Matematika A4
VI.-VII. gyakorlat

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb értéket: $F(x) = \mathbb{P}(X < x), \quad x \in \mathbb{R}$.

Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ben 1-hez tart,
2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
3. mindenhol balról folytonos.

Amikor $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos: ekkor X eloszlását *folytonosnak* nevezzük. Ebben az esetben azt is feltesszük, hogy van olyan f *sűrűségfüggvény*, amellyel $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

Minden olyan x pontban, ahol f folytonos, fennáll, hogy $f(x) = F'(x)$. Tetszőleges (a, b) vagy $[a, b]$ intervallumba esés valószínűsége a folytonos esetben:
$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

A valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben:
$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$,

és tetszőleges $t(X)$ függvényének várható értéke: $\mathbb{E}(t(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx$.

2. Nevezetes folytonos eloszlások

1. *Normális eloszlás*

   A *standard normális eloszlás* sűrűségfüggvénye: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ha $-\infty < x < \infty$,
   eloszlásfüggvénye: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ ha $-\infty < x < \infty$.

   Az $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű (m a várható érték, σ az ún. szórás, l. később) *normális eloszlás* a standard normálisból származtatható. Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az $Y = \sigma X + m$ valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású; Y eloszlásfüggvénye:

$$F(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\sigma X + m < y) = \mathbb{P}\left(X < \frac{y - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - m}{\sigma}\right),$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}.$$

2. *Exponenciális eloszlás*

   Egy valószínűségi változó *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > s+t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ minden $s, t \geq 0$ esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog „él”, a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak.
   Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
   Megjegyzés:
   Egy X eloszlásról azt mondhatjuk, hogy öregedik, ha $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ teljesül rá. *Példa*: egy elhasználódó alkatrész élettartama.
   Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy fiatalodik, amennyiben $\mathbb{P}(X > s+t|X > t) > \mathbb{P}(X > s)$. *Példa*: egy nagyon elmaradott országban született csecsemő élettartama.
   A λ paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$.
   A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$. Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

3. Feladatok

1. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon.

   a) $F(x) = \mathbb{P}(X < x) =?$

   b) $\frac{\mathbb{P}(X\in(x_1,x_2))}{x_2-x_1} =?$ ha $a < x_1 < x_2 < b$.

2. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény? (Ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0.)

   a)
   $$F(x) = 1 + e^{-x+1} \quad \text{ha} \quad -1 < x$$

   b)
   $$G(x) = 2 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

   c)
   $$H(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

   d)
   $$I(x) = \frac{x}{4}(4-x) \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 2$$

3. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)
   $$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

b)

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

c)

$$h(x) = \frac{1}{3}\sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1}\ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

d)

$$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

4. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

5. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?

6. A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?

7. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$? Mennyi X várható értéke?

8. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim $1/3$-a hétvégére, $2/3$-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

9. Egy busz az A és B városok között közlekedik, amelyek távolsága 100 km. Ha a busz meghibásodik, a meghibásodás helyének a távolsága az A várostól egyenletes eloszlású a $(0, 100)$ km intervallumon. Busz-szerviz A-ban, B-ben és a félúton van. Egy javaslat szerint jobb lenne a szervizeket A-tól 25, 50 és 75 km-re elhelyezni. Hasonlítsa össze a két alternatívát!

10. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy-eloszlás.)*

11. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az árkuszszinusz-eloszlás.)*

12. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Milyen x-re lesz $F(x) = 0.5$? *(Azt az x számot, melyre $P(X < x) = 0.5$, az X valószínűségi változó mediánjának nevezzük. Hasonlítsuk össze a várható értékkel!)*

13. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 prcet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

14. Legyen X^2 egyenletes a $[0,1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?

15. Egy bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a dél-szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a bergengócot? Átlagosan mennyit időt bírnak ki ezek a DVD-k?

16. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

17. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

18. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

19. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

20. Bizonyítsuk be, hogy az
$\mathbb{P}(X < x) = F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$,
$\mathbb{P}(Y < y) = G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$,
eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

21. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!
(a) $\mathbf{P}(-1 < X < 1)$ (b) $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$ (c) $\mathbf{P}(-3 < X < 3)$

22. Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!

23. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű?

24. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik?

25. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

    a) 50 fő alatt

    b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

26. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

27. Legyen az X egy tetszőleges folytonos valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, U pedig egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $F(x)$ egy $[A, B]$ intervallumon (A lehet $-\infty$, B lehet ∞) szigorúan növekvő, és $F(A) = 0$, $F(B) = 1$. Határozzuk meg $F^{-1}(U)$ eloszlását! (Általánosított inverz eloszlásfüggvény használatával nincs szükség a feltevésekre, de ezzel részletesebben nem foglalkozunk).