

Házi feladat 3.
11.27. megoldások

1. a) $\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{\emptyset\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{\{1, 2\}, \emptyset\}, \{1, \emptyset\}, \{1, \{1, 2\}, \emptyset\}$
 b) Többször használva az $E - F = E \cap \overline{F}$ összefüggést, egyrészt, $(A - B) - C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$
 másrészt, $(A - C) - (B - C) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} = (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B}$.
 (megj. igazolhatjuk úgy is, hogy a bal oldal része a jobb oldalnak és fordítva)
 c) például azon H halmazok összessége, amelyekre $H = H$

2. a) $F \rightarrow K$
 $K \rightarrow A$
 $F \vee R$
 $R \rightarrow A$
 A

b) Indirekt, tegyük fel, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis:

- $F \rightarrow K = \uparrow$
 $K \rightarrow A = \uparrow$
 $F \vee R = \uparrow$
 $R \rightarrow A = \uparrow$
 $A = \downarrow$

Számozva a lépéseket, premisszánként, használva az igazság táblákat a következőkre jutunk:

- $F \rightarrow K = \uparrow$ (4) ellentmondás
 $K \rightarrow A = \uparrow$ (1) $K = \downarrow$
 $F \vee R = \uparrow$ (3) $F = \uparrow$
 $R \rightarrow A = \uparrow$ (2) $R = \downarrow$

Tehát a következtetés helyes.

(megj. Fontos, hogy a következtetést a definíció alapján vizsgáljuk)

- (c)
 $(\overline{F} \cup K) \cap (\overline{K} \cup A) \cap (F \cup R) \cap (\overline{R} \cup A) \subset A$

3. (a)

	refl.	irrefl.	egyik sem	szimm.	aszimm.	egyik sem
a)	N	I		N	I	
b)	N	N	I	I	N	

(b)

	antiszimm	tranz.	trichotóm
a	I	I	I
b	N	N	N

(megj. a fentiekhez szükséges rövid indoklás is).

4.(a) Nem izomorfak, hiszen $\omega \cdot \eta$ sűrű, míg $\eta \cdot \omega$ nem.

(b) Egyik sem jólrendezett, hiszen maga η sem jólrendezett ($\eta \cdot \omega$ esetén, például ω minden példányából kiválasztva egy számot, az így kapott részhalmaznak nincs legkisebb eleme).

(c) N -nek megszámlálhatóan sok *véges* részhalmaza van, hiszen rögzített n -re, $\aleph_0^n = \aleph_0$ miatt, megszámlálhatóan sok n elemű részhalmaza van. $2^{\aleph_0} = c$ miatt N -nek összesen kontinuum sok részhalmaza van. Ha kontinuumból elveszünk megszámlálhatót, akkor még mindig kontinuum sok marad, ezért N végtelen részhalmazainak összessége kontinuum számosságú.

5. a) $\neg \exists x \exists y (Sxy \wedge \neg \exists z Syz)$

b) $\forall x (SMx \rightarrow Sxx)$

c) A formula elsőrendű, mert nincs kvantálva függvény, vagy reláció. Lehetséges jelentése: $f(x)$ -nek a -ban lokális maximuma van.

6. Indirekt. Tegyük fel, hogy van olyan nemüres $A \subset N$ amelynek nincs legkisebb eleme. Tekintsük A alsó korlátainak halmazát B -t. Ennek nem lehet legnagyobb eleme, mert ha m ilyen lenne, akkor $m+1$ lenne A legkisebb eleme. B tehát nem korlátos, ezért van benne $a_n \rightarrow +\infty$ sorozat. Ez viszont azt jelenti, hogy A üres, ellentmondásban a feltétellel.