Matematika alapjai
2019. 12. 21.

1.
a) Sorolja fel a következő halmaz elemeit:
$\mathcal{P}\{\{\emptyset, \{\emptyset, 2\}\}, \{\{1, 2\}, \emptyset\}\}$, ahol $\mathcal{P}$ hatványhalmaz képzést jelent.
b) Igazolja a következőt:
$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
c) Egység oldalú, diszjunkt kockákkal töltjük ki a teret. Hány darab (milyen számosságú) kocka szükséges ehhez? Állítását bizonyítsa!

2. "Dékáni *utóvizsgára* akkor és csak akkor kerülhet sor, ha *betegek voltunk*, vagy van dékáni *engedélyünk*. Dékáni engedélyt csak akkor kapunk, ha betegek voltunk vagy, *haláleset fordult elő* a családban. Tehát, ha senki sem halt meg a családban és van dékáni engedélyünk, akkor betegek voltunk." (U, B, E, H)
a) Formalizálja a fenti állításokat az adott nyelven.
b) Helyes-e a következtetés? Vizsgálja a definíció alapján!
c) Formalizálja a következtetést a halmazalgebrák (a halmazok) nyelvén is!

3. Tekintsük a következő relációkat
a) Az $\{1, 2, 3\}$ halmazon értelmezett: $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
b) A $\mathcal{P}(N)$-n értelmezett Q reláció: QAB fennáll pontosan akkor, ha
$|A - B| = \aleph_0$, ahol $A, B \subset N$ (N a természetes számok)
Vizsgálja a fenti relációkat reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás, trichotómia és antiszimmetria szempontjából.

	refl.	irrefl.	szimm.	aszimm.	tranz.	trich.	antiszimm.
R							
Q							

4. Izomorfak-e a következő rendezések?
a) $\omega + \omega$ és $2 \cdot \omega$
b) $2 \cdot \omega$ és $\omega \cdot 2$
c) Melyek a fentiek közül a jólrendezések?

5. Formalizálja elsőrendű logikában az alábbi állításokat a megadott relációk segítségével (vigyázzon a zárójelezésre és a műveletek sorrendjére):
a) "Nem minden *arany*, ami *fénylik."* (Ax, Fx)
b) "Mindenkivel előfordul, hogy *valaki tetszik neki*, de annak más tetszik" (Txy)
c) " Az $f(x)$ függvény a-ban lokálisan nő" $(fx,\ a, -,\ +,\ \leq)$
(azaz, a-nak valamely $(a - \delta, a + \delta)$ környezetében, a-tól balra a függvény értékek kisebbek fa-nál, a-tól jobbra pedig nagyobbak fa -nál).

6*. Igazolja, hogy ha egy fx valós függvény az (a, b) intervallum bármely pontjában lokálisan monoton nő, akkor az (a, b) intervallumban is növekedő (azaz ha $a < t < u < b$, akkor $ft < fu$).

Megoldások

1. a) $\emptyset, \{\{\emptyset, \{\emptyset, 2\}\}\}, \{\{\{1,2\}, \emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset, 2\}\}, \{\{1,2\}, \emptyset\}\}$
b) Kiküszöböljük a relatív komplementereket:
$(A-B)-C = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
$(A-C)-(B-C) = A \cap \overline{C} \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap \overline{C} \cap (\overline{B} \cap C) = A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$
továbbá, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$
c) A kérdéses kitöltés egy-egy értelműen megfeleltethető a kockák, azonos módon kiválasztott, sarkai összességének, azaz az egész számokból képezett szám hármasok összességének. Utóbbi számossága $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Megj. Gyakori volt c)-nél a hiányos indoklás!

2. a) $U \leftrightarrow B \vee E$
$E \rightarrow B \vee H$
Konkl.: $\neg H \wedge E \rightarrow B$
b) Indirekt. Tegyük fel, hogy a premisszák igazak és a konklúzió hamis.
Ha $\neg H \wedge E \rightarrow B =\downarrow$, akkor $H =\downarrow, E =\uparrow, B =\downarrow$ de ez ellentmond azzal, hogy $E \rightarrow B \vee H =\uparrow$, ezért a következmény helyes.
c) $(\overline{U} \cup B \cup E) \cap (\overline{B \cup E} \cup U) \cap (\overline{E} \cup B \cup H) \subset \overline{\overline{H} \cap E} \cup E$

Megj. a)-ban többeknél hibás volt $E \rightarrow B \vee H$
c)-ben nem csak az állításokat kellett halmaz nyelven felírni, hanem magát a következtetést is.

3.

	refl.	irrefl.	szimm.	aszimm.	tranz.	trich.	antiszimm.
R	nem	nem	nem	nem	nem	nem	nem
Q	nem	igen	nem	nem	nem	nem	nem

Megj. Q-nál gyakran hiányos volt az indoklás

4. a) $\omega + \omega$ és $2 \cdot \omega$ izomorfak, mert $2 \cdot \omega$ is ω két példányának egymásutánja.

b) $2 \cdot \omega$ és $\omega \cdot 2$ nem izomorfak. $\omega \cdot 2$-ben tulajdonképpen ω minden elemét "megkettőzzük". Mindkét rendezésben van legkisebb elem, de ezeken kívül $2 \cdot \omega$ -ban van olyan elem (a nagyobbik ω legkisebbike), amelynek nincs megelőzője.

c) mindegyik rendezés jólrendezés, mert ω jólrendezés

Megj: Többeknél hiányzott az indoklás. Szorosabb értelemben egyik rendezés sem diszkrét!

5. a) $\neg \forall x (Fx \rightarrow Ax)$

(a $\exists x(Fx \wedge \neg Ax)$ is jó megoldás)
b) $\forall x \exists y(Txy \wedge \neg Tyx \wedge \exists z Tyz)$
c) $\exists \delta \forall x((a - \delta \leq x \leq a \rightarrow fx \leq fa) \wedge (a \leq x \leq a + \delta \rightarrow fa \leq fx))$

Megj. Ha b) hiányos volt, akkor is járt érte részpont. Gyakori volt, hogy c)-ben nem írták ki a $\forall x$ kvantort.

6. Legyen $t \in (a, b)$ rögzített. Tekintsük azon "jó" δ-k λ supremumát, amelyek a t-beli lokális monotonitás definíciójában szerepelnek. Állítás: $\lambda = b - t$. Indirekt. Állítás: ha $\lambda < b - t$ lenne, akkor $t + \lambda$-ban ($t + \lambda < b$) nem lenne a függvény lokálisan monoton. Ugyanis $\lambda < b - t$ miatt $f(t + \lambda) > fa$ lenne. Ezért.az indirekt következtetés miatt, t-től jobbra minden függvény érték nagyobb ft-nél, ezt kellett igazolni.