Matematika A4
12. gyakorlat

1. Az u-próba (más néven: z-próba)

Legyenek mérési eredményeink: $X_1, X_2, \dots X_n$ független, azonos *normális* eloszlású valószínűségi változók a közös $\mu = \mathbb{E}(X_k)$ várható értékkel és $\sigma = \mathbb{D}(X_k)$ szórással. Vegyük a mérési eredményeink számtani átlagát: $\overline{X}_n := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. Ekkor

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu, \qquad \mathbb{D}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \text{és legyen} \qquad Z := \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

A fentiekből következik, hogy Z standard normális eloszlású valószínűségi változó.

(a) Becslés. A statisztika egyik alapfeladata *becslést, konfidencia intervallumot* adni mérési eredmények eloszlásának egy ismeretlen paraméterére. Legyen a μ várható érték ismeretlen és a σ szórás ismert.

A feladatunk: Mérési eredményeink alapján adjunk meg olyan intervallumot, amely $1 - \alpha$ valószínűséggel (pl. $\alpha = 0.05$) tartalmazza az ismeretlen μ paramétert. Jelölje $z_{\alpha/2}$ a standard normális eloszlás táblázatából visszakeresett azon számot, aminél nagyobb értéket Z csak $\alpha/2$ valószínűséggel vesz fel. Ekkor a fentiek szerint $\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$, és így a keresett (véletlen!) konfidencia intervallum

$$\left(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

(b) Hipotézis vizsgálat. A statisztika másik alapfeladata mérési eredmények eloszlásának egy ismeretlen paraméterére vonatkozó hipotézisek vizsgálata. Legyen megint a μ várható érték ismeretlen és a σ szórás ismert.

A feladatunk: A mérési eredményeink alapján döntsük el azt a hipotézist (feltevést), hogy az ismeretlen μ paraméter értéke egy adott μ_0 szám-e. Ehhez meg kell adnunk egy megfelelően kicsi α *szignifikancia-szintet* is, pl. $\alpha = 0.05$. A szignifikancia-szint elnevezés arra utal, hogy abban az esetben, ha az ismeretlen paraméter értéke tényleg μ_0, csak α (kis) valószínűséggel forduljon elő az az *elsőfajú hiba*, hogy a mérési eredmények megcáfolni látszanak a hipotézisünket.

Fontos megérteni, hogy a statisztikában tipikusan nincs abszolút bizonyosság. Pozitív valószínűséggel döntésünk hibás lesz. Tipikusan *másodfajú hibát* is pozitív valószínűséggel követhetünk el: elfogadjuk a hipotézist olyankor, amikor $\mu \neq \mu_0$.

A döntésünket adott μ_0 esetén az

$$U := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

véletlen mennyiségre alapozzuk. A fentiek szerint, ha $\mu = \mu_0$, akkor $\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$. Így akkor és csak akkor fogadjuk el a $\mu = \mu_0$ hipotézist, ha a mérési eredményeinkből számított U értékre fennáll, hogy $|U| < z_{\alpha/2}$, másképpen:

$$\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}_n < \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

egyébként a hipotézist elvetjük. Az itt szereplő alsó és felső korlátokat $\overline{X}_n$-re *kritikus értékeknek* is nevezzük.

A másodfajú hiba valószínűségét az *erőfüggvény* mutatja meg. Mivel U várható értéke $(\mu - \mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és szórása 1, ezért az ismeretlen μ paraméter függvényében az erőfüggvény

$$f(\mu) := \mathbb{P}(|U| < z_{\alpha/2}) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Ha a hipotézis fennáll, azaz $\mu = \mu_0$, akkor $f(\mu_0) = 1 - \alpha$ (pl. 0.95), nagy valószínűséggel elfogadjuk a hipotézist. Ahogy μ távolodik μ_0-tól, ez a valószínűség folytonosan, haranggörbe alakban csökken le zérushoz közeli értékekre.

(c) Egyoldalú eset. A fentiekben az ún. *kétoldalú* esetet vizsgáltuk. Mind a konfidencia intervallum, mind a hipotézis vizsgálat könnyen kiterjeszthető *egyoldalú* esetre is, amikor pl. csak véges felső korlátot akarunk mondani az ismeretlen μ paraméterre, az alsó „korlát" $-\infty$. Ez olyankor előnyös, amikor az egyik oldali korlátnak nincs gyakorlati jelentősége. Például ha a μ várható érték egy páciens gyógyulási idejének várható értéke egy most vizsgált gyógyszer hatására, akkor csak az a probléma, ha μ túl nagy.

Elsőként adjunk meg olyan *egyoldalú* $(-\infty, x)$ *konfidencia intervallumot*, amely $1-\alpha$ valószínűséggel tartalmazza az ismeretlen μ paramétert. Jelölje z_α a standard normális eloszlás táblázatából visszakeresett azon számot, aminél nagyobb értéket Z csak α valószínűséggel vesz fel. Ekkor a fentiek szerint $\mathbb{P}(-\infty < Z < z_\alpha) = 1-\alpha$, és így a keresett véletlen konfidencia intervallum

$$\left(-\infty,\ \overline{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Másodikként, döntsük el azt a *hipotézist*, hogy az ismeretlen paraméter értéke *legfeljebb* egy adott μ_0 szám. Ehhez meg kell adnunk egy megfelelően kicsi α szignifikancia-szintet is, pl. $\alpha = 0.05$. Továbbá számítsuk ki az $U := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ értéket a mérési eredmények alapján. A fentiekhez hasonlóan, ha $\mu \le \mu_0$, akkor $\mathbb{P}(-\infty < U < z_\alpha) \ge 1-\alpha$. Így akkor és csak akkor fogadjuk el a $\mu \le \mu_0$ hipotézist, ha a mérési eredményeinkből számított U értékre fennáll, hogy $U < z_\alpha$, másképpen $\overline{X}_n < \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, egyébként a hipotézist elvetjük. Az itt szereplő felső korlátot $\overline{X}_n$-re kritikus értéknek nevezzük.

A másodfajú hiba valószínűségét az erőfüggvény mutatja meg. Mivel U várható értéke $(\mu-\mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és szórása 1, ezért az ismeretlen μ paraméter függvényében az erőfüggvény

$$f(\mu) := \mathbb{P}(-\infty < U < z_\alpha) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Ha a hipotézis fennáll, azaz $\mu \le \mu_0$, akkor $f(\mu) \ge 1-\alpha$, nagy valószínűséggel elfogadjuk a hipotézist. Ahogy μ nagyobb lesz μ_0-nál és tart ∞-hez, ez a valószínűség (az erőfüggvény) folytonosan csökken le zérushoz közeli értékekre.

Az egyoldalú eset másik variánsa, ha csak *alsó korlátot keresünk*, azaz (x, ∞) alakú intervallumot. Ekkor értelemszerűen minden megfordul. A konfidencia intervallumnál $\mathbb{P}(-z_\alpha < Z < \infty) = 1-\alpha$, és így a konfidencia intervallum

$$\left(\overline{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \infty\right).$$

Döntsük most el azt a hipotézist, hogy az ismeretlen paraméter értéke *legalább* egy adott μ_0 szám. A fentiekhez hasonlóan, ha $\mu \ge \mu_0$, akkor $\mathbb{P}(-z_\alpha < U < \infty) \ge 1-\alpha$. Így akkor és csak akkor fogadjuk el a $\mu \ge \mu_0$ hipotézist, ha a mérési eredményeinkből számított U értékre fennáll, hogy $-z_\alpha < U$, másképpen $\mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}_n$, egyébként a hipotézist elvetjük.

A másodfajú hiba valószínűségét most is az erőfüggvény mutatja meg. Mivel U várható értéke $(\mu-\mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és szórása 1, ezért az ismeretlen μ paraméter függvényében az erőfüggvény

$$f(\mu) := \mathbb{P}(-z_\alpha < U < \infty) = 1 - \Phi\left(-z_\alpha - \frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Ha a hipotézis fennáll, azaz $\mu \ge \mu_0$, akkor $f(\mu) \ge 1-\alpha$, nagy valószínűséggel elfogadjuk a hipotézist. Ahogy μ kisebb lesz μ_0-nál és tart $-\infty$-hez, ez a valószínűség (az erőfüggvény) folytonosan tart zérushoz.

Feladatok:
Az u-próbához megadott feladatokban szereplő valószínűségi változókat vegye normális eloszlásúaknak!

1. Öt hallgató egy laborban a következő mérési eredményeket kapta elvileg ugyanarra az áramerősségre egy kissé lestrapált ampermérővel: 15.2, 15.7, 14.6, 16.8, 13.9 A. A mérés szórása 2 A. Adjon meg olyan konfidencia intervallumot, amely az áramerősség várható értékét a) 0.8 b) 0.9 c) 0.99 valószínűséggel tartalmazza! Hány kísérlettel lehetne 1.2 A hosszúságú 95%-os konfidencia intervallumot megadni?

2. Idei kékfrankosunk alkoholtartalmát mérjük. Mérési módszerünknek van egy kis véletlen hibája, 0 várható értékkel, 0.5% szórással. Tíz mérés átlaga 12.61% volt. Konstruáljunk egy szimmetrikus 95%-os konfidenciaintervallumot.

3. Öt hallgató egy laborban a következő mérési eredményeket kapta elvileg ugyanarra az áramerősségre egy kissé lestrapált ampermérővel: 15.2, 15.7, 14.6, 16.8, 13.9 A. A mérés szórása 2 A. Egy hivatalos dokumentum szerint az áramerősség 15A. 1%-os elsőfajú hiba mellett dolgozva mit mondhatunk az állításról?

4. Az alábbi két minta 5 - egyforma képességűnek feltételezett - sportoló súlylökésben elért eredményeit tartalmazza. Az első dobás előtt az edző büszkén állította, hogy tanítványai átlagosan legalább 17 métert dobnak, amit a klub igazgatója kétségbe vont. Úgy döntött, hogy csak akkor hosszabbítja meg az edző szerződését, ha a $H_0 : m \geq 17$ hipotézis $\alpha = 0,05$ elsőfajú hibavalószínűség mellett elfogadható a $H_1 : m < 17$ alternatívával szemben. Korábbi tapasztalatok alapján a dobások szórása 2-nek tekinthető.

   (a) Hogyan döntött az igazgató?

   (b) Az igazgató még egy esélyt adott az edzőnek. Ő az első kísérlet után mindenkinek elmagyarázta, hogy mire kellene odafigyelnie a jobb eredmény érdekében. Tapasztalható javulás (a különbség változó szórása 1,5)?

   (c) A második dobássorozat alapján maradhat az edző?

első eredmény	14,8	12,2	16,8	17,1	16,1
második eredmény	18,0	12,1	17,2	17,7	17,0

5. Megvizsgálták, hogy 8 ember mekkora távolságot tudott 5 perc alatt lefutni. Ezután mindenki 3 napig diétázott és így is megmérték a futásteljesítményt. A szórás 63 méternek tekinthető. Befolyásolta-e a diéta a teljesítményt?

diéta előtt	1520	1830	1620	1740	1970	2130	1910	2000
diéta után	1630	1810	1700	1800	1930	2100	1960	2160

6. Egy deszkagyárban ellenőrizni szeretnénk, hogy a gyártott deszkák hosszának várható értéke megegyezik-e a szükséges 180 cm-rel. A hossz szórása 10 cm. Azt szeretnénk, hogy ha megegyezik, akkor legalább 0.85 valószínűséggel fogadja el ezt a hipotézist a próba, és ha a deszkák várható értéke 165 cm alatt vagy 195 cm felett van, akkor legalább 0.8 valószínűséggel a próba vesse el a 180 cm-es hipotézist. Válassza meg a kritikus értékeket és a szükséges mintaelemszámot (azaz a megmérendő deszkák számát)!

7. Egy deszkagyárban ellenőrizni szeretnénk, hogy a gyártott deszkák hosszának várható értéke eléri-e a minimális 180 cm-t. A hossz szórása 10 cm. Azt szeretnénk, hogy ha eléri, akkor legalább 0.85 valószínűséggel fogadja el ezt a hipotézist a próba, és ha a deszkák várható értéke 165 cm alatt van, akkor legalább 0.8 valószínűséggel a próba vesse el a $\geq$ 180 cm-es hipotézist. Válassza meg a kritikus értéket és a szükséges mintaelemszámot!

2. CHT

Centrális határeloszlás-tétel (CHT): legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mu := \mathbb{E}X_i \in \mathbb{R}$ és $\sigma := \mathbb{SD}(X_i) \in \mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x), \text{ amint } n \to +\infty, \ (x \in \mathbb{R}).$$

Mindez szóban: elég nagy n esetén a – FAE – valószínűségi változók standardizált összege közelítőleg (standard) normális eloszlású. Speciálisan: ha az X_i változókat azonos, p paraméterű Bernoulli változóknak választjuk, akkor jutunk el a de Moivre–Laplace tételhez (avagy binomiális CHT).

8. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12 000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?

9. Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: Feldobjuk az érmét 1000-szer. Ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

10. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma $500 - k$ és $500 + k$ közé esik, kb. 0.9.

11. Egy dobozban piros illetve kék üveggolyók vannak. A pirosak p arányát nem ismerjük. Húzunk visszatevéssel 250 golyót, amiből 102 lett piros. Konstruáljunk egy 95%-os konfidenciaintervallumot p becslésére.

12. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a $[0,\ 30]$ intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a $[0,\ 1]$ intervallumon
    (a) egyenletes;
    (b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?
13. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 10 000 kockadobás összege 34 800 és 35 200 közé esik.
14. Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.
15. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.
16. A jegyiroda előtt a fiatalok hosszú sorban állnak egy koncertjegyért. Ebben a pillanatban éppen 18-an állnak az egyik pénztár előtt. Megfigyeltem, hogy egy vásárló kiszolgálási ideje memória nélküli valószínűségi változó 3 perc átlaggal és a kiszolgálási idők függetlenek. Becsülje meg annak a valószínűségét, hogy a most utolsóként álló fiatal több mint 60 percet fog a pénztár előtt eltölteni!
17. Egy szabályos érmét 40-szer feldobunk, és X-szel jelöljük a kapott fejek számát. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy $X = 20$
    - a binomiális eloszlás segítségével,
    - a deMoivre–Laplace-tételt használva. Ez utóbbihoz segítség: $\mathbb{P}\{X = 20\} = \mathbb{P}\{19.5 \le X < 20.5\}$, ami persze nem számít amíg X-et binomiálisnak (azaz egész értékűnek) tekintjük, de fontos lesz a deMoivre–Laplace-tétel alkalmazásánál.