nem irreflexív, szimmetrikus, nem tranzitív (pl. $s = \sqrt{e}$, $t = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $u = \sqrt{e}$), nem lineáris

2. Legyen P a térvektorok halmazán értelmezve, amelyre Pab igaz $\Leftrightarrow a \cdot x$ $b = 0$

M: nem reflexív, nem irreflexív, nem szimmetrikus, tranzitív, nem lineáris.

5.3.3 Műveletek rendezésekkel

Rendezések összeadásával és szorzásával új rendezéseket tudunk konstruálni.

Definíció. Lineáris rendezések (rendezett halmazok) összege, szorzata.

Tegyük fel, hogy $\langle A, < \rangle$ és $\langle B, < \rangle$ lineáris rendezések.

(i) Tegyük fel, hogy $A \cap B = \emptyset$. A rendezések $\langle A \cup B, <' \rangle$ összegén értjük azt a rendezést, amely A -n és B -n megegyezik a kiinduló rendezésekkel, továbbá $a <' b$ ha $a \in A$ és $b \in B$. Ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor A és B -t diszjunktá tesszük (azaz, tekintünk nekik kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető halmazokat, amelyek már diszjunktak) és így alkalmazzuk az előző definíciót. Az így kapott rendezés izomorfától eltekintve egyértelmű.

(ii) A rendezések $\langle A \times B, <' \rangle$ szorzatán értjük azt a rendezést, amelyre

$\langle a, b \rangle <' \langle c, d \rangle$, ha $a < c$ (függetlenül b és c -től) és

$\langle a, b \rangle <' \langle a, d \rangle$, ha $b < d$.

(lexikografikus rendezés).

Rendezések szorzatának szemléltetése. A rendezést $A \times B$ -n tekintjük, vagy úgy is elképzelhetjük, hogy a B rendezést "megsokszorozzuk" úgy, hogy indexezzük A elemeivel és a megsokszorozott példányokat A rendezése szerint tekintjük. Másképpen: B példányait "beszúrjuk" A elemei helyébe A rendezésénél.

Rendezések összegének szemléltetése. A rendezett A és B példányait egymás után fűzzük.- és az eredményt egyetlen sorozatnak tekintjük.

FELADATOK:

1. Tekintsük a valós számok szokásos λ rendezését.

$$\lambda + \lambda = ?$$

M: Először a valós számok R halmazát “diszjunktá tesszük” önmagától például úgy, hogy tekintjük egy R' másolatát (indexezett példányát). Így az összeg alaphalmaza $R \cup R'$ lesz. Az összeg rendezésben R és R' saját rendezése változatlan és R minden eleme kisebb R' bármely eleménél.

2. $\lambda \cdot \lambda = ?$

lásd a fenti 2. ??? példát.

3. Izomorfak-e a következő rendezések?

a) β és $\beta + \beta$?

b) $\lambda \cdot \omega$ és $\omega \cdot \lambda$

c) $\omega + \omega^*$ és $\omega + \omega$

M: a) nem, hiszen β diszkrét rendezés, míg $\beta + \beta$ nem.

b) Nem, $\lambda \cdot \omega$ diszkrét rendezés, míg $\omega \cdot \lambda$ nem.

c) Nem, $\omega + \omega^*$ -nak van legnagyobb eleme, míg $\omega + \omega$ -nak nincs.

4. Sűrű, vagy diszkrét rendezések-e $\beta \cdot \eta$ illetve $\eta \cdot \beta$?

M: $\beta \cdot \eta$ sűrű rendezés, $\eta \cdot \beta$ pedig diszkrét.

5. Mutassa meg, hogy $\beta + \beta = \beta \cdot 2$! Igaz-e, hogy $\beta \cdot 2 = 2 \cdot \beta$?

M: Könnyű látni, hogy $\beta + \beta$ és $\beta \cdot 2$ izomorfak. $2 \cdot \beta$ -ban viszont van két elem, melyek között végtelen sok elem fordul elő.

5.3.4 Rendtípusok, rendszámok

Könnyen látható, hogy rendezések izomorfája egy általánosított ekvivalencia reláció a rendezések összességén (osztályán).

Definíció Rendtípusokon értjük a rendezések izomorfája, mint általánosított ekvivalencia reláció által az összes rendezések osztályán értelmezett partíció tagjait. Ha $\underline{\alpha}$ és $\underline{\beta}$ rendtípusok, akkor $\underline{\alpha} \leq \underline{\beta}$ fennáll pontosan akkor, ha $\underline{\alpha}$ reprezentánsa beágyazható $\underline{\beta}$ reprezentásába injektív és rendezés tartó leképezéssel.

A rendtípusok fontos szerepet játszanak a halmazelmélet felépítésénél.

Definíció. A jólrendezett halmazok rendtípusait rendszámoknak hívjuk. Egy rendszám nagyobb egy másiknál, ha közöttük, mint rendtípusok között hasonló reláció áll fenn.

Belátható, hogy a rendszámok osztályt alkotnak és maguk is lineárisan rendezettek, sőt jólrendezettek. Rendszámok összeadása, szorzása a rendezések hasonló műveleteinek segítségével definiálhatók, ezt nem részletezzük

Nevezetes rendszámok reprezentánsai például $\underline{n}$ vagy $\underline{\omega}$. A megfelelő rendszámokat, ha nem áll fenn félreértés, egyszerűen n -nel, vagy, ω -val jelöljük.

Definíció Egy α rendszám rákövetkező rendszám, ha létezik olyan β rendszám, hogy $\alpha = \beta + 1$. Ellenkező esetben a rendszámot límesz rendszámnak nevezzük.

Rákövetkező rendszámok a véges rendszámok, límesz rendszám pedig például ω .

A természetes számok fogalmának általánosítása végtelen halmazokra.

A természetes számok fogalmát kétféleképpen általánosíthatjuk végtelen halmazokra. Az egyik általánosítás a rendszámok, a másik a "számosságok", az első a második fogalom finomításának is tekinthető. A számosság fogalommal a % pontban foglalkozunk. A legtöbb vonatkozásban azonban a természetes számok általánosításnak a rendszámokat tekintjük. Például a teljes indukció általánosítható rendszámokra, ez az úgynevezett transzfinit indukció.

PÉLDA

Ha a természetes számokon "túl" kívánunk számlálni rendszámokkal ez így alakul: $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots, \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \dots$ ahol az $+$ rendezések (rendszámok) összeadását jelöli, n jelöli az n természetes számhoz tartozó véges rendszámot, ω pedig a természetes számok halmazához tartozó rendszámot.

A teljes indukció elve is általánosítható rendszámokra, ez az úgynevezett *transzfinit indukció* - ezt itt nem részletezzük.

Tegyük fel, hogy $\Phi(\alpha)$ egy a rendszámokon értelmezett tulajdonság.

Tétel (transzfinit indukció) A következő formula igaz:

$$[\Phi(0) \wedge \forall \alpha (\forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \Phi(\beta)) \rightarrow \Phi(\alpha))] \rightarrow \forall \alpha \Phi(\alpha)$$

Szavakban: Ha a Φ tulajdonság 0-ra igaz, továbbá, minden olyan rendszámra igaz, amelyeknél a nála kisebb összes rendszámokra igaz, akkor Φ valamennyi rendszámra igaz.

Biz.: Indirekt, tegyük fel, hogy Φ hamis valamely α rendszámra, A rendszámok jólrendezettek, így létezik olyan legkisebb γ rendszám, amelyre Φ hamis. Következésképpen Φ minden γ -nál kisebb rendszámra igaz. A feltételből következően, ekkor ez öröklődik a γ rendszámra is, azaz $\Phi(\gamma)$ hamis. Ez ellentmondás.

q.e.d.

5.4 A kiválasztási axióma ekvivalensei

A következő tétel néhány jelen pontban szereplő fogalom között állít kapcsolatot:

Tétel. A következő állítások ekvivalensek:

(i) (jólrendezési tulajdonság) Bármely halmazhoz létezik olyan rendezési reláció, amelyik a halmazt jólrendezi

(ii) (Zorn lemma) Tegyük fel, hogy egy részbenrendezett halmaz olyan, hogy bármely nemüres részhalmazának van felső korlátja. Ekkor a részbenrendezett halmazban létezik maximális elem.

(iii) (kiválasztási axióma) Nemüres halmazok bármely $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazához létezik kiválasztási függvény, azaz egy olyan f függvény, amelynek értelmezési tartománya Γ és $f\gamma \in A_\gamma$ minden $\gamma \in \Gamma$ -ra.

A fenti tulajdonságok arról nevezetesen, hogy nem igazolhatóak a halmazelmélet klasszikus axiómáiból. A matematikában viszont gyakran szükség van rájuk, a (iii) tulajdonságot axiómaként szokták tekinteni. Azonban fel szokták tüntetni, ha egy tétel axiomatikus igazolásához használják a fenti tulajdonságok valamelyikét. Több más ekvivalensét is ismerjük még a fentieknek. A % fejezetben majd még két további, halmazok "számosságával" kapcsolatos ekvivalensét is ismertetjük: a számosság aritmetika alaptételét és számosságok linearitásának tulajdonságát.

FELADATOK:

1. Igazolja, hogy a természetes számok halmaza jólrendezett

2. Szemléltesse a következő rendezéseket:

$$\omega^* + \omega, (1 + \beta) + 1, 1 + (\beta + 1), \beta \cdot \eta, \eta \cdot \beta$$

4. Melyek végpont nélküli diszkrét lineáris rendezések az alábbiak közül?

$$\omega^* + \omega^*, \omega \cdot \omega, \beta \cdot 2, 2 \cdot \beta, \beta + \beta, 1 + \beta, \beta + \omega, \omega + \beta, \beta + \eta, \lambda + \beta$$

5. Melyek végpont nélküli sűrű rendezések az alábbiak közül?

$$\beta \cdot \eta, \eta \cdot \beta, (\eta \cdot \lambda) \cdot \omega$$

6. Izomorfak-e a következő rendezések?

a) $\omega + \omega$ és ω

b) $\eta + \eta$ és η

c) $\lambda + \lambda$ és λ

5.5 Struktúrák

A matematika tárgya tulajdonképpen "struktúrák" vizsgálata. A cél az, hogy megismerjük a struktúrán az igazságokat, "feltérképezzük" a struktúrákat.

Definíció Az

$$\mathcal{A} = \langle A; P_1, P_2, P_3, \dots; f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots \rangle$$

együttes (sorozat) egy (elsőrendű) struktúra, ha A egy rögzített halmaz, a struktúra alaphalmaza, $P_1, P_2, P_3, \dots$ A -n értelmezett relációk egy sorozata, $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots$ pedig A -n értelmezett függvények egy sorozata.

Struktúra tehát egy halmaz és rajta értelmezett bizonyos kitüntetett relációk és függvények összessége.

A relációk és függvények akárhány ($n \geq 0$) változósak lehetnek. A relációk között megengedettek a 0 változós *állítás konstansok*, a függvények között pedig megengedettek a 0 változós függvények, azaz a *konstansok*. A struktúrában szereplő relációkat alkalmanként, "elemi relációknak" is nevezzük. Amennyiben a struktúra nem tartalmaz relációt, akkor *algebrának* is hívjuk, ha pedig nem tartalmaz függvényt, akkor *modellnek* is hívjuk.

A matematikában egy fontos cél a struktúrák leírása, vagy legalább a "struktúrán érvényes igazságok" leírása (lásd a % pontot).

Például a rendezések fontos struktúrák.

PÉLDÁK

1. A természetes számok N halmazának szokásos struktúrája

$$\mathcal{N} = \langle N, <', +', \cdot', S', 0' \rangle$$

ahol S' egy 1 változós reláció, a "rákövetkezés" reláció ($S'n = n + 1$)

2. A valós számok R halmazának szokásos struktúrája

$$\mathcal{R} = \langle R, <', +', \cdot', -', 0', 1' \rangle.$$

3. Az egész számok Z halmazának additív csoportja

$$\mathcal{Z} = \langle Z, +', -', 0' \rangle$$

4. A pozitív racionális számok Q^+ halmazának multiplikatív csoportja

$$\langle Q^+, \cdot', {}^{-1}', 1' \rangle$$

5. Egy rögzített H halmaz hatványhalmazának Boole algebrája

$$\mathcal{H} = \langle \mathcal{P}(H), \cup', \cap', ', H', \emptyset' \rangle$$

6. A természetes számok rendezett struktúrája, illetve a racionális számok rendezett struktúrája:

$$\langle N, <' \rangle \text{ illetve } \langle Q, <' \rangle.$$

7. Egy rögzített gráf

$$\langle G, E' \rangle$$

ahol G jelöli a gráf csúcsaiból álló halmazt, E' pedig egy 2 változós reláció, az "összekötve lenni".

Ahhoz, hogy struktúrákat vizsgáljunk, szükség van bizonyos tulajdonságaik megfogalmazására. Ez - az elsőrendű struktúrák esetén - egy *elsőrendű formális nyelven* történik, a struktúra nyelvén (lásd a következő pontot).

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK:

1. Tekintsük a $\subset$ tartalmazás relációt $\mathcal{P}(\omega)$ -n.
Mi $\{2, 5, 7\} \subset \{3, 5, 9\}$ értéke, igaz, hamis vagy - "nincs értelmezve"?
2. Adjon példát egy háromváltozós relációra!
3. Adjon példát olyan relációra, amelyik nem függvény.
4. Hogyan definiáljuk a maradékosztály fogalmát ekvivalencia reláció segítségével?
5. Lehetséges-e, hogy egy rendezés se nem szimmetrikus, se nem aszimmetrikus?
6. Adjon példát relációra, amely nem reflexív és nem irreflexív.
7. Mi a különbség rendezés és $\leq$ -rendezés között?
8. Adjon meg egy rendezést rendezett párokon.
9. Izomorfak-e a következők:
 ω és $\omega + \omega$
 ω és $\omega \cdot \omega$
10. Teljes rendezés-e egy halmaz hatvány halmazának a természetes rendezése?
11. Adjon példákat rendezésekre, amelyek nem jólrendezések.
12. Adja meg a mod5 maradékosztályoknak egy lehetséges struktúráját
13. Adja meg a valós polinómok additív csoportjának struktúráját!
14. Adja meg a komplex számok szokásos struktúráját.
15. Adjon példát egy H halmazon olyan struktúrára, amelyhez minden egyváltozós reláció H -n hozzátartozik.

6 Elsőrendű logika

6.1 Formális elsőrendű nyelv

A % pontban tárgyaltuk az állítás nyelvet (nulladik nyelvet), mint formális nyelvet. Ennek általánosítása és jelentős finomítása az elsőrendű formális nyelv. Az elsőrendű nyelv az (elsőrendű) struktúrák nyelve, azaz alkalmas arra, hogy segítségével struktúrákról beszéljünk. A formalizálásról a % pont elején elmondottak az elsőrendű formalizálásra is érvényesek. A matematika nagy részében, ezáltal például a természettudományokban is, elsősorban elsőrendű nyelvet használunk. Elmondhatjuk, hogy az elsőrendű nyelv a matematika nyelve, ezért alkalmazása a fizikai valóságban is rendkívül széleskörű. Ismertetjük az elsőrendű formális nyelv fogalmát és az erre épülő igazság fogalmát.

A nyelv abc-je

Az individuum változók sorozata: $y_1, y_2, y_3, \dots$

A reláció jelek sorozata: $R_1^{n_1}, R_2^{n_2}, R_3^{n_3}, \dots$ ahol n_i természetes szám, vagy 0

A függvény jelek (konstansok) sorozata: $g_1^{n_1}, g_2^{n_2}, g_3^{n_3}, \dots$ ahol n_i természetes szám, vagy 0

Az állítás jelek: $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$

Kvantorok: $\exists, \forall$

Bal és jobb zárójelek: $(,)$ és vessző: $,$

A reláció- és függvény jeleknél a felső indexek arra utalnak, hogy hány változós az illető reláció-, vagy függvény jel. Az állítás jeleket (állítás szimbólumokat) 0 változós reláció jeleknek, az individuum konstansokat pedig 0 változós függvény jeleknek tekintjük (például ilyen az e , vagy a π nyelvi jele).

A *termek* (összetett függvény-szerű kifejezések) fogalma

(i) Az individuum változók és az individuum konstansok termék.

(ii) Ha g egy n változós függvény jel és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termék, akkor $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$ termék.

A termék az (i) és a (ii) szabály véges sokszori alkalmazásával nyert jel-sorozatokat.

A *formulák* fogalma:

(i) Ha R n változós reláció jel és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termék, akkor $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ egy formula (atomi formula).

(ii) Ha α és β formulák, akkor $(\alpha \vee \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ és $(\neg \alpha)$ formulák.

(iii) Ha α formula, y individuum változó, akkor $(\exists y \alpha)$ és $(\forall y \alpha)$ formulák.

A formulák az atomi formulákból az (i), (ii) és (iii) szabályok véges sokszori alkalmazásával nyert jelsorozatok.

A (iii) ponban az α formula a kvantorok *hatásköre*. A zárójelek elhagyására ugyanazok a szabályok vonatkoznak, mint az állítás esetben (precedencia szabályok), megjegyezve, hogy az egyváltozós műveletek, így a kvantorok is, mindig erősebben kötnek, mint a két változós műveletek.

Ha egy formulában van olyan individuum változó, amelyik nem esik kvantor hatáskörébe, azaz *szabad változó*, akkor azt mondjuk, hogy a formula *nyílt*.

Például a $\exists x(y < x)$ formula nyílt, amelyben az y lekötetlen, azaz szabad változó. Hasonlóan, például az $x < y$ formula nyílt, mert x és y is lekötetlen.

Ha egy formulában nincs szabad változó, akkor azt mondjuk, hogy a formula *zárt*, másképpen *mondat*. Így a $\exists x\exists y(x < y)$ már egy mondat.

Egy $\exists x\alpha$ alakú formulában x *cserélhető* y -ra, azaz átjelölhető (x minden előfordulásában), ha y nem fordul elő a formulában. Ha x szabadon fordul elő α -ban, x akkor *helyettesíthető* egy y változóval (jelölés: $\alpha(x/y)$) ha ennek eredményeként y egyetlen helyen sem válik kötötté.

Megjegyezzük, hogy a $\forall x(Px \rightarrow \alpha)$ és a $\exists x(Px \wedge \alpha)$ alakú formulákat gyakran rövidítjük rendre így: $\forall x(Px)(\alpha)$ és a $\exists x(Px)(\alpha)$.

Definíció Egy adott $(*)$ % *struktúra nyelvén* értjük azt az elsőrendű nyelvet, amelyben a reláció jelek $R_1, R_2, R_3, \dots$ és függvény jelek $g_1, g_2, g_3, \dots$ sorozata egy-egy értelmű módon megfeleltethető, az argumentum számokat is beleértve, a struktúra relációi- és függvényei konkrét $P_1, P_2, P_3, \dots$, illetve $f_1, f_2, f_3, \dots$ sorozatának. A szóban forgó egy-egy értelmű megfeleltetésről azt mondjuk, hogy a *nyelv reláció- és függvény jeleinek egy interpretációja*.

Fordítva, kiindulva egy adott nyelvből, egy *nyelv típusú struktúra* az a struktúra, amelynek nyelve az adott nyelv az előző értelemben. Ekkor az R reláció szimbólumot, illetve a g függvény szimbólumot az $\mathcal{A}$ struktúrán interpretáló konkrét relációt (igazság halmazt), illetve függvényt, $R^{\mathcal{A}}$ -val illetve $g^{\mathcal{A}}$ -val is szoktuk jelölni.

6.2 Interpretáció, igazságértékelés

Intuitive nyilvánvaló, hogy mikor mondjuk, hogy egy “zárt formula igaz egy struktúrán”. A következőkben azonban ezt pontosan definiáljuk (a definíció kissé technikai jellegű). Egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a struktúra egy modell, azaz nem tartalmaz függvényt (mint azt tudjuk, minden struktúra tekinthető modellnek).

A *reláció, mint igazsághalmaz* fogalmából indulunk ki.

Tegyük fel, hogy az α formulának $y_1, y_2, \dots, y_k$ a szabad változói. Azt definiáljuk, hogy ezen szabad változóknak az $y_1/a_1, y_2/a_2, \dots, y_k/a_k$ helyettesítésére (ahol

$a_1, a_2, \dots, a_k \in A$) mikor igaz az α formula az $\mathcal{A}$ struktúrán. Ha igaz, akkor ezt így jelöljük $\mathcal{A} \models \alpha(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Ha nem csak az $y_1, y_2, \dots, y_k$ individuum változók egy helyettesítését rögzítjük, hanem az individuum változók $y_1, y_2, y_3, \dots$ teljes sorozatát, akkor legyen ez a helyettesítés a $b_1, b_2, b_3, \dots \in A^\omega$ sorozat, röviden σ . α igazságát e σ helyettesítésre nézve $\mathcal{A}$ -n így jelöljük: $\mathcal{A} \models \alpha^\sigma$.

Az igazság definíciója a formula fogalom definíciójának megfelelő rekurzióval történik.

Definíció $\mathcal{A} \models \alpha^\sigma$ (azaz, α igaz $\mathcal{A}$ -n a σ -ra nézve, avagy, $\mathcal{A}$ "kielégíti" α -t a σ individuum változó helyettesítés mellett), ha a következők teljesülnek:

(i) Ha $R(y_1, y_2, \dots, y_k)$ atomi formula, akkor $\mathcal{A} \models R(y_1, y_2, \dots, y_k)$ az $y_1/a_1, y_2/a_2, \dots, y_k/a_k$ helyettesítésre nézve pontosan akkor, ha $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle \in R^A$

ahol R^A az R relációjelnek megfelelő konkrét reláció, azaz, R igazsághalmaza $\mathcal{A}$ -ban.

(ii) Tegyük fel, hogy az α és β formulákról már ismert, hogy igazak-e $\mathcal{A}$ -n az individuum változók valamely rögzített σ helyettesítésére nézve. Ekkor

$\mathcal{A} \models (\alpha \vee \beta)^\sigma$ pontosan akkor, ha $\mathcal{A} \models \alpha^\sigma$ vagy $\mathcal{A} \models \beta^\sigma$

$\mathcal{A} \models (\alpha \wedge \beta)^\sigma$ pontosan akkor, ha $\mathcal{A} \models \alpha^\sigma$ és $\mathcal{A} \models \beta^\sigma$

$\mathcal{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)^\sigma$ pontosan akkor, ha $\mathcal{A} \models \alpha^\sigma$ és $\mathcal{A} \models \beta^\sigma$

$\mathcal{A} \models (\neg \alpha)^\sigma$ pontosan akkor, ha $\mathcal{A} \not\models \alpha^\sigma$

(iii) Tegyük fel, hogy minden $\sigma(y/a)$ -ra ismert, hogy $\alpha^{\sigma(y/a)}$ teljesül-e $\mathcal{A}$ -n, ahol $\sigma(y/a)$ -t úgy kapjuk σ -ból, hogy σ -nak az y -tagját a -val helyettesítjük. Ekkor

$\mathcal{A} \models (\exists y \alpha)^\sigma$ pontosan akkor, ha van olyan $a \in A$, hogy $\mathcal{A} \models \alpha^{\sigma(y/a)}$

$\mathcal{A} \models (\forall y \alpha)^\sigma$ pontosan akkor, ha bármely $a \in A$ -ra $\mathcal{A} \models \alpha^{\sigma(y/a)}$.

Ha α -nak nincs szabad változója, azaz α zárt formula, akkor az $\mathcal{A} \models \alpha^\sigma$ tulajdonság σ -tól független, ezért a jelölést így használhatjuk: $\mathcal{A} \models \alpha$ és azt mondjuk, hogy α igaz $\mathcal{A}$ -n, vagy, $\mathcal{A}$ kielégíti α -t.

A nyelv mondatainak segítségével már meg tudjuk fogalmazni struktúrák bizonyos (elsőrendű) tulajdonságait.

Definíció Egy $\mathcal{A}$ struktúra elméletén értjük a struktúra nyelvének azon zárt formuláit, amelyek igazak $\mathcal{A}$ -n. Jelölése: $Th\mathcal{A}$. Tehát

$$Th\mathcal{A} = \{\alpha : \mathcal{A} \models \alpha, \alpha \text{ mondat}\}$$

A struktúrákkal kapcsolatos egyik fontos cél leírni elméletüket ((például az aritmetika esetén, az elsőrendben megfogalmazható aritmetikai igazságok összességét, a valós számok esetén az elsőrendben megfogalmazható valós számokra vonatkozó igazságok összességét, stb.).

Definíció Egy α elsőrendű formula $[\alpha]$ igazsághalmaza az $\mathcal{A}$ struktúrán az

$$[\alpha] = \{\sigma \in A^\omega : \mathcal{A} \models \alpha^\sigma\}$$

halmaz.

Tehát, ha α egy reláció jel, akkor $[\alpha]$ éppen az α -nak az $\mathcal{A}$ struktúrán megfelelő konkrét reláció. Az igazság halmaz fogalom tehát kiterjesztése az interpretáció fogalomnak, sőt, szokták $[\alpha]$ -t is az α formula interpretációjának nevezni.

Emlékeztetünk a hengerhalmaz, vagy cylinder halmaz fogalmára:

Egy $B \subset A^\omega$ halmaz *i-dik cylinder halmazán* - jelölés: $C_i B$ - értjük a

$$\{\sigma \in A^\omega : \sigma(i/a) \in B \text{ valamely } a \in A\text{-ra}\}$$

halmazt, ahol $\sigma(i/a)$ jelöli azt a sorozatot, amelyet σ -ból nyerünk úgy, hogy az i -dik tagot a -val helyettesítjük.

Véges dimenzióban, például 3 dimenzióban, az a definíció pontosan megfelel az i -dik cylinder halmaz geometriai fogalmának, tehát egy olyan halmaznak, amelyben a pontok i -dik koordinátáját alkalmasan megváltoztatva B -beli pontot kapunk.

A^ω -ban *ij-diagonál síkon* - jelölés: D_{ij} - értjük a

$$\{\sigma : \sigma_i = \sigma_j\}$$

halmazt.

Geometriailag, a diagonál síkok "szögfelező síkok".

Könnyű igazolni igazsághalmazokra a következőket:

$$[\alpha \vee \beta] = [\alpha] \cup [\beta]$$

$$[\alpha \wedge \beta] = [\alpha] \cap [\beta]$$

$$[\neg \alpha] = \overline{[\alpha]}$$

$$[\exists y_i \alpha] = C_i [\alpha] \text{ ahol } C_i \text{ az } i \text{ irányú cylinderhalmaz képzést jelenti } A^\omega\text{-ban}$$

$$[y_i = y_j] = D_{ij} \text{ ahol } D_{ij} \text{ jelöli az } (i, j) \text{ diagonál síkot } A^\omega\text{-ban.}$$

(5)

Vegyük észre, hogy

Kiindulva a reláció jelek interpretációiból (igazság halmazaiából), a fenti 5 tulajdonságok alkalmasak arra, hogy velük definiáljuk a formulák igazságát

Az 5 összefüggések közvetlen következménye a következő:

Tétel A nyelv formuláinak igazsághalmazai zártak az unió, metszet, komplementer képzésre, a tetszőleges cylinderhalmaz képzésekre, továbbá az egység A^ω és a D_{ij} diagonál síkok is igazsághalmazok.

Definíció A^ω -nak a tételbeli tulajdonságú részhalmaz rendszereit *cilindrikus halmazalgebráknak* nevezzük.

A cilindrikus halmazalgebrák nyilván a (Boole) halmazalgebrák általánosításai.

6.3 Kitekintés a másodrendű logikára

Az elsőrendű logikának jóval kedvezőbbek a tulajdonságai, mint az úgynevezett magasabb rendű logikáknak (lásd %), igyekeztünk ezért a matematikát az elsőrendű logika nyelvével leírni. Azonban ahhoz, hogy megértsük az elsőrendű nyelv fogalmát és kifejező erejét, érdemes megismernünk a magasabbrendű logikák fogalmát is. A matematikai gyakorlatban, jellemzően legfeljebb másodrendű állítások fordulnak elő és ezek sem nagy számban. Ezek szerepe azonban hangsúlyos.

Először vázoljuk a másodrendű nyelv fogalmát. A másodrendű nyelv bővítése az elsőrendűnek. Másodrendű nyelvben már megengedettek *reláció- és függvény változók* is (az eddigi reláció és függvény konstansok mellett) és az ezekre vonatkozó kvantorok.

Formálisan, az elsőrendű nyelv kiegészül (másodrendű) *reláció változók* illetve *függvény változók*

$U_1^{n_1}, U_2^{n_2}, U_3^{n_3}, \dots$ illetve

$V_1^{n_1}, V_2^{n_2}, V_3^{n_3}, \dots$ sorozataival, ahol n_i természetes szám, vagy 0.

A formula definíciójában, pedig mindenütt, ahol eddig reláció, vagy függvény konstans fordult elő, szerepelhet reláció, vagy függvény változó is. Továbbá, a kvantorok vonatkozhatnak reláció, vagy függvény változóra is.

A másodrendű formulákban tehát együtt fordulnak elő individuum változók, reláció- és függvény változók, illetve individuum konstansok, reláció- és függvény konstansok. Röviden azt mondhatjuk, hogy másodrendű logikában relációkat és függvényeket is tudunk kvantálni.

Harmadrendű nyelveknél a nyelv "harmadrendű" reláció- és függvény változókkal bővül, stb.

A másodrendű formulák értelmezésével, igazság értékelésének értelmezésével fejezzük be ezt a pontot.

Az elsőrendű logikában a változók, azaz az *individuum változók* a struktúra alaphalmazán, A -n futnak és ennek megfelelően az adott változóra vonatkozó (elsőrendű) kvantorok is az alaphalmazon futnak.

Mivel az n változós relációk A^n -nek részhalmazai, az $U^{(n)}$ reláció változók, definíció szerint, A^n részhalmazain futnak, azaz, $\mathcal{P}(A^n)$ -n. Ennek megfelelően, az $U^{(n)}$ -re vonatkozó *másodrendű kvantorok* is A^n részhalmazain futnak. Ha, speciálisan egy 1 argumentumú $U^{(1)}$ reláció változóról van szó, akkor a rá vonatkozó kvantorok $\mathcal{P}(A)$ -n futnak. Függvény változókra hasonló igaz.

Az igazság értékelés fenti definíciójában, értelemszerűen, hasonlóan ahhoz, ahogyan individuum változókat, az alaphalmaz elemeivel értékelünk, reláció-, vagy függvény változókat, konkrét, A -n értelmezett relációval, vagy függvénnyel értékelünk

Harmadrendű, n argumentumú reláció változók $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A^n))$ -n futnak, stb.

6.4 Formalizálás elsőrendű logikában, nevezetes axióma rendszerek

Először nevezetes struktúrák nyelveit ismertetjük és ezeken nevezetes axióma rendszereket fogalmazunk meg.

1. A természetes számok szokásos struktúrájának nyelve:
 - < kétváltozós reláció jel (felvesszük a segítségével és az = segítségével definiált $\leq$ kétváltozós reláció jelet is)
 - $+$, $\cdot$, S egyváltozós függvény jelek és 0 konstansjel.

A természetes számokra vonatkozó *Peano axiómák* a következő formulák univerzális kvantáltjai:

- (i) $Sx \neq x$
- (ii) $Sx = Sy \rightarrow x = y$
- (iii) $x + 0 = x$
- (iv) $x + Sy = S(x + y)$
- (v) $x \cdot 0 = 0$
- (vi) $x \cdot Sy = x \cdot y + x$
- (vii) $x \leq 0 \rightarrow x = 0$
- (viii) $x \leq Sy \rightarrow x \leq y \vee x = Sy$
- (ix) $x \leq y \vee y \leq x$

A teljes indukció másodrendű formulája:

- (x) $\forall P(P(0) \rightarrow [\forall x(P(x) \rightarrow P(x+1)) \rightarrow \forall xP(x)])$, ahol P 1 argumentumú reláció változó.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi interpretációjánál P az N természetes számok részhalmazain fut, azaz $\mathcal{P}(N)$ -n, míg x N -n.

2. A valós számok szokásos struktúrájának nyelve:
 $+$ kétváltozós műveleti jelek, $-$ egyváltozós műveleti jel (additív inverz),
 $0, 1$ konstansjelek
 $<$ kétváltozós reláció jel.
A valós számok szokásos axiómái a következők univerzális lezártjai:
 $x + y = y + x$
 $x \cdot y = y \cdot x$
 $x + (y + z) = (x + y) + z$ *or*
 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
 $x + 0 = x$
 $x \cdot 1 = x$
 $x + (-x) = 0$
 $(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$
 $0 \neq 1$
 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
rendezés
 $x < y \rightarrow x + z < y + z$
 $x < y \wedge z > 0 \rightarrow x \cdot z < y \cdot z$

valamint a sup tulajdonság, azaz a következő másodrendű formula:
 $\forall A(\exists u F u \rightarrow \exists z(Fz \wedge \forall x(Fx \rightarrow z \leq x)))$ ahol
 Fx legyen a $\forall y(Ay \rightarrow y \leq x)$ formula (felső korlát), ahol A 1 argumentumú
reláció változó
(a $\forall A$ kvantor hatáskörében álló formula azt jelenti, hogy a konkrét A -nak
létezik supremuma).

Megjegyzés: A sup tulajdonságot megelőző axiómák az úgynevezett "*rendezett testek*" axiómái. Kielégítik még ezeket például a racionális számok, a komplex számok, vagy a mod p maradékosztályok, ahol p prímszám. A sup tulajdonságot kielégítő testeket, így a valós számok testét is, "teljes" testeknek nevezzük.

3. Az egész számok additív csoportjának nyelve:
 $+$ kétváltozós műveleti jel, $-$ egyváltozós műveleti jel (az inverz), 0 konstansjel.

Az úgynevezett "csoport axiómák" az alábbiak univerzális lezártjai:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x + (y + z) &= (x + y) + z \\ x + (-x) &= 0 \\ x + 0 &= x \end{aligned}$$

4. A pozitív racionális számok multiplikatív csoportja:

$\cdot$ kétváltozós műveleti jel, $^{-1}$ egyváltozós műveleti jel (multiplikatív inverz, azaz reciprok), 1 konstansjel.

5. Az egész számok rendezésének nyelve:
 Rxy kétváltozós műveleti jel.

5. A H egységű Boole halmazalgebra nyelve.

$+$, $\cdot$ kétváltozós műveleti jelek, $-$ egyváltozós műveleti jel (inverz), 1 és 0 konstansjelek

Axiómák: lásd a % helyet

6. Egy rögzített gráf nyelve:
 E kétváltozós reláció jel

A következők, példák természetes nyelvi állítások elsőrendű formalizálására.

Hasonlóan az állítás logikához, azon, hogy egy természetes nyelvi kijelentést modellezünk az elsőrendű logikában, azaz *formalizálunk*, azt értjük, hogy definiálunk a kijelentéshez egy elsőrendű nyelvet (pontosabban reláció és függvény jeleket), e nyelven megadunk a kijelentésnek megfeleltetett formulát, majd megadunk egy struktúrát, ahol a formulát értelmezzük (szándékolt interpretáció). Feladatoknál, segítségként, a nyelv sokszor adott és néha a szándékolt interpretáció megadását elhagyjuk, ha az nyilvánvaló.

PÉLDÁK

Formalizáljuk a következő kijelentéseket:

1. "Nem minden lábra illik ugyanaz a cipő"

M: Legyenek L, C egyváltozós relációk, jelentésük: "láb" és "cipő" tulajdonság.

legyen I kétváltozós reláció, jelentése: "valami illik valamihez".

A formula: $\neg \exists x(Cx \wedge \forall y(Ly \rightarrow Ixy))$

A szándékolt interpretáció a cipők és lábak összességén értelmezett konkrét C' (cipő), L' (láb) relációk és a konkrét I' kétváltozós reláció (illik)

2. "Minden nőhöz találni olyan férfit, akinek tetszik"

M: A nyelv: N, F egyváltozós relációk, jelentésük: "nő" és "férfi" tulajdonság

T kétváltozós reláció, jelentése: "valaki tetszik valakinek"

A formula: $\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Fy \wedge Txy))$ (vagy: $\forall x \exists y(Nx \rightarrow \exists y(Fy \wedge Txy))$)

A szándékolt interpretáció a nők és férfiak összességén értelmezett konkrét N' (nő), F' (férfi) relációk és a konkrét T' kétváltozós reláció (tetszik)

3. "Lehetséges, hogy egy nő tetszik egy férfinak, de a nőnek másik férfi tetszik"

M: A nyelv legyen ugyanaz, mint az előző példánál.

A formula: $\exists x \exists y (Nx \wedge Fy \wedge Txy \wedge \exists z (Fz \wedge Tzx \wedge y \neq z))$

A szándékolt interpretáció ugyanaz, mint az előző példánál.

4. a) a $\sin x$ függvény folytonos 2-ben

b) egyváltozós valós függvények folytonossága 2-ben:

M: a) $\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta (\forall x (|x - 2| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin 2| < \varepsilon)))$

b) másodrendű formulával: $\forall f (Ff \leftrightarrow (\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta (\forall x (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon))))))$

A szándékolt interpretáció a valós számok struktúrája.

Megjegyezzük, hogy a formalizálásnál a kvantorok viselkedésével kapcsolatos legfontosabb két kritikus tulajdonság az, hogy a különböző típusú kvantorok *nem felcserélhetőek*, valamint az, hogy a kvantorokhoz szigorúan hozzátartozik a *hatáskörük*. Az első tulajdonságra példa a fenti 2.: Megcserélve a kvantorok sorrendjét, ezt kapjuk: $\exists y \forall x (Nx \rightarrow (Fy \wedge Txy))$, amelynek jelentése: "Van olyan férfi, aki minden nőnek tetszik", azaz a jelentés megváltozik. Példa a második tulajdonságra: $\forall x (x > 0 \vee \forall x (x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0))$ a valós számokon igaz állítás, míg ha megváltoztatjuk a belső kvantor hatáskörét: $\forall x (x > 0 \vee \forall x (x > 0 \vee x = 0) \vee x < 0)$, a kapott állítás már nem igaz

FELADATOK:

1. Formalizálja a természetes számok nyelvén egy másodrendű formulával azt, hogy a természetes számok halmaza jólrendezett.

M: $\forall P (\exists x Px \rightarrow \exists y (Py \wedge \forall z Pz \rightarrow y \leq z))$

2. Formalizálja a valós számok nyelvén az Archimedesi tulajdonságot (bármely pozitív $x < y$ valós számokhoz van olyan n természetes szám, hogy $y < n \cdot x$)

M: $\forall x \forall y (x > 0 \wedge y > x \rightarrow \exists n (Tn \wedge y < n \cdot x))$, ahol T a természetes számnak lenni reláció

3. Formalizálja az additív csoportok nyelvén a null elem egyértelműségének tulajdonságát.

M: $\exists y (\forall x (x + y = x) \rightarrow 0 = y)$

4. Formalizálja a halmazalgebrák (Boole algebrák) nyelvén azt, hogy egy algebra kételemű

M: $\forall x (x = 0 \vee x = 1)$

5. Formalizálja a gráfok nyelvén a hurokmentesség, valamint irányítatlanság tulajdonságokat.

M: $\forall x \neg Exx$
 $\forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx)$

6. Formalizálja a következőket:

- a) "Van olyan férfi, akinek minden nő tetszik"
- b) "Van olyan férfi, akinek csak egyetlen nő tetszik"

M: a) $\exists x (Fx \wedge \forall y (Ny \rightarrow Txy))$
 b) $\exists x (Fx \wedge \exists y (Ny \wedge \forall z (Nz \wedge Txz \rightarrow y = z)))$

PÉLDÁK

Néhány fontos másodrendű tulajdonság:

A valós számok Cantor tulajdonsága.
 sin korlátossága
 valós függvény korlátossága

6.5 Struktúrák megadásáról

Struktúrák megadásának, azaz alaphalmazai, relációik, függvényeik megadásának fontos eszköze a (halmaz) *konstrukció*. Így szoktuk megadni például a racionális, vagy a valós számok struktúráit (lásd % pont).

Azt gondolhatnánk, hogy struktúrákat egyértelműen definiálni tudjuk *elsőrendű axiómákkal* is. Azonban kiderült, hogy általában ez nem lehetséges, azaz a definiáló axiómákat, nem izomorf struktúrák is kielégítik. Erre vonatkozik például az úgynevezett Löwenheim-Skolem tételkör - amelyet itt most nem részletezünk. Tehát ha például az elsőrendű valós axiómákról beszélünk, ezek még nem definiálják (izomorfától eltekintve) egyértelműen a valós számokat. Ha egyértelműsíteni kívánjuk az axiómákkal definiálandó struktúrát, akkor valamilyen speciális axiómára van szükség, ami például gyakran egy másodrendű axióma. Ez történik például a valós számok, vagy a természetes számok axiomatizálásának esetében. Az axiomatikus megadás esetén azonban igazolni kell, hogy *létezik egyáltalán az axiómákat kielégítő struktúra*.

Érdekesé vált, hogy bizonyos *elsőrendű axiómákat* egyáltalán mely (nem izomorf) struktúrák elégítenek ki. Vagyis a *feladat megfordult, a modern matematikában egy új szemlélet hódított teret*:

Nem struktúrákhoz kerestek axiómákat, hanem axiómákhoz (bizonyos tulajdonságokhoz) kerestek őket kielégítő struktúrákat.

Ide sorolhatók bizonyos absztrakt algebrai vizsgálatok (csoportok, testek, gyűrűk vizsgálata, a lineáris algebra), vagy az analízis absztrakt tereinek vizsgálata (metrikus terek, lineáris terek, euklideszi terek, stb.).

Az is kiderült, hogy

a struktúrákat, általában, még a saját elsőrendű elméletük, ThA sem határozza meg -izomorfia erejéig.

Példa rendezésekkel: Sűrű, végpont nélküli rendezések: racionális és valós számok

Ez vezetett a *nem-standard modell* fogalmához:

Egy $\mathcal{B}$ struktúra, az $\mathcal{A}$ struktúra ThA elméletének *nem-standard modellje*, ha $ThA = ThB$, de ThA nem izomorf B -vel.

Léteznek nevezetes nem-standard modellek, például az aritmetika nem-standard modellje, az úgynevezett "hiper természetes számok" összessége, vagy a valós számok esetén a "hiper valós számok" összessége (lásd a % pontban).

Az is felmerült, hogy *valójában nem is a struktúrák megragadására van szükség, hanem az (elsőrendű) elméletük ThA leírására*. Ezen az úton indult el a modern bizonyításelmélet - ezt a % pontban részletezzük.

Nagyjelentőségű tétele az elsőrendű logikának az úgynevezett kompaktsági tétel:

Tétel (kompaktsági) Elsőrendű mondatok egy Σ halmazának van modellje akkor és csak akkor ha Σ minden véges részének van modellje.

A tétel $\implies$ iránya triviális. A tételre önálló bizonyítás is adható, de a Gödel teljességi tételből bizonyítjuk a % fejezetben.

A tétel az úgynevezett "végesítés" folyamatát illusztrálja a matematikában, *ezér is igen fontos*. Számos alkalmazása létezik.

Láttunk példákat arra, hogy hogyan formalizálhatunk elsőrendű nyelven tulajdonságokat. Most példát mutatunk arra, hogyan igazolható az, hogy egy tulajdonság nem formalizálható elsőrendű nyelven.

PÉLDA

Igazolja a kompaktsági tétel segítségével, hogy a "végesnek lenni" tulajdonság nem elsőrendű tulajdonság, azaz nem formalizálható elsőrendben.

M. Indirekt. Tegyük fel, hogy a β elsőrendű formula jelentése az, hogy egy halmaz véges.

Az, hogy egy halmaz legalább n elemű, így formalizálható:

$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$. Jelölje ezt a formulát α_n . Tekintsük a $\Sigma = \beta \cup \{\alpha_n : n \geq 1\}$ formula halmazt. Minden véges része kielégíthető, mert minden m természetes számra van legalább m elemű véges halmaz. Ezért, a kompaktsági tétel értelmében Σ is kielégíthető. Ez azonban ellentmond β és az α_n -ek definíciójának.

6.6 Logikai következmény fogalom az elsőrendű logikában

Definiáljuk elsőrendű esetben a logikai következmény fogalmát.

Definíció. Tegyük fel, hogy Σ elsőrendű zárt formulák egy halmaza. Akkor mondjuk, hogy az α formula logikai következménye Σ -nak, ha minden olyan struktúrán, ahol Σ valamennyi formulája igaz, az α formula is igaz -vagy, ha egyáltalán nincs Σ -t kielégítő struktúra. Ha, speciálisan $\Sigma = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy α egy azonosan igaz formula.

Jelölés: $\Sigma \models \alpha$, speciálisan $\models \alpha$.

A matematikában Σ szerepét általában egy axióma rendszer tölti be, α -ét pedig általában egy tétel. A $\Sigma \models \alpha$ reláció tehát az elsőrendű esetben is "jelentés független" bizonyos értelemben, teljesülése csak a benne szereplő formulák szerkezetétől függ. *Teljesüléséről beszélni egyetlen struktúrán értelmetlen.*

A következmény helyességének itt is fontos átfogalmazása a következő:

$\Sigma \models \alpha$ teljesül akkor és csak akkor ha a $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ kielégíthetetlen.

A rezolúciós következmény séma az elsőrendű logikában is érvényes (így a modus ponens is).

Definíció. Az α és β elsőrendű formulákról akkor mondjuk, hogy (logikailag) ekvivalensek, ha igazság értékük bármely struktúrán, a bennük szereplő szabad individuum változók bármely helyettesítésére megegyezik.

A fogalom itt is azt jelenti, hogy $\alpha \models \beta$ és $\beta \models \alpha$ egyszerre teljesül.

Hasonlóan az állítás logikához, léteznek *triviálisan ekvivalens formula párok*. Ilyenek például a $\exists x \exists y \alpha$ és a $\exists y \exists x \alpha$, vagy a $\forall x \forall y \alpha$ és a $\forall y \forall x \alpha$ (azonos jellegű kvantorok felcserélhetősége) vagy a $\exists x \alpha$ és $\exists y \alpha(x/y)$, valamint a $\forall x \alpha$ és a $\forall y \alpha(x/y)$ ha α -ban nem fordul elő y (x átjelölése, vagy cseréje). Viszont kevésbé nyilvánvalóak a következő tételben tartalmazott ekvivalenciák:

Tétel A következő formula párok logikailag ekvivalensek:

- (i) $\exists x(\alpha \vee \beta)$ és $\exists x \alpha \vee \exists x \beta$
 $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ és $\forall x \alpha \wedge \forall x \beta$
- (ii) $\neg \forall x \alpha$ és $\exists x \neg \alpha$
 $\neg \exists x \alpha$ és $\forall x \neg \alpha$
- (iii) $\exists x \exists y \alpha = \exists y \exists x \alpha$
 $\forall x \forall y \alpha = \forall y \forall x \alpha$
- (iv) $\exists x \alpha$ és $\forall x \alpha$, ha α -ban nem szerepel x

Biz.: A tétel az igazságértékelés definíciója segítségével igazolható.

Például az (i) első ekvivalenciájának igazolása:

Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges struktúra. $\exists x(\alpha \vee \beta)$ pontosan akkor igaz, ha van olyan $a \in A$, hogy $(\alpha \vee \beta)(x/a)$ igaz. Ez utóbbi akkor teljesül, ha

$$(\alpha)(x/a), \text{ vagy } (\beta)(x/a) \text{ igaz.} \quad (6)$$

$\exists x\alpha \vee \exists x\beta$ akkor igaz, ha $\exists x\alpha$ vagy $\exists x\beta$ igaz. Ez akkor teljesül ha

$$(\alpha)(x/a) \text{ vagy } (\beta)(x/b) \text{ teljesül valamely } a\text{-ra, vagy } b\text{-re.} \quad (7)$$

Ha a (6) teljesül, akkor nyilván a (7) is teljesül és fordítva.

A többi ekvivalencia hasonlóan igazolható.

q.e.d.

Felhívjuk ugyanakkor a figyelmet, hogy általában *nem logikailag ekvivalensek* a következő formula párok:

$$\begin{aligned} \exists x(\alpha \wedge \beta) \text{ és } \exists x\alpha \wedge \exists x\beta \\ \forall x(\alpha \vee \beta) \text{ és } \forall x\alpha \vee \forall x\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x\exists y\alpha \text{ és } \exists y\forall x\alpha \text{ (különböző jellegű kvantorok cseréje)} \\ \exists x(\alpha \rightarrow \beta) \text{ és } \exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta \text{ (}\exists x \text{ kiemelhetősége az implikációból)} \\ \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \text{ és } \forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta \text{ (}\forall x \text{ kiemelhetősége az implikációból)} \\ \alpha \text{ és } \alpha(x/y) \end{aligned}$$

A *függetlenség*, vagy az *ellentmondástalanság* fogalma hasonlóan definiálható, mint állítás logikában, valamint hasonló tételek érvényesek.

Az elsőrendű logikai következmény vizsgálata *jóval problematikusabb* az állítás logikáinál, többek között azért, mivel nem véges jellegű (többek között a kvantorok miatt), jelentősen igényli a végtelen halmazok elméletének használatát. Általában nincs gépies módszer annak eldöntésére, hogy egy-egy állítás, logikai következménye-e (tétele-e) egy axióma rendszernek. Ezért *az elsőrendű logika nem eldönthető*.

Az elsőrendű logika következményei helyességének a vizsgálata főleg bizonyításelméleti eszközökkel történik (lásd %).

A bizonyításelmélet *alapgondolata* az, hogy az axiómákból kiindulva, következtetési szabályok segítségével, csupán véges sok formális manipuláció segítségével nyerjünk tételeket - elkerülve a végtelen halmazok elméletét. Bizonyításelmélettel a % pontban fogunk foglalkozni.

6.7 Az axiomatikus módszerről, a bizonyításelméletéről

A 19. század végén Frege és Hilbert voltak azok, akik új utat választottak a következmény fogalom vizsgálatára, egyúttal forradalmasították a matematikában az axiomatikus módszert és ezzel létrehozták a matematika egy új ágát, a bizonyításelméletet.

Frege az aritmetika-, Hilbert pedig a geometria felépítésére alkalmazta az új módszert. Az axiomatikus módszer forradalmasítása, mint Hilbert féle program vált ismertté. Ehhez először bevezettek egy-egy formális nyelvet. Az alapgondolat az volt, hogy a nyelvben megfogalmazott axiómákból, bizonyos formális szabályok, a következtetési szabályok ismételt, véges sokszori alkalmazásával hozzanak létre tételeket, megkerülve a következmény szemantikai fogalmát és a végtelen halmazok elméletének mélyebb alkalmazását. Az ilyen rendszereket bizonyítási rendszereknek nevezzük. Azóta sok bizonyítási rendszer keletkezett. Az új módszer azt is célozta, hogy ilyen módon állítsák a struktúrák $Th(\mathcal{A})$ elméleteit.

A következőkben röviden vázoljuk a Hilbert által felállított levezetési rendszert.

A nyelv legyen a % pontban vázolt elsőrendű nyelv, azaz a formális nyelv fogalma a bizonyításelméletnek is alapját képezi.

Feltételezünk úgynevezett “szakmai” és úgynevezett “logikai” axiómákat.

A *szakmai axiómák* az illető szakterületre jellemző axiómák, Hilbert vizsgálatain esetén ezek a geometria axiómái. A logikai axiómák pedig tulajdonképpen a logika szakmai axiómái, ezek az axiómák mindig ugyanazok. Megengedett végtelen sok axióma, sőt ez a logikai axiómák esetén szükségszerű. Beszélhetünk axióma sémákról, ahol egyetlen axióma séma mögött végtelen sok axióma áll. Általában megköveteljük, hogy az axiómák legalább véges sok sémában legyenek összefoglalhatók. Csak példaként néhány ilyen axióma séma:

Természetesen mind a szakmai, mind a logikai axiómák választására számos lehetőség van.

A Hilbert rendszerben két úgynevezett *következtetési szabály* van, ezek:

Elképzelhetők lennének természetesen más következtetési szabályok is.

Alapvető fogalma a Hilbert rendszernek, és így a bizonyításelméletnek is a *levezethetőség* (bizonyíthatóság) fogalma:

Definíció α formulák egy Σ halmazából levezethető, azaz $\Sigma \vdash \alpha$, ha van levezetése, azaz formulák egy olyan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sorozata, amelyekre igaz, hogy minden i -re vagy $\alpha_i \in \Sigma$, vagy α_i két, a sorozatban őt megelőző formulából modus ponens-el következik

Egy Σ formula halmazból levezethető tételek összességét $\text{Ded}(\Sigma)$ -val jelöljük.

A levezethetőség ezen fogalma természetesen tükrözi a bizonyíthatóság fogalmát a matematikai gyakorlatban, azonban annak első precíz definíciója a matematika története folyamán.

A bizonyítások véges természetét használja ki a Dedukció tétel szintaktikai változata:

Tétel (szintaktikai dedukció) $\Sigma \vdash \alpha$ akkor és csak akkor, ha Σ -nak valamely véges Σ' részhalmazára $\Sigma' \vdash \alpha$.

Biz.: Az állításnak csak az egyik iránya nem triviális. Tegyük fel, hogy $\Sigma \vdash \alpha$. Gyűjtjük össze Σ -ból azokat a formulákat, amelyek szerepelnek a $\Sigma \vdash \alpha$ levezetésben. A definícióból adódik, hogy csak véges sok ilyen formula létezik, legyen ezek összessége Σ' . Nyilván, következik $\Sigma' \vdash \alpha$.

q.e.d.

Látható, hogy a bizonyíthatóság definíciója nem ad döntési eljárást arra nézve (nem ad “módszert” annak eldöntésére), hogy egy állítás tétele-e egy axióma rendszernek (levezethető-e belőle). Azonban lehetőséget ad egy bizonyítás formális keresésére, vagy egy létező bizonyítás precíz dokumentálására. Az állításlogika esetén, amelyik eldönthető, a bizonyításelméletnek kisebb a jelentősége.

A 20. sz. első évtizedeiben két egészen kiemelkedő bizonyításelméleti eredmény is született, mindkettő Kurt Gödel nevéhez fűződik (a bizonyítások meghaladják e könyv kereteit).

Az egyik, az elsőrendű logika úgynevezett teljességi tétele:

Tétel (Gödel teljességi)

$$\Sigma \models \alpha \text{ akkor és csak akkor ha } \Sigma \vdash \alpha$$

ahol Σ elsőrendű mondatok egy tetszőleges halmaza (axióma rendszere), α pedig tetszőleges mondat.

A Hilbert rendszeren túlmenően, akkor tartjuk a logikai axiómák és a levezetési szabályok együttesét azaz a levezetési rendszert) teljesnek, ha igaz rá a fenti jellegű teljességi tétel.

A tétel visszaigazolja a bizonyításelméletnek azt a törekvését, hogy megkerülje a logikai következmény fogalmat, és “szimulálja” azt. A tétel a bizonyításelmélet erejét mutatja, valamint azt, hogy a matematika kettős, halmazelméleti és bizonyításelméleti felépítésű, ahol a teljességi tétel értelmében a két felépítés ekvivalens, így kontrollálják egymást.

A Gödel teljességi tétel egyik következménye, hogy számos logikai fogalomnak létezik a bizonyításelméleti megfelelője. Ilyen fogalom például az ellentmondástalanság: egy Σ axióma rendszer ellentmondástalan, ha nem létezik olyan α formula, hogy $\Sigma \vdash \alpha$ és $\Sigma \vdash \neg\alpha$ is igaz. Ekkor igazolható, hogy Σ ellentmondástalan a szemantikai értelemben akkor és csak akkor, ha ellentmondástalan a bizonyításelméleti értelemben.

A másik nevezetes, Gödeltől származó bizonyításelméleti tétel az úgynevezett Gödel (első) inkomplettségi tétel egy változata. Megfogalmazásához szükséges a következő definíció:

Definíció Egy $\mathcal{A}$ struktúra $Th(\mathcal{A})$ elmélete axiomatizálható, ha van olyan Σ véges, vagy "effektív megadható" axióma rendszer, hogy $Th(\mathcal{A}) = \text{Ded}\Sigma$

Tétel (Gödel I. inkomplettségi)

$Th(\mathcal{N})$ nem axiomatizálható elsőrendben

ahol $\mathcal{N}$ az aritmetika szokásos struktúrája.

A tételből tehát az derül ki, hogy $Th(\mathcal{N})$, azaz az aritmetika tételei "nem megragadhatóak" az axiomatikus módszerrel. Azaz, bármely axióma rendszer esetén van olyan aritmetikai igazság, amely az axióma rendszerből nem levezethető. Megmutatható, hogy a tétel az aritmetika elméletéről öröklődik a matematika legtöbb nagy és fontos elméletére. A tétel tehát azt mutatja, hogy

az a (Hilbert féle) program, hogy a struktúrák elméleteit ($Th(\mathcal{A})$ -t az axiomatikus módszer segítségével írjuk le, nem megvalósítható.

A tétel csalódást okozott azoknak, akik hittek az axiomatikus módszer bizonyos "mindenhatóságában". A tételt, mint a bizonyításelmélet korlátait jelző tételt is emlegetik. Azonban az első csalódottságot a tétel jobb megértése követte. Az inkomplettség jelenségére a válasz a szóban forgó axióma rendszer alkalmas bővítése.

A tétel a tudománynak azt a tapasztalatát tükrözi és igazolja vissza, hogy nincsenek mindent megmagyarázó axióma rendszerek. Bármely axióma rendszer esetén lesz azzal nem "magyarázható" jelenség. A tétel ezt a filozófiát igazolja matematikailag.

A bizonyításelmélet hatalmas fejlődésen ment keresztül a 20. sz. első évtizedei óta. Ez főleg annak köszönhető, hogy a bizonyításelméletben számos olyan fogalom született, amelyik később lehetővé tette a matematika számítógépre vitelét és egyáltalán a matematika és a számítástudomány interakcióját. Ez az interakció a bizonyításelmélet létrejötté nélkül nem mehetett volna végbe. A bizonyításelméletre épül például az automatikus bizonyítások (gépi bizonyítások) elmélete, vagy a logikai programozás elmélete.

A % pontban visszatérünk a bizonyításelméletre. Ismertetünk egy olyan bizonyítási rendszert, amelyik szemléletesebb és számítógép barátabb, mint a fenti klasszikus Hilbert féle rendszer.

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Adjon példát arra, hogy a $\forall x \exists y \alpha$ és a $\exists y \forall x \alpha$ formulák logikailag nem ekvivalensek.
2. Logikailag ekvivalensek-e a $\forall x(\alpha \vee \beta)$ és a $\forall x \alpha \vee \forall x \beta$ formulák?
3. Logikailag ekvivalensek-e a $\exists x(\alpha \rightarrow \beta)$ és a $\exists x \alpha \rightarrow \exists x \beta$ formulák?
- 4a. Mit értünk zárt formulán és hogyan nyer egy ilyen formula igazság értéket?
5. Mit értünk nyitott formulán és hogyan nyer egy ilyen formula igazság értéket?
6. Adjon meg több olyan természetes nyelvi állítást, melyeknek a következő a formalizáltja:

$$\neg(\exists x \alpha \rightarrow \forall x \alpha)$$
7. Mia különbség a között??, hogy $\alpha \models \beta$ helyes és a között, hogy $\alpha \rightarrow \beta$ igaz egy struktúrán?
8. Hogyan vezetjük vissza a logikai következmény helyességének vizsgálatát, kielégíthetőség vizsgálatra?
9. Mit értünk egy $T \subset A^\alpha$ halmaz henger-, azaz cylinder halmazán?
10. Mit értünk cilindrikus halmazalgebrán?
11. Halmazalgebrát alkotnak-e egy struktúrán az igazsághalmazok?
12. Mit értünk struktúra elméletén?
13. Definálható-e általában elsőrendű axiómákkal egy struktúra?
14. Meghatározza-e általában a struktúra elmélete a struktúrát?
15. Mit értünk nem-standard struktúrán?
16. Fogalmazza meg a kompaktsági tételt negált alakban.
17. Mit értünk másodrendű formulán?
18. Említsen másodrendű axiómákat.
19. Említsen olyan axiomatizációkat, ahol az axiómák nem határozzák meg a struktúrát.
20. Axiomatizálható-e általában egy struktúra elmélete?
21. Fogalmazza meg a Gödel teljességi tételt.
22. Van-e különbség egy struktúra függvényének neve és a szóban forgó függvény nyelvi jele között?
23. Tekintsük az $n \times n$ -s mátrixok additív csoportját. Mi a műveletek jele a struktúrában és mi a műveletek jele a nyelvben?
24. Adjon példát, amikor $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$ igaz, de $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ hamis.
25. Melyik a valós axiómák közül a másodrendű axióma?

7 A végtelen halmazokról.

7.1 Számosságok

7.1.1 Definíció, nevezetes számosságok

Definíció Két halmaz ekvivalens, ha létezik közöttük kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

Az "ekvivalencia" egy általánosított ekvivalencia reláció a halmazok összességén (amiről tudjuk, hogy nem halmaz). Ez az általánosított ekvivalencia reláció definiálja a *számosság* fogalmát, azaz, ennek az osztályai a számosságok. Két halmaz számossága tehát megegyezik, ha a halmazok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Egy A halmaz számosságát $|A|$ val, vagy $\#(A)$ -val jelöljük. Belátható, hogy a számosságok sem alkotnak halmazt, hanem osztályt alkotnak.

A véges halmazok számosságainak elemszámukat tekintjük. A végtelen halmazok számosságai bizonyos tekintetben rokoníthatók a véges számosságokkal, például rendezhetők és rendezésük kiterjesztése a természetes számok rendezésének. De egyéb vonatkozásokban igen eltérő a viselkedésük. Az egyik ilyen különbség, hogy részhalmaz számossága megegyezhet az egész halmaz számosságával, példa erre a páros természetes számok és az összes természetes számok halmaza, hiszen e két halmaz között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

Nevezetes végtelen számosságok például a természetes számok számossága és a valós számok számossága. A természetes számok számosságát *megszámlálhatóan végtelen* számosságnak nevezzük és $\aleph_0$ -al jelöljük (az alef $\aleph$ a héber abc első betűje). Sokszor használjuk a *megszámlálható*, vagy a *legfeljebb megszámlálható* elnevezést, mint közös elnevezést a véges és a megszámlálhatóan végtelen számosságra (a megszámlálhatóan végtelen angolul denumerable, míg a legfeljebb megszámlálható countable). A valós számok számossága az úgynevezett kontinuum számosság, jelölése c .

Halmazok számosságát gyakran határozzuk meg a definíció alapján.

Lemma Megszámlálható halmaz részhalmaza is megszámlálható.

Biz: Elegendő azt igazolni, hogy a természetes számoknak minden részhalmaza megszámlálható. Legyen A a szóban forgó részhalmaz. Ha A véges, akkor készen vagyunk. A természetes számok jólrendezését használjuk és teljes indukcióval definiáljuk a természetes számok és A közötti f kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ha $n = 1$, akkor $f(1)$ legyen A legkisebb eleme. Tegyük fel, hogy f definiált $n = k$ -ig és különböző elemeket vesz fel. Tekintsük A azon elemeit,

amelyek nincsenek az $f(1), f(2), \dots, f(k)$ elemei között. Legyen $f(k+1)$ az utóbbiak között a legkisebb elem. Ez nyilván nem eshet egybe f addigi értékeivel. Ezzel f -t definiáltuk indukcióval ω -n, f injektív, továbbá A n minden eleme felépítésként, hiszen A minden eleme legkisebb a nálánál nagyobb, vagy egyenlő elemek halmazában.

q.e.d.

Lemma A természetes számokból alkotott rendezett párok halmaz megszámlálható, azaz $|NxN| = \aleph_0 \cdot \aleph_0$.

Biz: Rendezzük a párokat táblázatba és járjuk be a táblázatot az átlós eljárással.

$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 1, 4 \rangle$	...	...	...
$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$				
$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$					
$\langle 4, 1 \rangle$						
...						
...						
...						

Az egyes lépésekhez ($k = 1, 2, 3, \dots$) hozzárendeljük a táblázat egy-egy elemét, egy-egy értelmű módon. A pontos hozzárendelést teljes indukcióval is definiálhatnánk. Így állításunk a definíció alapján következik.

qed

Tétel $|Q| = \aleph_0$, ahol Q a racionális számok halmaza.

Biz. Tekintsük például a pozitív racionális számok Q^+ halmazát. Tudjuk, hogy a pozitív racionális számok egyértelműen írhatók fel $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív relatív prímek. Halmazuk tehát tekinthető úgy, mint $|NxN|$ egy részhalmaza. Tehát a Q^+ értelmében Q^+ megszámlálható. Hasonlóan, a negatív racionális számok Q^- halmaza is megszámlálható. Az átlós eljárás segítségével igazolható, hogy $Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ is megszámlálható.

q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a végtelen ω -sorozatoknak (röviden, a szokásos sorozatoknak) megszámlálhatóan végtelen tagja van, de tagjainak halmaza nem feltétlenül végtelen, hiszen egy-egy elem többször is előfordulhat a sorozatban. Megszámlálhatóan végtelen halmazokra viszont azt is szoktuk mondani, hogy sorozatba rendezhetők,

Tétel A $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nyílt intervallumba eső valós számok számossága c .

Biz: Tudjuk, hogy a $\tan x$ függvény egy-egy értelmű megfeleltetést létesít a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -beli számok és az összes valósak között.
qed

Következmény, hogy bármely (a, b) nyílt intervallum valósainak számossága is c , hiszen az $\frac{y-b}{b-\frac{\pi}{2}} = \frac{x-a}{a+\frac{\pi}{2}}$ egyenes kölcsönösen egyértelműen képezi (a, b) -t $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -re.

Megjegyzés: Igazolható, hogy az egyenes pontjai és a valós számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ennek segítségével például azt is igazolhatjuk, hogy egy intervallum pontjainak számossága is c .

Például igazoljuk, hogy a $(0, 2\pi)$ intervallum számossága c . Tekintsük az $x^2 + (y - 0,5)^2 = 1$ kört. Fekessünk szelőket a kör $x = 0, y = 1$ pontjából az $y = 0$ egyeneshez. Így a kör kerületének pontjait, kivéve a vetítő pontot, (tulajdonképpen a $(0, 2\pi)$ intervallum pontjait) kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük az $y = 0$ egyenes pontjainak (ez a geometriai megfeleltetés az úgynevezett *sztereografikus projekció*).

FELADATOK

1. Hány olyan kör létezik a koordináta síkon, amely középpontjának koordinátái és sugara is racionális szám?

M: A szóban forgó körök halmaza azonosítható a racionális szám hármasok halmazával. Racionális számpár a táblázatos eljárás szerint megszámlálhatóan sok van. Hasonló megfontolás miatt, ezért racionális számhármas is.

2. Igazolja, hogy a pozitív valós számok számossága c .

M: Például a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelműen felelteti meg a pozitív valós számokat az összes valós számoknak.

7.1.2 Számosságok rendezéséről

Fontos tulajdonság a számosságok rendezhetősége.

Definíció Egy A halmaz számossága *kisebb* a B halmaz számosságánál, ha A kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető B valamely részhalmazának, de magának B -nek nem. Egy α számosság kisebb a β számosságnál, ha egy-egy reprezentáns halmazuk számosságai között, rendre, fennáll a kisebb reláció. A számosságok közötti *kisebb-egyenlő* reláció jelentése a szokásos "kisebb vagy egyenlő". Jelölések: $|A| < |B|$, $\alpha < \beta$, $|A| \leq |B|$, $\alpha \leq \beta$

Ellenőrizhető, hogy a számosságok közötti kisebb reláció definíciója nem függ a reprezentáns halmazok választásától.

Ha A' valóban fixpontja a h leképezésnek, tehát $h(A') = A'$, akkor $(*)$ -ból és a definíciókból:

$h(A') = A - (g(B - f(A'))) = A - (g(B - B')) = A - (g(B'')) = A - A''$, azaz $A' = A - A''$ és az A', A'', B', B'' halmazok megfelelők.

Hátra van megmutatni, hogy A' fixpontja h -nak.

Bontsuk ki $(*)$ -t "belülről" az $X = A'$ esetben:

$f(A') = f(\bigcap_{n \in \omega} A_n) = \bigcap_{n \in \omega} f(A_n)$. Utóbbi egyenlőség f injektivitása miatt

következik (nem injektív függvény esetén ez nem feltétlenül következik).

Ebből $B'' = B - \bigcap_{n \in \omega} f(A_n) = \bigcup_{n \in \omega} (B - f(A_n))$ a deMorgan azonosság miatt.

Alkalmazva az egyenlőségre g -t, azt kapjuk, hogy $g(B'') = g(\bigcup_{n \in \omega} (B - f(A_n))) =$

$\bigcup_{n \in \omega} g((B - f(A_n)))$ mivel az utóbbi egyenlőség minden unióra igaz.

Tekintsük ezután $A' - \bigcup_{n \in \omega} g((B - f(A_n)))$ -t. Alkalmazva ismét a deMorgan azonosságot, ez utóbbi.

$\bigcap_{n \in \omega} (A - g((B - f(A_n)))) \quad (**)$

De, figyelembe véve $(*)$ -t $(A - g((B - f(A_n)))) = h(A_n) = A_{n+1}$.

Tehát $(**)$ egyenlő $\bigcap_{n \in \omega} A_{n+1} = \bigcap_{n \in \omega} A_n = A'$ -vel, azaz $h(A') = A'$ valóban.

qed

Számosságok antiszimmetriáját gyakran alkalmazzuk halmazok számosságának bizonyítására, azaz $|A| = \alpha$ -t úgy bizonyítjuk, hogy bizonyítjuk $|A| \leq \alpha$ -t és $|A| \geq \alpha$ -t.

Tétel $A \leq$ a számosságokon egy $\leq$ -rendezés.

Biz. A reflexivitás, tranzitivitás triviális. Az antiszimmetriát fent igazoltuk.

Megjegyezzük- bizonyítás nélkül- , hogy $\leq$ a számosságokon jólrendezés is, valamint lineáris. Igazolható, hogy a linearitás tulajdonság ekvivalens a kiválasztási axiómával.

PÉLDA

Mennyi a valós számokból készíthető számsorozatok számossága?

M: A szóban forgó számosság, nyilván, legalább c . Megmutatjuk, hogy legfeljebb c .

A valós számsorozatokot injektív módon leképezzük a valós számok halmazába a táblázatos módszer segítségével. Elegendő $(0,1)$ -beli valós számokat

tekinteni. Gondoljuk a valós számokat végtelen tizedes tört alakban és zárjuk ki a végtelen sok kilencesre végződő alakokat.

Tekintsünk egy valós számsorozatot és írjuk fel táblázatos alakban.

0,	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	...	...
0,	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	...	...
0,	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	...	...
0,	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	...	...
...						
...						
...						

Rendeljük ehhez a sorozathoz a következő tizedes jegy alakot:

$0, a_{11}a_{12}a_{21}a_{31}a_{22}a_{13}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \dots$

Ezekben az alakokban sem szerepelhet végtelen sok kilencesre végződő alak. Különböző sorozatokhoz pedig különböző tizedes alakokat, azaz különböző valós számokat rendelünk. Ezzel a szóban forgó halmazt injektív módon leképeztük a valós számok halmazába.

A következő, rendezésekre vonatkozó tétel, nevezetes számosságokra vonatkozik:

Tétel (i) A megszámlálhatóan végtelen a legkisebb végtelen számosság

(ii) $\aleph_0 < c$

Bizonyítás. (i) Indirekt. Ha lenne $\aleph_0$ -nál kisebbvégtelen számosság, ez azt jelentené, hogy ω -nak lenne olyan H végtelen részhalmaza, amelyik nem feleltethető meg kölcsönösen egyértelmű módon ω -nak. Viszont a % lemma miatt H bármely részhalmaza megszámlálható. Ez ellentmondás.

(ii) $\aleph_0 < c$ nyilvánvaló, elég megmutatni, hogy $\aleph_0 \neq c$

Elegendő megmutatni, hogy a $(0, 1)$ -beli valós számok számossága nem megszámlálható. Már használtuk, hogy a valós számok egyértelműen felírhatók végtelen tizedes tört alakban, ha nem engedünk meg végtelen sok kilenest egymás után a tört végén.

Indirekt, tegyük fel, hogy $|(0, 1)| = \aleph_0$. A végtelen tizedes törtek (amelyek nem tartalmaznak hátul végtelen sok kilenest) végtelen táblázatba írhatók: lásd a fenti % táblázatot.

Definiálni tudunk egy olyan $(0, 1)$ -beli valós számot, amelyiket nem soroltunk fel, ez ellentmondás. Ezt a számot úgy kapjuk, hogy az átlóban található jegyeket rendre megváltoztatjuk, kilenestől eltérő értékke.

q.e.d.

7.1.3 Műveletek számosságokkal

Definíció Az α és β számosságok $\alpha + \beta$ összegén értjük diszjunkt reprezentáns halmazok uniójának számosságát. Az α és β számosságok $\alpha \cdot \beta$ szorzatán értjük A és B reprezentáns halmazok $A \times B$ direkt szorzatának számosságát.

Megmutatható, hogy a fenti definíciók függetlenek a reprezentáns halmazok választásától.

Számosságok műveletek eredményének meghatározásánál használhatjuk a definíciót, illetve használhatunk már ismert műveleti értékeket.

Tétel

(i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

(ii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

A tétel hasonlóan igazolható, mint ahogyan az, hogy a racionális számok számossága $\aleph_0$.

A következőkben a tétel általánosításaival foglalkozunk.

A tétel nyilván általánosítható, teljes indukció segítségével, *véges sok* komponensre. Általánosítható-e *végtelen* sok, például $\aleph_0$ sok komponensre?

Tekintsük először (ii)-t. Könnyű látni, hogy $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots$ nem megszámlálható. Ennek a halmaznak ugyanis reprezentánsa például a természetes számokból álló végtelen sorozatok halmaza. Azonban már a 0 és 1 értékekből álló végtelen sorozatok halmaza sem megszámlálható, hanem kontinuum számosságú, hiszen azonosítható a avlós számokkal.

(i)-re gondolva, azonban az általánosítás sikeres:

Tétel Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniójának számossága szintén megszámlálható.

Biz. Rendezzük a megszámlálható sok halmazt egy táblázatba. A táblázat elemeit átlós módszerrel sorozatba rendezhetjük. A szóban forgó unió a táblázatot képező elemek halmazának részhalmaza, amelynek számossága a % Lemma értelmében szintén megszámlálható.

q.e.d.

Rövidesen látni fogjuk, hogy igaz a % tétel azon általánosítása, amikora a $\aleph_0$ számosságot c -re cseréljük.

FELADATOK

1. Mennyi az egész számokat tartalmazó 5×5 -s mátrixok számossága?

M: A szóban forgó mátrixok azonosíthatók a 25 dimenziós, egészeket tartalmazó vektorokkal. Utóbbiak számossága megegyezik a Z^{25}

halmaz számosságával, ahol Z jelöli az egész számokat. $|Z^{25}| = \aleph_0$ a % tétel (ii) pontjának ismételt, 25-szöri alkalmazása miatt.

2. Legyen A egy véges halmaz, például n elemű.. Mennyi az A elemeiből készíthető véges sorozatokösszességének számossága?

M: Rögzített k -ra véges sok ilyen k -sorozat van. Az összes véges sorozat ezek megszámlálható (diszjunkt) uniójaként áll elő, ezért a fenti % tétel értelmében a keresett számosság $\aleph_0$.

3. Mennyi a racionális számokból készíthető véges sorozatok számossága?

M: Rögzített k -ra $\aleph_0^k$ ilyen sorozat van, azaz % (ii) miatt $\aleph_0$ sok. Az összes véges sorozat ezek megszámlálható (diszjunkt) uniójaként áll elő, ezért a fenti % tétel értelmében a keresett számosság $\aleph_0$.

4. Mi az egy adott véges halmazból készíthető végtelen sorozatok összességének számossága?

M: A kért számosság a c . Ugyanis megegyezik az n alapú számrendszerekben felírt valós számok számosságával.

4. $c \cdot c = ?$

M: A kért számosság c . Ugyanis, egyrészt $c \leq c \cdot c$, másrészt, tekintsük például a $(0, 1)$ -beli valósok végtelen tizedes törtjeiből álló számpárokat. Egy ilyen $\langle 0, a_1 a_2 \dots, 0, b_1 b_2, \dots \rangle$ számpárhoz hozzárendelhetjük a $0, a_1 b_1 a_2 b_2 \dots$ "összefésült" valós számot. Ez egy injektív leképezés $(0, 1)$ -be. Ezért $c \cdot c \leq c$. Ezért $c \cdot c = c$.

A következő tétel az előző tétel (i) részének általánosítása:

Tétel (a számosság aritmetika alap tétele)

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha$$

tetszőleges végtelen számosságra.

A tételt nem bizonyítjuk. A tétel véges sok komponensére is általánosítható. Igazolható, hogy a tétel ekvivalens a kiválasztási axiómával.

Megmutatható, hogy az előző tétellel ekvivalens a következő, amennyiben legalább az egyik számosság végtelen:

Tétel $\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

ahol α és β tetszőleges végtelen számosságok.

Például, a tétel következményeként

$$\aleph_0 + c = c, \aleph_0 \cdot c = c, c \cdot c = c, \text{ stb.}$$

Definíció Az α^β számosságon értjük az A^β halmaz számosságát, ahol A és B az α és β számosságok egy-egy reprezentáns halmaza..

A definíció ebben az esetben sem függ a reprezentáns halmazoktól.

Az α^β hatvány fontos esete a 2^β hatvány.

Igaz a következő:

Tétel $2^{\aleph_0} = c$

Bizonyítás: Ugyanis $2^{\aleph_0}$ -t tekinthetjük, mint a lehetséges 0-1 *sorozatok* összességét. Ekkor például a (0,1)-beli valós számok digitális alakjára gondolva (kizárva a végtelen sok egyesre végződőket), kapjuk hogy $c = 2^{\aleph_0}$.

q.e.d.

2^β -t a $\{0, 1\}^B$ halmaz reprezentálja, azaz $\mathcal{P}(B)$. Ugyanis minden B -n értelmezett $0 - 1$ értékű függvényhez rendelhető B -nek egy részhalmaza és fordítva B minden részhalmazához rendelhető egy B -n értelmezett $0 - 1$ értékű függvény. A $\mathcal{P}(B)$ hatványhalmazhoz kapcsolódik a következő fontos tétel:

Tétel $|B| < |\mathcal{P}(B)|$

Biz.

Nyilvánvaló, hogy $|B| \leq |\mathcal{P}(B)|$, ezért elég igazolni, hogy $|B| \neq |\mathcal{P}(B)|$. Indirekt, tegyük fel, hogy $|B| = |\mathcal{P}(B)|$. Ekkor létezik B -ről $\mathcal{P}(B)$ -be képező egy-egy értelmű f függvény. Tekintsük a következő $B = \{a : a \notin fa\}$ halmazt (B esetleg lehet üres is). Mivel $B \subset A$ ezért B is hozzátartozik f értékkészletéhez, azaz van olyan $b \in A$, hogy $fb = B$. Két eset van: $b \in B$, vagy $b \notin B$. Ha $b \in B$, akkor $b \notin fb$. De $fb = B$, ezért $b \notin B$, ez ellentmondás. Ha $b \notin B$, akkor B definíciója miatt $b \in fb$. De $fb = B$ miatt, $b \in B$ következik, ami szintén ellentmondás. Tehát $|B| \neq |\mathcal{P}(B)|$, azaz $|B| < |\mathcal{P}(B)|$ következik.

q.e.d.

A tétel következményei

- A tételt átfogalmazva számosságokra:

$$\beta < 2^\beta \quad (*),$$

azaz, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c$

- bármely számosságnál van nagyobb számosság

Híres probléma az, hogy létezik-e számosság β és 2^β között, azaz létezik-e olyan γ számosság, amelyre $\beta < \gamma < 2^\beta$. Ezt a problémát nevezzük *általános kontinuum hipotézisnek*. Speciális esete a $\beta = \aleph_0$, ezt a problémát *kontinuum hipotézisnek* nevezzük. Cohen igazolta, hogy az általános kontinuum hipotézis *független* a halmazelmélet szokásos axiómáitól.

(*) -ból következményként kapjuk a már bizonyított $\aleph_0 < c$ összefüggést,

Hatványokra igaz a következő:

Tétel $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

A tételt nem bizonyítjuk

Érdekesekek általában az $\alpha^{\aleph_0}$ alakú hatványok, ugyanis ezek reprezentáns halmazai az A -ból készített sorozatok (közönséges végtelen sorozatok) összessége, ahol $|A| = \alpha$.

FELADAT

$\aleph_0^{\aleph_0} = ?$

M.: $c = |2^{\aleph_0}| \leq |\aleph_0^{\aleph_0}| \leq |c^{\aleph_0}| = |(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}| = |(2)^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}| = |2^{\aleph_0}| = c$. Az utolsó lépéseknél hivatkozhatunk arra is, hogy a fentiekben igazoltuk, hogy a valós sorozatok számossága c , azaz $|c^{\aleph_0}| = c$.

Végül, felvetődik a kérdés: *mi kapcsolat rendszámok és számosságok között?*

Ellenőrizhető, hogy számosságok speciális rendszámok: az egymással ekviváens rendszámok között a legkisebbek. Megmutatható, hogy a rendszámok rendezése kiterjesztése a számosságokénak és ez a rendezés is jólrendezés.

7.2 Axiomatikus halmazelmélet

A matematika legtöbb területén természetesnek és adottnak tartjuk az axiomatikus felépítést (pl. valós számok, lineáris algebra, valószínűségszámítás, stb.). Az egyetemen szinte minden matematikát, végső soron, axiomatikus megközelítésben tanulunk, ez önmagában is indokolná a halmazoknál is az axiomatika felmutatását. Ráadásul indokolja itt az axiomatikát az a közismert tény, hogy a halmazelmélet "naív" megközelítése logikai ellentmondásokat produkál. A halmazok elméleténél azonban sokan, akik matematikával foglalkoznak, az axiomatikát általában nem használják, vagy kissé öncélú okoskodásnak tartják, noha jogosságát nem tagadják. Pedig ha a matematika gyökérwit illetően valamiben bizonytalanok vagyunk, vagy kételyünk támad, akkor általában az axiomatikus halmazelmélethez tanácsos fordulni, a problémát abban érdemes elemezni.

A "naív" halmazelmélet szabadságával szemben, ahol "mindent szabad" kivéve egynéhány dolgot, ami nem megengedett, az axiomatikus halmazelméletben "minden tilos", ami nem megengedett.

Már említettük, hogy a halmazok bemutatásánál ebben a jegyzetben is azt az elfogadott eljárást alkalmazzuk, hogy a "naív halmazelméletet" követjük, de

kontrolláljuk az axiomatikával. Így a szemléletességet is megtartjuk, de igyekszünk kiküszöbölni az ellentmondásukat. Ennek az eljárásnak része a jelen pont, a tiszta axiomatika bemutatása. (lásd Hajnal-Hamburger)

A halmazelmélet bemutatására gyakori az az eljárás, hogy a “naív” megközelítést kontrolláljuk az axiomatikus felépítéssel, tehát egyfajta középutat választunk (ilyen tárgyalás pl. *Hajnal-Hamburger*).

Már bevezettük az elsőrendű (formális) nyelv fogalmát, ezért pontosabban meg tudjuk fogalmazni a halmazelmélet axiómáit (az axiomatika általános és formalizált fogalmára nézve lásd a % pontot). *Ebben a fejezetben az “axiomatika” intuitív megközelítésére építünk, mint azt általában is tesszük a matematikai gyakorlatban.*

A halmazelmélet nyelve elsőrendű nyelv, amely egy kétváltozós reláció szimbólumot tartalmaz, az $\in$ szimbólumot. Az axiomatikus halmazelméletben halmaznak az eleme is halmaz. Az axiómák a halmazok összességére vonatkoznak.

Az úgynevezett *Zermelo-Frankel féle axiomatikus halmazelmélet (ZF)* első hat axiómája::

0. Üres halmaz axióma

$$\exists x \neg \exists y (y \in x)$$

1. Meghatározottsági axióma:

$$\forall x \forall y (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \leftrightarrow x = y)$$

Két halmaz pontosan akkor azonos, ha elemeik megegyeznek.

2. Pár axióma:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

Bármely két halmazhoz létezik olyan halmaz, amelynek pontosan ez a két halmaz az eleme.

Megj. definiálhatjuk a tartalmazást....

3. Hatványhalmaz axióma:

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \forall v (v \in u \rightarrow v \in x))$$

Bármely x halmazhoz létezik egy olyan y halmaz, amelynek elemei pontosan az x halmaz részhalmazai.

4. Unió halmaz axióma:

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (u \in v \wedge v \in x))$$

Halmazok egy tetszőleges x halmazához létezik olyan y halmaz, amelynek elemei pontosan azok a halmazok, amelyek valamely x -beli halmazhoz hozzá tartoznak. Azaz, ha a halmazok elemeit egy halmaz elemeivel indexezzük, akkor a szokásos unió is halmaz. Mivel így mindig különböző elemek generálódnak, ismételtén alkalmazva ezt a tulajdonságot, kapjuk, hogy a halmaznak végtelen sok eleme van.

5. Végtelen halmaz axióma:

$\exists x(\exists u(u \in x \wedge \forall v(v \notin u)) \wedge \forall u(u \in x \rightarrow \exists v(v \in x \wedge \forall w(w \in v \leftrightarrow w \in u \vee w = u))))$

Van olyan nemüres x halmaz, amelynek az üres halmaz eleme és ha az u halmaz eleme, akkor eleme az $u \cup \{u\}$ halmaz is. Mivel így mindig különböző elemek generálódnak, ismételten alkalmazva ezt a tulajdonságot kapjuk, hogy a halmaznak végtelen sok eleme van.

(mivel az $u \cup \{u\}$ műveletet végtelen sokszor tudjuk ismételni, ezért a halmaz végtelen).

6. Helyettesítési axióma (séma)

Tegyük fel, hogy a φ formula szabad változói: $x, y, z, w_1, \dots, w_n$. Ekkor $\forall z \forall w_1 \dots \forall w_n [\forall x \in z \exists! y \varphi \rightarrow \exists u \forall x \in z \exists y \in u \varphi]$

ahol $\forall x \in z \alpha$ rövidíti a $\forall x(x \in z \wedge \alpha)$ formulát, $\exists!$ rövidíti a "létezik egy és csak egy" kvantor és $\exists y \in u \varphi$ rövidíti a $\exists y(y \in u \wedge \varphi)$ formulát

A tulajdonság jelentése az, hogy ha minden x -hez van pontosan egy y halmaz, amelyre $\varphi(x, y)$ teljesül (a szabad változók bármely értékére), akkor van egy olyan (univerzális) u halmaz is, hogy minden x -re van olyan $y \in u$, hogy $\varphi(x, y)$ teljesül, azaz, ha $\varphi(x, y)$ függvény, akkor értékkészlete is halmaz.

A helyettesítési axióma alkalmazása széleskörű. Például ezen axióma segítségével lehet bevezetni halmazok kereszt szorzatát, illetve ezen axiómából következik, hogy a többdimenziós halmazok "vetületei" is halmazok.

A halmazelmélet nyelve minimális. De a *halmazelméletben és a matematikában is számos más jelölésre, fogalomra van még szükségünk*. Szükségünk van például relációkra, függvényekre.

Szükség van például az $x \subset y$ relációra.

A $\subset$ reláció bevezetése a következőképpen történik. A nyelv jeleihez hozzávesszük a $\subset$ jelet és az axiómákhoz hozzávesszük a $\subset$ relációt definiáló

$$\forall x \forall y (x \subset y \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y)) \quad (8)$$

formulát, mint *definiáló axiómát*. Mindez tulajdonképpen az $x \subset y := \forall u (u \in x \rightarrow u \in y)$ *informális definíciónak* felel meg!

Szükségünk van függvényekre is, például a $\mathcal{P}(x)$ hatványhalmaz képzésre, vagy az unió képzésre, vagy a $\langle \rangle$ rendezett pár képzésre. függvényt vezetünk be (definiálunk), akkor ez, a relációk bevezetésével szemben, két lépésben történik azaz, 2 axiómával. Egy egzisztencia-unicitás axiómával és egy definiáló axiómával.

Például tekintsük a $\mathcal{P}(x)$ (hatványhalmaz képzés esetét:

A 3. axióma biztosítja a hatványhalmaz létezését, de ennél több is igazolható (az 1. axióma segítségével):

$$\forall x \exists! y \forall u (u \in y \leftrightarrow \forall v (v \in u \rightarrow v \in x)) \quad (9)$$

ahol a $\exists!$ azt jelenti, hogy egy és csak egy létezik (ez is kifejezhető közösleges kvantorokkal). Ez az egzisztencia-unicitás axióma.

A definiáló axióma pedig, már a $\subset$ reláció birtokában, ez:

$$\forall x \forall y (y \in \mathcal{P}(x) \leftrightarrow y \subset x) \quad (10)$$

A fent bevezetett jelölések csupán *informálisak*, tehát $\subset$ vagy $\mathcal{P}$ nem tartozik a halmazelmélet nyelvéhez, tehát a fenti 8 és 10 axiómák nem formulái a halmazelméletnek.

A rendezett pár bevezetéséről már szó volt a % pontban. A $\langle \rangle$ jelölést hasonlóan vezethetjük be.

1 Üres halmaz definíciója:

Az egzisztencia-unicitás tulajdonság:

$$\exists! x \neg \exists y (y \in x)$$

A definíció

$$\neg \exists y (y \in \emptyset)$$

2. Formalizáljuk azt a tulajdonságot, hogy az x halmaz egy bináris reláció, felhasználva a $\langle \rangle$ rendezett pár fogalmát:

$$\text{Rel}(x) \leftrightarrow \forall u (u \in x \wedge \exists v \exists w (u = \langle v, w \rangle))$$

A halmazelmélet hetedik axiómája az úgynevezett *regularitási axióma*,(*)

$$\forall x [\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y))]$$

amelytől azonban sokszor eltekintenek. A regularitási axióma vezet el ahhoz a kérdéshez, hogy milyen struktúra elégíti ki a halmazelmélet eddigi ((0)-(vii)) axiómáit? Egy vagy több ilyen struktúra létezik-e? Már maga a kérdés is paradoxnak tűnhet, hiszen a struktúra klasszikus fogalma maga is tartalmazza a "halmaz" fogalmát. Ezt a paradoxont úgy lehet feloldani, hogy itt nem "klasszikus" struktúráról van szó, hanem speciális, úgynevezett "szintaktikai" struktúrákról. Az egyértelműségre az a válasz, hogy *nem csak egyetlen* a halmazelmélet többi axiómáját kielégítő ilyen struktúra létezik. Röviden azt mondhatjuk, hogy *nem csak egyetlen halmazelmélet létezik*. A vélekedések *megoszlának a tekintetben*, hogy kell-e és lehet-e egyértelműsíteni a halmazelmélet szóban forgó $\{x, y\}$ axiómáit kielégítő "világot". Ilyen egyértelműsítésre szolgál a regularitási axióma, amely a halmazelmélet olyan megszorításához vezet, hogy a halmazokról feltételezi az úgynevezett "jófundáltság" tulajdonságot, amely a halmazokat egyetlen "hierarchiába" rendezi. Ezt itt most nem részletezzük.

Gyakran tekintik egy ZF axiómának a *belefoglalási axiómát* (vagy *rész-halmaz axiómát*):

$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \Phi(x))$ -t igazoljuk

Erről a tulajdonságról már szó volt a % pontban. Hátrány, hogy nem egyetlen axióma, hanem axióma séma.

A halmazelmélet "tiszteletbeli" axiómája a *kiválasztási axióma* Informálisan már megfogalmaztuk a % pontban. A kiválasztási axióma nem Zermelo-Fraenkel axióma, de a matematika nagy részében alkalmazzuk és inkább az számít érdekességnek, ha egy-egy mélyebb állítás bizonyításához nincs rá szükség (szokták helyette a jólrendezési tulajdonságot is axiómának tekinteni). Akik a kiválasztási axiómát elkülönítik a *ZF* axiómáktól arra hivatkoznak, hogy sokkal kevésbé elemi, mint azok. A kiválasztási axiómával bővített Zermelo-Fraenkel axióma rendszerét *ZFC*-vel jelöljük.

Említettük a % pontban a kontinuum hipotézist. A kontinuum hipotézis állítása nevezetes független állítás a *ZFC*-től.

FELADATOK

Számosságok:

- Igazolja, hogy a számegyenes legfeljebb megszámlálható sok diszjunkt intervallum vehető fel (ötlet: mindegyik tartalmaz racionálisan)
- igazolja, hogy a síkon legfeljebb megszámlálható páronként diszjunkt körtartomány vehető fel
- Igazolja, hogy a számegyenes felbontható kontinuum sok diszjunkt kontinuum számosságú halmazra (ötlet: $a \sim b$ ha $|a - b|$ racionális)
- igazolja, hogy a gömb felülete kontinuum sok pontból áll (ötlet: legalább, legfeljebb)
- Cantor halmaz: kihagyjuk a $(0, 1)$ intervallum középső nyílt harmadát, majd a fennmaradó két intervallum középső nyílt harmadát, majd a fennmaradó intervallumok középső nyílt harmadát, stb. Mi a számossága az így fennmaradó Cantor halmaznak?

Axiomatikus halmazelmélet:

1. Formalizálja azt a halmazelmélet nyelvén, $\langle \rangle$ -t is használva, hogy

a) az x halmaz egyértékű reláció.

M: Egyértékű(x) $\leftrightarrow \forall u \forall v (\langle u, v \rangle \in x \wedge \langle u, w \rangle \in x \rightarrow v = w)$

b) x halmaz egy függvény

Megj: Függvény $\langle x \rangle \leftrightarrow \text{Rel}(x) \wedge \text{Egyértékű}(x \{ \}$

c) $\{x : x \in y \wedge \Phi(x)\}$ egy halmaz.

2. Milyen definíciókkal vezetjük be

a) az $\{x, y\}$ halmaz pár fogalmát?

b) a két tagú unió fogalmát?

- Egyéb egyszerű formalizálások

- Bevezetés definíciókkal

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK:

1. Lehetséges-e az, hogy egy halmaz és valamely valódi részhalmazának számossága megegyezik?

2. Melyik igaz: egy számosság egy speciális rendszám, vagy fordítva, egy rendszám egy speciális számosság.

3. Mit értünk rákövetkező rendszámon (illetve számosságon), illetve limesz rendszámon (illetve számosságon)?

4. Hogyan kapjuk meg egy α rendszámból $\alpha + 1$ -t? (ugyanaz számosságra!!)

5. $|3^\omega| = ?$

6. $|\omega^\omega| = ?$

7. Létezik-e jólrendezése a racionális számoknak?

8. Hogyan szól a számosságok trichotómia tulajdonsága?

9. Igaz-e, hogy $\alpha \cdot \beta = \beta$ ha $\alpha \leq \beta$?

1. Hogyan vezetjük be a részhalmaz relációt az axiomatikus halmazelméletben?

2. Hogyan vezetjük be a hatványhalmaz függvényt az axiomatikus halmazelméletben?

3. Halmazt alkotnak-e a számosságok (rendszámok)?

4. Említsen a *ZFC*-től független tulajdonságokat (axiomákat)

5. Igaz-e, hogy halmaz eleme csak halmaz lehet az axiomatikus halmazelméletben?

6. Honnan derül ki az axiomatikus halmazelméletben az, hogy valami egy valódi osztály??

7. Említsen olyan axiómát, amelyik séma és nem egyetlen axióma.

8 A számfogalomról

Nem célunk itt, hogy a különböző számfogalmakat részletezzük. Ez megtörténik általában az Analízis, vagy az Algebra témakörökben, de a számok kezelését illetően építhetünk a középiskolai tanulmányokra is. Csupán rövid áttekintést adunk az egyes számfogalmak bevezetési lehetőségeiről és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságukat. Egyedül a nem-standard szám fogalmát tárgyaljuk kissé részletesebben, mert ennek ismertetése általában nem tartozik a hagyományos bevezetésekhez.

8.1 Természetes számok, egész számok

A természetes számokkal kapcsolatos gyakori félreértés, hogy bevezetésük nem igényel sok fáradságot, mivel a természetes számok létezése és mibenléte annyira nyilvánvaló.

A természetes számok egyik lehetséges bevezetése mellékterméke a véges halmazok elméletének, amely utóbbi egy lényegesen korlátozott halmazelmélet.

Másik szokásos bevezetés az axiomatikus, azaz a Peano axiómákkal történő bevezetés. Azonban ez sem könnyebb út az előzőnél, mivel itt igazolni kell a Peano axióma rendszer ellentmondástalanságát lehetőleg elemi eszközökkel.

A természetes számok bevezetése után az egészek bevezetése már könnyű.

8.2 Racionális számok

A racionális számok bevezetése a többi ismert számfogaloméhoz képest viszonylag egyszerű. A racionális számokhoz az egész számok ismeretében a multiplikatív inverz szükségessége (és általában a szorzás invertálhatóságának szükségessége) vezet. A racionális számokat, formális $\langle p, q \rangle$ ($\frac{p}{q}$ -nak megfelelő) rendezett számpáronként vezetjük be, kiterjesztve az egész számokon ismert műveleteket. Az eljárást nem részletezzük. A racionális számok úgynevezett *rendezett testet* alkotnak, azaz testet, amelyen adott egy lineáris rendezés.

A racionális számok egyik fontos tulajdonsága, hogy rendezésük sűrű.

A racionális számok bővítését például az teszi szükségessé, hogy a hatványozás nem invertálható, azaz például az $x^n = r$ (ahol r racionális szám) egyenlet általában nem megoldható a racionális számok körében. A racionális számok bővítését az is indokolja, hogy a racionális számok struktúrája nem teljes, azaz, az önmagukban konvergens (Cauchy konvergens) sorozatoknak nem feltétlenül létezik határértéke a racionális számok között.

8.3 Valós számok

A számfogalom fejlődésénél technikailag talán a valós számok létrejötte a legnagyobb lépés.

Szokásos bevezetés az axiomatikus bevezetés. Ez a test axiómákkal történik (lásd %), plusz a supremum tulajdonság (bármely korlátos számhalmaznak van legkisebb felső korlátja, azaz supremuma). Ez esetben azonban be kell látni, hogy az axiómák kielégíthetők (ezért a Gödel teljességi tétel értelmében ellentmondástalanok, lásd %)

Az egyik gyakran alkalmazott szemantikai bevezetés az úgynevezett Dedekind szeletek alkalmazása.

Másik elterjedt bevezetése a valós számoknak az úgynevezett teljessé tételi eljárás, azaz a racionális számok teljessé tétele. Ezt az eljárást vázoljuk. A következő lépésekben történik:

1. Tekintsük az önmagukban konvergens racionális számsorozatokat. Ezek között definiálunk egy $\sim$ relációt:

Legyen $(r_n) \sim (p_n)$ akkor és csak akkor, ha az $(r_n - p_n)$ sorozat 0– sorozat.

$\sim$ nyilván ekvivalencia reláció, tehát sorozatok ekvivalencia osztályait definiálja. Azonosítsuk ezen ekvivalencia osztályokat a bevezetendő valós számokkal. Jelölje az (r_n) sorozatot tartalmazó osztályt, azaz valós számot $(r_n)^*$.

2. A fenti ekvivalencia osztályokon, azaz a valós számokon, definiáljuk a valós műveleteket és a $<$ relációt.

Ezt az osztályok reprezentáns sorozatai segítségével végezzük. Például legyen $(r_n)^* + (p_n)^* := (r_n + p_n)^*$

Ez értelmes, mert belátható, hogy $(r_n + p_n)$ is konvergens önmagában, továbbá a definíció nem függ a választott reprezentáns sorozatoktól.

$(r_n)^* > 0$ legyen akkor, ha $r_n > 0$ valamely indextől fogva.

$(r_n)^* > (p_n)^*$ legyen akkor, ha $(r_n - p_n)^* > 0$

Belátható, hogy ezek a definíciók sem függenek a reprezentáns sorozatoktól.

Ezzel definiáltunk egy valós típusú struktúrát..Jelölje:

$$\mathcal{R} = \langle R, <, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$$

ahol R a valós számok halmaza.

A racionális számok ebben a struktúrában a racionális számokhoz konvergáló sorozatokat tartalmazó osztályok. A műveletek kiterjesztései a racionálisokon értelmezett műveleteknek. Igazolható, hogy ez a struktúra kielégíti a valós számok szokásos axiómáit.

A teljesség igazolásának vázlata: Kiterjesztjük a racionális számsorozatokra értelmezett fenti $\sim$ ekvivalencia relációt a valós számokból álló számsorozatokra. Ez megtehető, hiszen a műveletek kiterjesztése után a valós számokból álló sorozatok Cauchy konvergenciája már definiálható. Ezután igazoljuk, hogy minden ilyen új osztály tartalmaz racionális számsorozatot, azaz igazoljuk azt, hogy minden valós számsorozathoz találunk olyan racionális számsorozatot, hogy az vele ekvivalens, azaz, különbségük Cauchy nulla sorozat. Ez a racionális számsorozat által definiált valós szám lesz a valós számsorozat határértéke.

A valós számok tehát teljesek és rendezett testet alkotnak (lásd % fejezet). Igazolható, hogy a teljesség tulajdonság és a sup tulajdonság ekvivalensek (lásd % feladat) Továbbá az is belátható, hogy a sup tulajdonsággal rendelkező testek izomorfak, azaz jogos a valós számokat, mint sup tulajdonsággal rendelkező testeket definiálni (feltéve, ha igazoltuk ilyenek a létezését)

A valós számok néhány további nevezetes tulajdonsága:

A valós számok is sűrűn vannak. Továbbá, bármely két valós szám között van racionális szám és fordítva, bármely két racionális szám között van irracionális szám. Ugyanis bármely intervallum megszámlálható sok racionális és ezért kontinuum sok irracionális számot tartalmaz.

Cantor tulajdonság: Tekintsük egymásba skatulyázott zárt intervallumok egy végtelen sorozatát $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots [a_n, b_n] \supseteq \dots$. Ekkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Tétel. A sup tulajdonság és a Cantor tulajdonság ekvivalensek.

Biz. Tételezzük fel először a sup tulajdonságot. Igazoljuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Az (a_n) sorozat monoton növekedő és nyilván korlátos, ezért van egy A határértéke a sup tulajdonságot kihasználva. Ugyanez igaz a (b_n) monoton csökkenő sorozatra is, legyen a határértéke B . Ha $A < B$, akkor készen vagyunk. Ha $A = B$, akkor az (a_n) vagy a (b_n) sorozat nem éri el a határértékét, mert ha mindkettő elérné, akkor elég nagy indexre elfajult intervallumok lépnek fel. Mivel az egyik sorozat nem éri el $A = B$ -t, ezért ez esetben ez a pont az intervallumok közös pontja.

Tételezzük fel a Cantor tulajdonságot. Igazoljuk a sup tulajdonságot. Legyen H egy felülről korlátos valós számhalmaz. Legyen $h \in H$ tetszőleges rögzített és legyen K egy tetszőleges felső korlátja H -nak. Tekintsük a $[h, K]$ intervallum felezőpontját h_1 -t. Ha $h_1 \in H$, akkor tekintsük a $[h_1, K]$ intervallumot, ha $h_1 \notin H$ akkor pedig a $[h, h_1]$ intervallumot. Ezután felezzük meg az így keletkező intervallumot és folytassuk az eljárást. Egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatát kapjuk, amelyek hossza 0-hoz konvergál, ezért a Cantor

tulajdonság miatt tartalmazznak egy és csak egy A pontot. Azt állítjuk, hogy ez lesz $\sup H$. Az A szám felső korlátja H -nak, mert ha nem így lenne, akkor létezne $t \in H$ olyan, hogy $A < t$. Viszont a konstrukció miatt A tetszőlegesen közelíthető felülről felső korlátokkal, ezért létezne olyan K_1 felső korlát, amelyre $A < K_1 < t$ ellentmondásban azzal, hogy K_1 egy felső korlát.

A a legkisebb felső korlát, mert ha $K_1 < A$ is felső korlát lenne, akkor létezne $t \in H$ "elég közel" A -hoz, azaz létezne $K_1 < t \in H$ ellentmondásban azzal, hogy K_1 felső korlát..

q.e.d.

A valós számok rendelkeznek az Archimedesi tulajdonsággal:

Archimedesi tulajdonság: Ha x pozitív valós, akkor bármely y valósához létezik olyan természetes $n \in \mathbb{N}$ hogy $y < n \cdot x$.

Algebrai számoknak nevezzük az egész együtthatós polinómok gyökeit. A nem algebrai számok a *transzcendens számok*.

Tétel: létezik transzcendens szám.

Ehhez elegendő meggondolni azt, hogy az algebrai számok csak megszámlálhatóan végtelen sokan vannak a kontinuum számosságú valós számok között. Ugyanis rögzített n -re megszámlálhatóan sok egész együtthatós polinóm létezik, mivel az együtthatóikból képezett rendezett szám $(n+1)$ -sek megszámlálhatóan vannak. Az algebra alaptétele értelmében, minden n -ed fokú polinómnak legfeljebb n valós gyöke lehet, ezért az n -ed fokú egész együtthatós polinómnak gyökei is legfeljebb megszámlálhatóan sokan vannak. Áttérve az összes egész együtthatós polinómra azt használjuk, hogy megszámlálhatóan sok, megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Érdekes tulajdonsága az irracionális számoknak a következő:

Tétel Bármely i irracionális számhoz van olyan $\frac{p}{q}$ racionális szám, hogy

$$\left| i - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Biz. Tekintsük az $\{i\}, \{2i\}, \{3i\}, \dots, \{ni\}$ számokat, ahol $\{ \}$ itt a törtrész függvényt jelöli és n rögzített pozitív egész. E számok beleesnek valamely $(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ intervallumba, ahol $n = 1, 2, \dots, n$. Tehát, $n+1$ szám beleesik n intervallumba, azaz valamelyik intervallum legalább 2 számot tartalmaz - a "skatulya-elv" értelmében. Így léteznek olyan $0 \leq k < m \leq n$ egészek, amelyekre $|\{mi\} - \{ki\}| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q_n}$, amiből következik $\left| i - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$.

q.e.d.

Megjegyezzük, hogy könnyű belátni, hogy nem csak 1, hanem végtelen sok a tétel-beli tulajdonságú $\frac{p}{q}$ szám is létezik.

E gy A halmaz részhalmazainak H_γ , $\gamma \in \Gamma$ rendszere *tartalmazkodó*, ha bármely $\gamma_1 \neq \gamma_2$ -re $H_{\gamma_1} \subseteq H_{\gamma_2}$, vagy $H_{\gamma_1} \supseteq H_{\gamma_2}$. teljesül Megszámlálhatóan

végteles halmazrendszerek, azaz $H_i, i = 1, 2, 3, \dots$ esetén a halmazrendszer vagy $H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq \dots$ vagy $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \dots$ alakú.

Nilvánvaló, hogy például a természetes számoknak létezik megszámlálható, tartalmazkodó halmazrendszere. Ilyen például a $H_1 = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ rendszer. Látszólag ennél "finomabb" tartalmazkodó rendszer nem létezik, azaz azt sejtjük, hogy nem lehet például kontinuum számosságú ilyen rendszer. A következő tétel azonban ennek ellenkezőjét állítja. Ez ugyan nem a valós számok tulajdonsága, de a valósak viselkedésének egy következménye:

Tétel A természetes számoknak létezik kontinuum számosságú tartalmazkodó halmazrendszere.

Biz: A rendszert két tény birtokában definiálhatjuk. Az egyik tény az, hogy az irracionális (a nem racionális) számok kontinuum sokan vannak. A másik tény pedig az, hogy a racionális számok megszámlálhatóan sokan vannak. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk csak pozitív számokra. Legyen f a természetes számokat a pozitív racionálisok halmazába képező egy-egy értelmű leképezés (ilyen létezik). Legyen γ egy rögzített pozitív irracionális szám. Definálja a természetes számok H_γ részhalmazát a következő

$$H_\gamma := \{n : fn < \gamma\}$$

H_γ egy kontinuum számosságú halmazrendszer és különböző γ -kra különbözők a tagjai. Továbbá, nyilván tartalmazkodó, hiszen bármely $\gamma_1 < \gamma_2$ -re $H_{\gamma_1} \subseteq H_{\gamma_2}$.

q.e.d.

Megjegyzés: A fenti példa arra hívja fel a figyelmet, hogy a végtelen halmazok már sok tekintetben nem viselkednek olyan szemléletesen, mint a véges halmazok, például természetes számok halmazáról kissé leegyszerűsített a képünk. A példa mutatja, hogy végtelen halmazokban már szimulálhatjuk a limesz, vagy a torlódási pont fogalmakat.

A valós számok többféleképpen bővíthetők. Két nevezetes bővítés a komplex számok struktúrája, illetve a nem-standard számok struktúrája. Azonban mindkét bővítés olyan, hogy elveszítjük a sup tulajdonságot. Azaz például igaz, hogy a komplex számokon nem létezik olyan rendezés, hogy az így rendezett komplex számok kielégítsék a sup tulajdonságot. A komplex számoknál ugyancsak elveszítjük a valósak lineárisan rendezettségét, azaz a valósak lineáris rendezettsége nem terjed ki a komplex számokra. A nem-standard számok esetén szintén elveszítjük a sup tulajdonságot.

Feladatok

: - Igazolja, hogy valós számok esetén a sup tulajdonság ekvivalens a teljességgel (zárt a határérték képzésre)

- Adja meg a természetes számoknak kontinuum sok olyan részhalmazát, hogy bármely kettő metszete véges legyen (ötlet: a racionális konvergens sorozatok átjátszása)

- Igazolja, hogy az e szám irracionális (felhasználva e sorfejtéses alakját $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ és indirekt)

- Igazolja, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ az irracionális
- Rekurzív megadott sorozatok!!!! Például: $a_0 = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ és $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$

8.4 Komplex számok

A valós számok körében nem értelmezhető korlátlanul az n -dik gyökvonás (például $\sqrt{-1}$ nem értelmezett). Ennek a feloldása vezet a komplex számok fogalmához.

A komplex számok olyan $a + b \cdot j$ alakú formális algebrai kifejezéseknek tekinthetők, amelyekkel ugyanúgy számolhatunk, mint a valós számokkal, figyelembe véve azt, hogy a j úgynevezett imaginárius egység $\sqrt{-1}$ -t jelöli, azaz $j^2 = -1$.

Szemléletesen az $a + b \cdot j$ komplex számok kétdimenziós vektoroknak foghatók fel, ahol az egyik bázis egység vektor a valós 1 szám, a másik bázis egység vektor pedig az imaginárius j szám. Az analógia a síkvektorokkal azonban csak addig működik, ameddig összeadásról beszélünk, a szorzást tekintve a két fogalom szétválik. A komplex számok tárgyalását nem kívánjuk részletezni.

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK:

1. Miért bővítjük az egész számok körét?
2. Miért bővítjük a racionális számok körét?
3. Miért bővítjük a valós számok körét?
4. Bővíthetők-e a komplex számok hiper (vagy nem-standard) komplex számokkal?
5. Elegendő-e a természetes számok axiomatikus bevezetéséhez csupán a (Peano) axiómák felírása?
6. Elegendő-e a valós számok axiomatikus bevezetéséhez csupán a valós axiómák felírása?
7. Melyik a másodrendű Peano axióma?
8. Melyik a másodrendű valós axióma? Milyen ekvivalensét ismeri?
9. Lehetséges-e elsőrendben axiomatizálni a természetes számokat? (??)
10. Lehetséges-e elsőrendben axiomatizálni a valós számokat? (??)
11. Hány tagja lehet (mi a számossága) egy tartalmazkodó láncnak a természetes számokon? ITT??
12. Egyértelműen tudunk-e felírni minden valós számot végtelen tizedes tört alakban?
13. Melyek a racionális számok végtelen tizedes törtjei?
14. Kiterjeszthető-e a valós számok lineáris rendezése a komplex számokra?

8.5 Nem-standard valós számok

A valós analízisben, a határérték számításánál, gyakran szükség van a $+\infty$ és $-\infty$ fogalmak bevezetésére. Bizonyos tekintetben e fogalmak úgy viselkednek, mint a "számok". Alapvető szerephez jutottak ezek a fogalmak, és különösen reciprokuk, az $\frac{1}{+\infty}$ és $\frac{1}{-\infty}$, azaz az úgynevezett "infinitézimálisok" már a határérték-számítás felfedezésénél, amikor Newton és Leibniz még intuitív értelemben

használták őket. Csak a 20. sz. második felében született meg az az elmélet Abraham Robinson-nak köszönhetően, amelyik kiterjesztette a valós szám fogalmát "végtelen nagy" és a "végtelen kicsiny" valós számokra. Ahhoz képest, hogy az elmélet megszületése a klasszikus határérték számítás megszületését követően évszázadokat váratott magára, bevezetése igen természetes és egyszerű - különösen a valós számok fenti bevezetését tekintve.

8.5.1 1 valószínűséggel

Az elmélet meglepő vonása, hogy megjelenik a *sztochasztika* a számfogalom fejlődésénél (és így a felhasznált halmazelméletben, algebrában, logikában). Ugyan a terminológiában ez elkerülhető, de mi fontosnak tartjuk a sztochasztikus vonatkozást hangsúlyozni.

A matematikában gyakori, hogy vizsgáljuk, hogy egy-egy a természetes számokon értelmezett R tulajdonság teljesül-e az összes természetes számra (például teljes indukcióval). Azaz, vizsgáljuk, hogy igaz-e a $\forall x R x$ állítás az ω -n. Felvehető az, hogy mikor következik be az, hogy egy R tulajdonság legalább "nagy valószínűséggel" teljesül ω -n, azaz véletlenül választva egy n természetes számot, Rn nagy valószínűséggel igaz.

Tegyük fel, hogy p az ω részhalmazaihoz rendel 0 vagy 1 valós értékeket.

Definíció p egy 0 – 1 valószínűségi mérték, röviden 0 – 1 valószínűség ω -n, ha minden $A, B \subset \omega$ -ra

- (i) $p(\omega) = 1$
- (ii) ha $p(A) = 1$ és $p(B) = 1$, akkor $p(A \cap B) = 1$
- (iii) ha $p(A) = 1$ és $A \subset B$, akkor $p(B) = 1$
- (iv) $p(A) = 1$ vagy $p(\bar{A}) = 1$

Esetek: $P(A) = P(B) = 1$ nem lehet, mert akkor (ii) miatt $p(A \cap B) = 1$ lenne. Ha az egyik 1 amásik 0, akkor $A \subset A \cup B$ és (iii) miatt $p(A \cup B) = 1$. Ha mindkettő 0, akkor $P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = 1$, akkor (ii) miatt $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$, tehát $p(A \cup B) = 0$ VÉGE

Rögzítve tehát egy p valószínűségi mértéket ω -n, a fenti kérdés úgy fogalmazható, hogy $p\{n : Rn \text{ igaz}\} = 1$ teljesül-e. Ha teljesül, akkor azt mondjuk, hogy R teljesül 1 valószínűséggel, vagy azt mondjuk, hogy R "majdnem mindenütt" teljesül, rövidítve, R m.m. teljesül.

Vegyük észre, hogy az 1 valószínűségű halmazok $\mathcal{F}$ rendszere rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- (i) $\omega \in \mathcal{F}$
- (ii) ha $A \in \mathcal{F}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{F}$
- (iii) ha $A \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$, akkor $B \in \mathcal{F}$
- (iv) minden $A \subset \omega$ -ra $A \in \mathcal{F}$ vagy $B \in \mathcal{F}$ teljesül

Definíció ω fenti (i)-(iii) tulajdonságai halmazrendszereit ω -n értelmezett *filtereknek* nevezzük. Ha egy filter kielégíti (iv)-t is akkor *ultrafilternek* nevezzük.

Megmutatható, hogy az is igaz, hogy minden ω -n értelmezett *ultrafilterhez* tartozik egy ω -n értelmezett $p \in [0, 1]$ valószínűség, azaz, kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat az ω -n értelmezett $[0, 1]$ valószínűségek és az ω -n értelmezett ultrafilterek között. A filter, ultrafilter fogalmak lényeges fogalmai az algebrának, halmazelméletnek topológiának. Általában úgy interpretálják őket, mint egy halmaz "nagy" részhalmazainak összessége. Megjegyezzük, hogy logikában az ultrafiltereknek "logikai elméletek" felelnek meg, erre ALGLOG -ban visszatérünk.

PÉLDA

Legyen $M \in \omega$ rögzített természetes szám. Legyenek az 1 valószínűségű halmazok ω -nak pontosan az M -t tartalmazó részhalmazai. Igazolható, hogy ez $[0, 1]$ valószínűséget definiál ω -n. A megfelelő ultrafiltert *principális* (vagy "fő"-) *ultrafilternek* nevezzük:

Definíció Az $\{B : a \in B, B \subset \omega, a \in \omega\}$ alakú ultrafiltereket, azaz, egy rögzített $a \in \omega$ elemet tartalmazó részhalmazok összességét, principális ultrafiltereknek nevezzük.

Tétel Nemprincipális ultrafilter nem tartalmazhat véges halmazt

Biz: Vegyük észre, hogy ha $\mathcal{F}$ egy tetszőleges ultrafilter és $A \cup B \in \mathcal{F}$, akkor $A \in \mathcal{F}$ vagy $B \in \mathcal{F}$. Ugyanis, ha ez nem teljesülne, azaz $\overline{A} \in \mathcal{F}$ és $\overline{B} \in \mathcal{F}$, akkor (ii) miatt $\overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$, azaz $\overline{A \cup B} \in \mathcal{F}$ teljesülne

Ha $\mathcal{F}$ nemprincipális és tartalmazna egy véges, például n elemű halmazt, akkor az előbbi tulajdonság értelmében tartalmazna $n - 1$ elemű halmazt is. Indukciót alkalmazva kapjuk, hogy $\mathcal{F}$ tartalmazna 1 elemű halmazt is, tehát $\mathcal{F}$ principális lenne.

q.e.d.

Következmény: a nemprincipális ultrafilterek tartalmazzák a kofinit halmazokat.

Ha például (a_n) egy konvergens sorozat A határértékkel, akkor ismert, hogy az $\{n : |A - a_n| < \varepsilon\}$ halmaz kofinit.

A következőkben rögzítettnek tekintünk egy ω -n értelmezett és nem- principális ultrafilterhez tartozó p valószínűséget, vagy úgy is tekinthetjük, hogy rögzítünk ω -n egy nem-principális ultrafiltert.

Fontos szerepe lesz annak, hogy az ultrafilter nemprincipális. Így a tanult elmélet valahol lényegesen a "végtelen halmazokról szól", hiszen ω végtelen, valamint az 1 valószínűségű halmazok, azaz a nemprincipális ultrafilter tagjai is végtelenek. Ha ω -t egy véges halmazzal helyettesítenénk, vagy nem kívánnánk meg a nemprincipális feltételt az ultrafiltertől, akkor az elmélet semmitmondóvá válna.

Megjegyezzük, hogy magának a nemprincipális ultrafilternek a létezése sem nyilvánvaló ω -n!

Tétel Létezik ω -n nemprincipális ultrafilter.

Biz. A bizonyításhoz a Zorn lemmát kell használni.

Tehát, tekintsük ω kofinit halmazait. Vegyük észre, hogy a kofinit halmazok rendelkeznek az úgynevezett *véges metszet tulajdonsággal*, azaz, azzal a tulajdonsággal, hogy bármely véges sok kofinit halmaz metszete nem üres. Hiszen ha üres lenne, akkor ellentmondásba kerülnénk azzal, hogy az alaphalmaz ω végtelen.

Azt állítjuk, hogy a következő $\mathcal{G}$ -beli halmazok filtert alkotnak:

$\mathcal{G} = \{A : A \supseteq B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \text{ valamely } B_1, B_2, \dots B_n \text{ kofinit halmazokra}\}$

Könnyen ellenőrizhetjük a filtert definiáló (i)-(iii) tulajdonságokat. Megje-

gyezzük, hogy $\mathcal{G}$ -t a kofinit halmazok, mint halmazrendszer által generált filternek nevezzük.

Ezután megmutatjuk, hogy létezik $\mathcal{G}$ -t tartalmazó nemprincipális ultrafilter. Most alkalmazzuk a Zorn lemmát.

Ehhez szükség van egy olyan részben rendezett összességre, amelyben a lineárisan rendezett részhalmazoknak van felső korlátja.

Legyen ez az összesség a $\mathcal{G}$ filtert tartalmazó filterek összessége, a rendezés pedig a $\subseteq$ tartalmazás reláció. Ha $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{K}_m$ ilyen filterek egy lineárisan rendezett összessége, akkor könnyen látható, hogy ezeknek felső ko-

rlátja a $\subseteq$ tartalmazásra nézve az $\bigcup_{j=1}^m \mathcal{K}_j$ halmazrendszer. Ugyanis könnyen

ellenőrizhetők az (i)-(iii) filter tulajdonságok és látszik, hogy $\bigcup_{j=1}^m \mathcal{K}_j \in \mathcal{G}$.

A Zorn lemma értelmében tehát létezik $\mathcal{G}$ -ben egy $\mathcal{M}$ maximális filter. Ez ultrafilter is, mert ha létezne olyan $C \subset \omega$, hogy sem C sem $\bar{C}$ nem eleme $\mathcal{M}$ -nek, akkor valamelyikkel bővíthető lenne $\mathcal{M}$, ellentmondásban $\mathcal{M}$ maximalitásával.

Továbbá, $\mathcal{M}$ nemprincipális, mert minden $i \in \omega$ -ra $\omega - \{i\} \in \mathcal{M}$ a kofinités miatt, így az ultrafilter tulajdonság miatt $\{i\} \notin \mathcal{M}$.

q.e.d.

8.5.2 Nem-standard valós számok és struktúrájuk

Tekintsük a valós számsorozatok halmazát. Az (r_n) és (q_n) valós számsorozatok akkor tekintjük ekvivalensnek, ha $r_n = q_n$ m.m., ezt jelölje $(r_n) \approx (q_n)$.

$\approx$ nyilván egy ekvivalencia reláció. Az osztályai által definiált számokat, nevezzük nem-standard valós számoknak, jelölje az összességüket *R . "Nem-standard" szám tehát lehet egy szokásos (azaz standard) valós szám, vagy egy új típusú szám. Ha a "nem-standard" számot a "nem standard" értelemben használjuk, akkor ezt külön hangsúlyozzuk.

A régi valós r számoknak olyan osztályok felelnek meg, amelyek tartalmazzák az (r) konstans sorozatot. Egy ilyen sorozattal nyilván ekvivalens egy olyan (r'_n) valós számsorozat, amelynek tagjai véges sok kivétellel megegyeznek r -rel. Nem ekvivalensek viszont (r) -el az $1, 2, 3, \dots$ vagy az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ sorozatok, hiszen a feltételezett ultrafilter nemprincipális. Elmondhatjuk tehát, hogy az új számfogalom bővítése a réginek.

Nem-standard valós számok struktúrája:

${}^*(r_n) < {}^*(q_n)$ teljesüljön ha $r_n < q_n$ m.m.

Igazolható, hogy a definíció nem függ a reprezentáns sorozat választásától. Speciális esete az, ha (q_n) egy konstans sorozat
 $(r_n) < (q)$ teljesüljön ha $r_n < q$ m.m.

A műveletek definíciói:

${}^*(r_n) + {}^*(q_n)$ legyen ${}^*(r_n + q_n)$

${}^*(r_n) \cdot {}^*(q_n)$ legyen ${}^*(r_n \cdot q_n)$

$- {}^*(r_n)$ legyen ${}^*(-r_n)$

Szintén igazolható, hogy a definíciók nem függenek a reprezentáns sorozatok választásától.

Az is megmutatható, hogy a fentiek kiterjesztései a megfelelő valós műveletek és a $<$ definíciójának.

Definiáltuk tehát a nem-standard valós számok

${}^*\mathcal{R} = \langle {}^*R, <, +, \cdot, -, \cdot 0, \cdot 1 \rangle$

nem-standard struktúráját. A $*$ jelet a műveletek és relációk jelöléseiből általában el szoktuk hagyni.

Látni fogjuk, hogy

A nem-standard számok is rendezett testet alkotnak a különböző valószínűségekkel nyert struktúrák izomorfak.

Fontos, hogy a definiált rendezett test nem függ az ω -án kiindulásul választott $0 - 1$ valószínűségtől, azaz az ω -án választott nemprincipális ultrafiltertől.

Ezt nem bizonyítjuk, de megjegyezzük, hogy ennek igazolásához, kissé meglepő módon, *fel kell használni a kontinuum hipotézist!*

8.5.3 Valódi bővítés

Megválaszolandó az a kérdés, hogy a létrehozott struktúra valóban bővítése-e a valós számoknak és "számoknak" tekinthetők-e a végtelenek, illetve ezek reciprokai? Ennek megválaszolásához bevezetünk néhány definíciót.

Jelölje R a valós számok és N a természetes számok szokásos halmazát és $<$ jelölje $*$ $<$ -t. "Számokon" az alábbiakban

Definíció. Egy pozitív a szám *véges*, ha van olyan $0 < r \in R$ szám, hogy $a < r$. Egy pozitív a egy *végtelen nagy* szám, ha nem pozitív véges.

Hasonlóan definiálható a *negatív véges szám*, a *negatív végtelen szám*, illetve, a véges szám és a végtelen szám fogalma.

Igazolható, hogy egy pozitív a szám *végtelen*, ha $n < a$ bármely $n \in N$ -re (*1)

Definíció Egy pozitív a szám *infinitezimális* (vagy végtelen kicsiny), ha $0 < a < r$ bármely $0 < r \in R$ -re. A 0-t szintén infinitizemilásnak tekintjük, az egyetlen szokásos valós infinitezimálisnak.

Hasonlóan definiálható a *negatív infinitezimális*, illetve, az abszolút érték segítségével, maga az *infinitezimális* fogalma.

Igazolható, hogy egy pozitív a szám *infinitezimális*, ha $0 < a < \frac{1}{n}$ bármely $n \in N$ -re. (*2)

Tétel

(i) Ha egy hagyományos valós számsorozat $+\infty$ -hez "konvergál" a szokásos értelemben, $(r_n) \rightarrow +\infty$, akkor (r_n) egy pozitív végtelen számot határoz meg.

(ii) Ha egy hagyományos pozitív valós (r_n) számsorozat 0-hoz konvergál a szokásos értelemben, akkor (r_n) egy pozitív infinitezimális határoz meg.

Bizonyítás (i) $(r_n) \rightarrow +\infty$ ugyanis definíció szerint azt jelenti, hogy bármely $K \in N$ -hez van olyan $M \in N$ küszöbindex, hogy $K < r_n$ ha $M < n$, azaz $K < r_n$ véges kivétellel, ami, definíció szerint $(K) < (r_n)$ -t, azaz $K < (r_n)$ -t jelenti tetszőleges K -ra.

(ii) $(r_n) \rightarrow 0$ -ból következik, hogy bármely $K \in N$ -hez létezik $M \in N$ küszöbindex úgy, hogy $0 < r_n < \frac{1}{K}$, ha $M < n$. Ezt azt jelenti, hogy

$r_n < \frac{1}{K}$ véges sok kivétellel, azaz $(r_n) < (\frac{1}{K})$ bármely $K \in N$ -re. Ez viszont éppen $(*2)$ -t jelenti.

A tétel általánosítható negatív sorozatokra, illetve tetszőleges 0-hoz tartó sorozatokra is. Sejtethető, hogy nem csak egyetlen végtelen, vagy csak egyetlen infinitezimális szám létezik (hanem végtelen sok), továbbá a végtelen számok "reciprokai" infinitezimálisok és fordítva - erre a következő pontokban térünk ki.

Nincs legkisebb végtelen pozitív M szám, mert ha M végtelen, akkor $M - 1$ is végtelen. Hasonló okokból nincsen legkisebb pozitív i infinitezimális, mert ha i infinitezimális, akkor például $\frac{i}{2}$ is az.

Bővítés a kompaktsági tétel segítségével

8.5.4 További, valósokon értelmezett relációk és függvények kiterjesztései

Az előző pontbeli módszerekkel bármely a valós számok szokásos struktúráján értelmezett reláció, vagy függvény kiterjeszthető $*\mathcal{R}$ -ra.

Ha Q például egy egyváltozós reláció, akkor így

$Q(r_n)$ teljesüljön ha Qr_n teljesül m.m.

A kiterjesztett Q relációt $*Q$ -gal jelölhetjük.

Ha f egy egyváltozós valós függvény, akkor $f(r_n)$ legyen az (fr_n) érték.

A kiterjesztett f függvényt $*f$ -gal jelölhetjük. Ha félreértés nem lehetséges, akkor gyakran elhagyjuk a $*$ -t.

Ilyen valós f függvény lehet areciprok, a sinus, a logaritmus, az exponenciális függvény, az abszolút érték, stb.

Megállapíthatjuk, hogy ha feltételezzük, hogy a valós számok struktúráját a konkrét $R_1 R_2, \dots R_k$ relációkkal és az $f_1 f_2, \dots f_m$ függvényekkel látjuk el, akkor az

$$\mathcal{R}' = \langle R, <, R_1 R_2, \dots R_k, +, \cdot, -, 0, 1, f_1 f_2, \dots f_m \rangle$$

struktúrájának a

$$*(\mathcal{R}')^* = \langle *R, * <, *R_1, *R_2, \dots *R_k, * +, * \cdot, * -, * 0, * 1, *f_1, *f_2, \dots *f_m \rangle$$

struktúra kiterjesztése.

Jelölje $\mathcal{L}$ azt a nyelvet, amelyet a valósak nyelvéből az $R_1 R_2, \dots R_k$ relációknak megfelelő reláció jelekkel és az $f_1 f_2, \dots f_m$ függvényeknek megfelelő függvény jelekkel történő bővítéssel kapunk.

PÉLDÁK Nevezetes kiterjesztésekre:

ha egy (r_n) sorozat elemei

- természetes számok, véges sok kivétellel, akkor $(r_n) \in {}^*N$
- racionális számok, véges sok kivétellel, akkor $(r_n) \in {}^*Q$
- prímszámok véges sok kivétellel, akkor $(r_n) \in {}^*P$, ahol P jelöli a szokásos prímszámok halmazát $(r_n) \in {}^*Q$. Tehát *P alkotja a nem-standard prímszámokat, közöttük a végtelen prímszámokkal

Megjegyzés: ez az utóbbi észrevétel, a számelméletben egy új szemléletet hozott.

Vigyázzunk, a fentiek csak elégséges feltételek a transzformált halmazhoz tartozásra!

8.5.5 A kiterjesztés tulajdonságai

Tehát maga az ${}^*(\mathcal{R}')$ struktúra kiterjesztése az $\mathcal{R}'$ struktúrának (úgynevezett szuper struktúrája). Kérdés, hogy az $\mathcal{R}'$ struktúra milyen tulajdonságai öröklődnek ${}^*(\mathcal{R}')$ -ra. Erre a nevezetes válasz, hogy az eredeti struktúra *elsőrendű tulajdonságai*, azaz, a struktúra elsőrendű $\mathcal{L}$ nyelvén megfogalmazható tulajdonságai, öröklődnek. Ezt fogalmazza meg a következő Los-tól eredő tétel:

Tétel Legyen α az $\mathcal{L}$ nyelv egy zárt formulája. Ekkor α igaz az $\mathcal{R}'$ struktúrán akkor és csak akkor ha α igaz a kiterjesztett ${}^*(\mathcal{R}')$ struktúrán.

A tételt nem bizonyítjuk. Ezt a tételt *transzfer elvnek* (vagy permanencia elvnek) hívjuk. A tétel mutatja, hogy a nem-standard számok elméletében

nagy szerep jut az formális nyelv (nevezetesen itt az elsőrendű nyelv) fogalmának

Az $\mathcal{L}$ nyelv definiálja, hogy mely tulajdonságok öröklődnek az új struktúrára. Látni fogjuk, hogy másodrendű állításokra a tétel már nem igaz! A bizonyítás egy nevezetes konstrukciót használ, az *ultrahatvány* konstrukciót. A tételt nem bizonyítjuk. *A tételnek következménye, hogy a nem-standard számok struktúrája szintén rendezett test.*

Jelölés! Szokásos az $\mathcal{L}$ nyelv formuláit úgy képezni, hogy az atomi formulák helyébe $\mathcal{R}'$ -beli konkrét relációk és függvények jelöléseit írjuk. Ebben az esetben a transzfernél ezeket a konkrét relációkat és függvényeket bal felső csillagozni szoktuk.

Továbbá, célszerű lesz *korlátozott kvantorokat* használni. Azaz a $\forall x(x \in A \rightarrow \alpha)$ formula helyett a rövidített $\forall x \in A(\alpha)$ formulát és a $\exists x(x \in A \wedge \alpha)$ formula helyett a rövidített $\exists x \in A(\alpha)$ formulát.

Az alábbi példáknál már használjuk ezeket a konvenciókat.

Definíció A valós számok egy H részhalmazán értelmezett Q bináris reláció *konkurrens*, vagy *végesen kielégíthető*, ha ha bármely véges sok $a_1, a_2, \dots, a_n \in H$ valósakhoz van olyan $b \in H$ szám, hogy $Qa_i b$ igaz, ha $1 \leq i \leq n$.

PÉLDÁK:

Konkurrens reláció például

- a valósakon értelmezett $<$ reláció, hiszen bármely $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ valósakra van $b \in R$, hogy $a_i < b$ ha $1 \leq i \leq n$.

- az R^+ pozitív valósakon értelmezett $>$ reláció, hiszen bármely $a_1, a_2, \dots, a_n \in R^+$ valósakra van $b \in R^+$, hogy $a_i > b$ ha $1 \leq i \leq n$.

Tétel Ha Q egy konkurrens $H \subset R$ -n értelmezett reláció, akkor van olyan ${}^*b \in {}^*R$ nem-standard szám, hogy ${}^*Q({}^*a)({}^*b)$ fennáll minden $a \in H$ -ra.

A tételt nem bizonyítjuk.

A tétel következményeként, a fenti $<$ konkurrens reláció esetén azt kapjuk, hogy létezik végtelen szám, a $>$ konkurrens reláció esetén azt kapjuk, hogy létezik pozitív infinitézimális szám.

Következmény. Ha R részhalmazainak egy $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ rendszere olyan, hogy közülük bármely véges sok metszete nem üres, akkor van olyan ${}^*b \in {}^*R$ elem, hogy ${}^*b \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} {}^*A_\gamma$

Az állítást úgy kapjuk, hogy a konkurrencia fogalmát kissé általánosítjuk, ezt nem részletezzük. A végtelen szám és az infinitézimális létezését ebből is megkapjuk. Például ha $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ -nak a $(0, r)$ intervallumokat választjuk, akkor azt kapjuk, hogy az intervallumok $(0, {}^*r)$ rendszere tartalmaz nem-standard valós számot, azaz, infinitézimális számot.

PÉLDÁK a transzfer elv alkalmazására

Mely formuláknál alkalmazhatjuk a transzfer elvet?

1. $\forall x \exists m(x < m \wedge m \in N)$. Ez a tulajdonság $\mathcal{R}$ -n nyilvánvalóan igaz.

Korlátozott kvantorokat használva így is írhatjuk: $\forall x \in R \exists m \in N(x < m)$

A formula így transzformálódik * -nál:

$\forall x \in {}^*R \exists m \in {}^*N(x < m)$.

Tehát a transzfer elv értelmében ez a formula igaz *R -on. Azonban közvetlenül is ellenőrizhetjük, hogy igaz.

Vegyük észre, hogy ha N -t nem transzformáljuk, akkor a $\forall x \in {}^*R \exists m \in N(x < m)$ formula már hamis! Ellenpélda az $x = (1, 2, 3, 4, \dots)$ szám!

2. A racionális számok sűrűn vannak a valós számok között.

$$\forall x \in R \forall y \in R (x < y \rightarrow \exists z \in Q (x < z < y))$$

Transzformáltja:

$$\forall x \in {}^*R \forall y \in {}^*R (x < y \rightarrow \exists z \in {}^*Q (x < z < y))$$

Tehát ez is igaz a transzformált *Q racionális számokra.

3. Két rögzített szomszédos természetes szám között (n és $n + 1$) nincs harmadik természetes szám:

$$\forall x \in N (n \leq x \leq n + 1 \rightarrow x = n \vee x = n + 1)$$

Transzformáltja:

$$\forall x \in {}^*N ({}^*n \leq x \leq {}^*(n + 1) \rightarrow x = {}^*n \vee x = {}^*(n + 1))$$

De ${}^*n = n$ és ${}^*(n + 1) = n + 1$, ezért a tulajdonság érvényben marad a nem-standard természetesekre, ugyanazon n és $n + 1$ -re.

4. A test axiómák teljesülését is a transzfer elv segítségével igazolhatjuk. Ilyenek például a kommutativitás:

$$\forall x \in {}^*R \forall y \in {}^*R (x + y = y + x) \text{ átvitele}$$

$$\forall x \in R \forall y \in R (x + y = y + x)$$

vagy a trichotómia:

$$\forall x \in R \forall y \in R (x < y \vee x = y \vee y < x). \text{átvitele}$$

$$\forall x \in {}^*R \forall y \in {}^*R (x < y \vee x = y \vee y < x)$$

De igazolhatjuk transzferrel azt is, hogy minden nem-nulla elemre létezik multiplikatív inverz:

$$\forall x \in R (x \neq 0 \rightarrow \exists y \in R (x \cdot y = 1)), \text{ tehát}$$

$$\forall x \in {}^*R (x \neq 0 \rightarrow \exists y \in {}^*R (x \cdot y = 1))$$

5. Kiterjeszthetjük az elemi függvényeket, például a logaritmust és az ezekre vonatkozó azonosságokat, pl ezt:

$$\forall x \in R^+ \forall y \in R^+ (\log (x \cdot y) = \log x + \log y), \text{ így}$$

$\forall x \in {}^*R^+ \forall y \in {}^*R^+ (\log (x \cdot y) = \log x + \log y)$, itt a $\log {}^*\log$ -al is jelölhető lenne.

A nem-standard számok rendezett testet alkotnak. De a valós számok másodrendű tulajdonságai viszont nem feltétlenül öröklődnek.

PÉLDA

Tekintsük a korlátos valós számhalmazok supremum tulajdonságát, azaz azt a tulajdonságot, hogy bármely felülről korlátos valós számhalmaznak létezik legkisebb felső korlátja:

Jelölje Fz azt, hogy z a P tulajdonságú elemek halmazának felső korlátja, azaz

$$Fz := \forall y (Py \rightarrow y < z).$$

Ekkor a szóban forgó tulajdonság:

$$\forall P [\exists z Fz \rightarrow (\exists x (Fx \wedge (\forall u Fu \rightarrow x \leq u)))]$$

Itt relációt kvantálunk, tehát a formula másodrendű. A formula transzformáltja azt állítja, hogy $*R$ bármely korlátos részhalmazának van legkisebb felső korlátja. Tekintsük a véges számok halmazát, ez korlátos és bármely végtelen szám felső korlátja. Igazolható viszont, hogy a végtelen számok között nincs legkisebb (hiszen ha y végtelen szám, akkor $y - 1$ is végtelen szám).

Megjegyezzük, hogy a % tétel a következőképpen általánosítható:

Tétel Ha α 1 szabad változós formula, akkor

$\alpha(r_n)$ igaz $*(\mathcal{R}')$ -on akkor és csak akkor ha $\alpha(r_n)$ m.m. n -re igaz.

Ez a tétel azt állítja, hogy a struktúra kiterjesztésének definíciója (lásd) alkalmazható az összetett formulákra is.

8.5.6 $\mathcal{R}^*$ szerkezetéről

Tekintsük a véges nem-standard számokon a következő ekvivalencia relációt:

$r \simeq s$ akkor és csak akkor, ha $r - s$ infinitezimális

Könnyű ellenőrizni, hogy valóban ekvivalencia relációt definiáltunk. Ez azt jelenti, hogy egy partíciót definiáltunk a véges valósakon. A partíció tagjait monádoknak nevezzük.

Tétel (felbontási tétel) Minden véges nem-standard szám egyértelműen előáll egy véges valós és egy infinitezimális szám összegeként.

Biz: A felbontáshoz elég azt igazolni, hogy minden véges h nem-standard számhoz van olyan r valós szám, hogy $h - r$ infinitezimális. Ugyanis jelölje ez utóbbit i , ekkor $h - r = i$ -ből következik $h = r + i$. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $h > 0$. Tekintsük a következő $A = \{v : v < h \text{ és } v \text{ valós}\}$. h véges, ezért van olyan k valós szám, hogy $h < k$. Ezért az A halmaz egy korlátos valós számhalmaz. Így A -nak van valós szuprémuma, jelölje ezt c . Azt állítjuk, hogy c infinitezimális közel van h -hoz, azaz $h - c$ infinitezimális. Legyen ε egy tetszőleges rögzített pozitív valós szám.

Elég megmutatni, hogy $|h - c| < \varepsilon$ bármely pozitív ε -ra. $|h - c| < \varepsilon$ ekvivalens azzal, hogy $c - \varepsilon < h < c + \varepsilon$. Egyrészt $h < c + \varepsilon$, mert ha ez nem teljesülne, akkor $c + \varepsilon < h$ esetén, A definícióját és $c < c + \varepsilon$ -t tekintve, c nem lenne A -nak felső korlátja. Másrészt, $c - \varepsilon < h$, mert ha $h < c - \varepsilon$ teljesülne, akkor $h < c - \varepsilon < c$ a $c - \varepsilon$ lenne a legkisebb felső korlát, ellentmondásban a feltétellel.

A $h = r + i$ felbontás egyértelmű, mert ha lenne egy másik $r' + i'$ felbontás is, akkor $r + i = r' + i'$ -t átrendezve azt kapjuk, hogy $r - r' = i - i'$. Itt a bal oldal valós, a jobb oldal pedig infinitezimális. Ez csak úgy lehetséges, ha $i - i'$

a valós infinitezimális, azaz 0. De $i - i' = 0$ -ból, azaz $i = i'$ -ből már $r = r'$ is következik, azaz a felbontás egyértelmű.

qed

Következmény: Minden mónád tartalmaz egy és csak egy hagyományos valós számot.

Tekintsünk egy tetszőleges M mónádot és abban egy nem-standard r számot. Az előző tétel értelmében, létezik egy olyan t valós szám, és i infinitezimális, hogy $r = t + i$. Mivel $r - t$ infinitezimális, r és t egy M -ben vannak. Más valós nem lehet M -ben, mivel két valós eltérése nem lehet nem nulla infinitezimális.

A mónádokat szemléltethetjük a valós síkon, a t valóshoz tartozó mónádot a $x = t$ egyenesen.

Ezután ekvivalencia relációt definiálunk az összes nem-standard számokon $r \simeq s$ akkor és csak akkor, ha $r - s$ végtelen, $r \simeq s$ akkor és csak akkor, ha $r - s$ véges

Az ezen ekvivalencia reláció által definiált partíció tagjait *galaxisoknak* nevezzük. Az összes véges szám egyetlen galaxisba tartozik. Ha r és s végtelen számok, de különbségük nem véges, akkor nyilván különböző galaxisokat határoznak meg. Különösen érdekesek a végtelen egész számok galaxisainak egész tagjai.

8.5.7 Kitekintés

A nem-standard számok elméletét először annak érdekében dolgozták ki a 60-as, 70-es években, hogy matematikai precízséggel rekonstruálják a Newton-Leibniz által bevezetett analízist. Azonban hamar kiderült, hogy az így *alkalmazott módszer* nem csak a klasszikus matematikai analízisre, hanem a matematika szinte minden területére alkalmazható. Például definiálhatunk nem-standard számokat a komplex számokból kiindulva is. Alkalmazható a módszer a

mértékelméletre, a funcionálanalízisre, a topológiára, a halmazelméletre, stb.. Erre is Abraham Robinson mutatott rá először. Az eredeti elméletből egy kiterjedten általánosított elmélet vált, széles irodalommal. Ezt az általánosított elméletet is *Nem-standard analízisnek* hívjuk. Számos olyan eredmény született, amely a klasszikus módszerek használatával addig nem volt elérhető és ha született is ezekre később klasszikus bizonyítás, a nem-standard bizonyítás vált elterjedtté. Az eredeti gondolat általánosításának legfontosabb vonulata az, hogy elsőrendű logikáról, magasabbrendű logikára, sőt azok egyesítésére, a *ttípuslogikára általánosították az elméletet*. Ezen kívül az ultrahatvány technikát is széleskörűen finomították. Ebben a pontban csak arra volt lehetőségünk, hogy a speciális elmélet alapgondolatait ismertessük.

Feladat: A pozitív irracionális és a pozitív racionális számok között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mert minden pozitív irracionálishoz tudunk

rendelni egy nála kisebb pozitív racionálist, és bármely két különböző pozitív irracionálishoz pedig tudunk rendelni náluk kisebb különböző racionálisakat. Ezért a racionális és az irracionális számok számossága megegyezik.

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK:

1. Miért bővítjük az egész számok körét?
2. Miért bővítjük a racionális számok körét?
3. Miért bővítjük a valós számok körét?
4. Bővíthetők-e a komplex számok hiper (vagy nem-standard) komplex számokkal?
5. Elegendő-e a természetes számok axiomatikus bevezetéséhez csupán a (Peano) axiómák felírása?
6. Elegendő-e a valós számok axiomatikus bevezetéséhez csupán a valós axiómák felírása?
7. Melyik a másodrendű Peano axióma?
8. Melyik a másodrendű valós axióma? Milyen ekvivalensét ismeri?
9. Lehetséges-e elsőrendben axiomatizálni a természetes számokat?
10. Lehetséges-e elsőrendben axiomatizálni a valós számokat?
11. Hány tagja lehet (mi a számossága) egy tartalmazkodó láncnak a természetes számokon?
12. Egyértelműen tudunk-e felírni minden valós számot végtelen tizedes tört alakban?
13. Melyek a racionális számok végtelen tizedes törtjei?
14. Kiterjeszthető-e a valós számok lineáris rendezése a komplex számokra?

Helyesek-e a következő állítások? (igen-nem-t lehetne variálni)

1. Végtelen sok infinitezimális szám létezik
2. Bármely pozitív inf.-nál létezik nála kisebb pozitív inf.
3. Bármely két inf. között van egy harmadik.
4. Az inf. számok számossága c
5. Egy hipervalós véges, ha van nála nagyobb valós szám
6. Egy véges hipervalós számhoz található inf közel valós szám
7. A sup tulajdonság igaz a hipervalós számokra is
8. Bármely két végtelen hipervalós különbsége véges.
9. A hipervalósak rendezése lineáris rendezés.
10. Bármely két végtelen szám között van egy harmadik.
11. Van legkisebb pozitív végtelen szám
12. Bármely végtelen számnál van nagyobb.

1. A kofinit halmazok ω -án ultrafiltert alkotnak (nem)
2. A principális ultrafilterek tartalmazzák a véges halmazokat
3. Minden filter egyértelműen terjeszthető ki ultrafilterré
4. Nemprincipális ultrafilterek ω -án tartalmazzák a kofinit halmazokat
5. A kofinit halmazok ω -án filtert alkotnak.