

Matematika A4

IX. gyakorlat

1. Szórás

Előadáson levezetéssel együtt szerepelt (egész pontosan folytonos esetben szerepelt, diszkrét esetben analóg módon levezethető), hogy tetszőleges X és Y valószínűségi változókra $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Könnyen látható az is, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ -re és X valószínűségi változóra $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$.

Egy X valószínűségi változó szórásnégyzete definíció szerint $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$. A szórás pedig az előző mennyiség gyöke.

1. Bizonyítsd be, hogy ha X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$!
2. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges X valószínűségi változó esetén $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$!
3. Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{D}^2(aX + b) = a^2\mathbb{D}^2(X)$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, X pedig egy valószínűségi változó!
4. Bizonyítsd be, hogy ha X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor $\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y)$!
5. Számítsd ki a Poisson-eloszlás és az $[a, b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlás szórását!
6. Számítsd ki a binomiális eloszlás szórását!
7. Számítsd ki a λ paraméterű exponenciális eloszlású X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését! Mennyi a medián, az alsó és a felső kvantil, illetve általában a p -kvantilis értéke? (A folytonos F eloszlásfüggvényű eloszlás p -kvantilise az az x , amelyre $F(x) = p$; a medián és a kvantilisek ennek speciális esetei rendre $p = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ értékekkel.)
8. Számítsd ki az $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó szórását és a várható értéktől való átlagos abszolút eltérését!
9. Mennyi az előző két feladatban a következő valószínűségek értéke (m és σ a várható értéket és a szórást jelöli)?
 - a) $\mathbb{P}(m - \sigma < X < m + \sigma)$
 - b) $\mathbb{P}(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$
10. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?
11. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát! Mennyi X szórása?
12. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkoznunk. Érkezése egyenletes eloszlású, öt perc szórással. Melyik az a legkorábbi időpont, amikor ismerősünk biztosan megérkezik?
13. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozd meg $\mathbb{E}[(2 + X)^2]$ értékét!

14. Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Határozd meg

$$Y_n := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

várható értékét és szórását.

15. Egy kisváros négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0, 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőknek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.
16. Legyenek X és Y független és azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Szamold ki az $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ értékét.
17. A zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozd meg aprópénzem értékének várható értékét és szórását.