Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat (BMETE95MF00)

2013 ősz

Ütemterv és napló

Ami már volt, az napló, ami még nem volt, az még csak terv, tehát változhat. A javasolt irodalmak bővülhetnek, ahogy a tervből napló lesz.

1. **Matematikai eszközök (részben ismétlés)**
   (a) Metrikus terek: definíció, példák, faktor-tér, teljesség. Mérték- és integrálelmélet: szigma-algebra, mérték és integrál, dominált és monoton konvergencia tételek, Fatou lemma, Fubini tétel. **(szept. 13.)**
   - R. B. Ash: *Measure, integration, and functional analysis*
   - W. Rudin: *Real and complex analysis*
   - Jók az angol Wikipedia szócikkek, pld. Metric space, Measure (mathematics), Lebesgue integration

   (b) Fontos mértékelméleti érdekességek: egy Lebesgue-nemmérhető halmaz, illetve a Banach-Tarski paradoxon. Mértékek Lebesgue dekompozíciója. Topológia kezdetei: nyíltság, zártság, kompaktság definíciója, néhány példa, kompakt halmaz zárt részhalmaza is kompakt. Egy mindenütt sűrű nyílt halmaz kis mértékkel. **(szept. 20.)**
   - J. Munkres: *Topology*

   (c) Topológia: topologikus terek, szorzat-topológia, Tyihonov-tétel. **(szept. 27.)**

2. **Komplex függvénytan:** konform leképzések, Cauchy-Riemann egyenletek, harmonikus függvények, Laplace-egyenlet. **(okt. 4.)**
   - L. Ahlfors: *Complex analysis*
   - W. Rudin: *Real and complex analysis*

3. **Parciális diffegyenletek (okt. 11. és 25.):**
   (a) Lineáris parciális differenciálegyenletek megoldása (tér- és időváltozók szeparálása, Fourier módszerek, Green függvény)
   - L. C. Evans: Partial differential equations

   (b) Nemlineáris parciális differenciálegyenletek: megmaradási törvények és Hamilton-Jacobi egyenletek, nemlineáris hullámok
   - L. C. Evans: Partial differential equations

   <u>**Beszámolók 1:**</u> **(okt. 18.)**

4. **Differenciálgeometria alapfogalmai** (topologikus, diffható, és Riemann sokaságok, külső szorzás, térfogati formák, ...), Lie-csoportok **(pici okt. 25., amúgy nov. 8.)**
   - W. M. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry
   - V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei

   Sajnos a differenciálformákra, külsőszorzásra, külső deriválásra nem maradt idő. Akit pedig az egyperces bevezetés a görbületről megfogott, tarthat kiselőadást a Gauss-Bonnet tételből, vagy, hogy az általános relativitáselmélet mit mond a téridő görbületéről.

5. **Ergodelmélet és dinamikai rendszerek:** Alap definíciók, ergodtételek, alkalmazások; fraktálok **(nov. 15.)**
   - M. Brin, G. Stuck: Introduction to dynamical systems

6. **Sztochasztikus folyamatok és statisztikus fizika:** Fizikához közeli folyamatok és alkalmazások
   (a) Markov folyamatok: diszkrét időben (pl. bolyongások, esetleg kapcsolat áramkörökkel), Poisson folyamat, folytonos idejű ugró és nem ugró folyamatok (Brown-mozgás és hővezetési egyenlet) **(nov. 29.)**
   - S. I. Resnick: Adventures in Stochastic Processes

   (b) Néhány példa a fázisátalakulásokkal kapcsolatos tételekre és bizonyításukra (dualitás, kontúrok?); pár szó a perkolációról **(dec. 6.)**
   - G. Grimmett: Percolation

Beszámolók 2: **(dec. 7.)**

Beszámolók 3: **(dec. 13.)**

Dátum	**Téma**	**Beadandó**
szept. 13.	Mértékelmélet	-
szept. 20.	Mértékelmélet és topológia	**HF#1**
szept. 27.	Topológia	**HF#2**
okt. 4.	Komplex függvénytan	**HF#3**
okt. 11.	Lineáris parc. diff.egyenletek	**HF#4**
okt. 18.	-	**1. beszámoló**
okt. 25.	Nemlineáris parc. diff.egyenletek, topológikus sokaságok	**HF#5**
nov. 8.	Differenciálgeometria	**HF#6**
nov. 15.	Ergodelmélet	**HF#7**
nov. 29.	Sztochasztikus folyamatok	**HF#8**
dec. 6.	Stat. fiz.	**HF#9**
dec. 7.	-	**2. beszámoló**
dec. 13.	-	**3. beszámoló**

Összetettebb feladatok a beszámolókra:

Ez a lista még bővülhet. A megadott linkek csak kedvcsinálók, adok még forrást, amikor kéritek. Magyar nyelvű forrást egyik témához se próbáltam találni, de elképzelhető, hogy valamelyikhez létezik; próbálok segíteni, ha valaki igényli. Értelemszerűen inkább a lista elején vannak olyan témák, amiket már az első beszámolón megérthetnek az előadók és a hallgatók.

1. Arzelà-Ascoli tétel (topológia és funkanal)
2. Baire kategória tétel (topológia és funkanal). A Wikipedia szócikk elég borzalmas, sokkal jobb a W. Rudin: *Functional analysis*, McGraw-Hill 1973, könyv.
3. Hausdorff dimenzió, önhasonló halmazok, fraktálok (mértékelmélet) — Hegedűs Tamás, Lászlóffy András, valaki, okt 18
4. Julia halmazok, Mandelbrot halmaz (komplex függvénytan, dinamikai rendszerek) — Fülep Csilla, Tímár Máté, Iván Dávid, okt 18
5. Loewner evolúció (a kétdimenziós statisztikus fizikában fontos SLE egyik alapja; komplex függvénytan)
6. Kramers-Kronig relációk: egy egyszerű komplex analízis állítás és fizikai interpretációi — Bernáth Bence, Nagy Lajos, Kovács Péter, okt 18
7. Burgers egyenlet, esetleg mint forgalmi dugók hidrodinamikai limesze — Németh Gergely, Kalas György Benjamin, Gyurcza Erzsébet, Szendi Zsuszanna, dec 7
8. Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet, optimális kontroll, dinamikus programozás, játékelmélet — Gulácsi Balázs, Horváth László, Vógel Bálint, dec 13
9. Az L^∞-Laplace egyenlet és esetleg véletlen kötélhúzás
10. Morse elmélet és/vagy két következménye: Poincaré-Hopf index-tétel és Gauss-Bonnet tétel (differenciálgeometria)
11. Hopf fibráció (differenciálgeometria, Lie-csoportok) — Farkas Máté, Király Balázs, dec 13
12. Fürstenberg ergodelméleti megközelítése Szemerédi tételének
13. Brown-mozgás konstrukciói, alkalmazásai — talán Babcsány Boglárka, Jámbori Attila, Molnár Ferenc, okt 18, és/vagy Dzsaber Sami, Pálinkás András, László Vendel
14. Bolyongások és elektromos hálózatok: Doyle-Snell, Lyons-Peres, PGG Sections 6.1-2 — László András, Nagy Alexandra, Juhász Péter László, dec 7
15. Martingálok: a legjobb jóslat, harmonikusság, stb. Itt egy híres példa. Ld. még PGG Section 6.3. — Almádi Balázs, Kurucz Máté, Molnár Balázs, dec 7
16. Folytonos spinmodellek a síkban: XY-modell, Mermin-Wagner tétel, Vicsek-féle madárvonulás
17. Valami Markov-láncos — Barna Zsófi, Bencsik Barbara, Imecs Gabi, dec 13
18. Szemléletes topológia — Győrffy Ákos, Plihál Viktor, dec 13

Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2013 ősz

Minden héten 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. A piros • pontok bónusz feladatokat jelölnek.

1. HF: (Beadási határidő: 2013. szept. 20.)

HF 1.1 •• *Integrál és határérték felcserélhetősége.* Írjuk fel n-t $n = 2^k + l$ alakban, ahol $k = 0, 1, 2 \dots$ és $l = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ (ez minden n -re egyértelműen megtehető). Legyen ezek után

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{l}{2^k} \leq x < \frac{l+1}{2^k}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Van-e olyan $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, hogy $g_n(x) \to g(x)$ Lebesgue majdnem minden $x \in [0, 1]$-re? Mennyi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_0^1 g_n(x) dx \right)$? Teljesülnek-e a dominált konvergencia tétel, a monoton konvergencia tétel, valamint a Fatou lemma feltételei? Ha igen, mit mondanak ki ezek a tételek a konkrét esetben?

HF 1.2 *Integrálok felcserélhetősége.*

(a) •• Legyen $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Mutassuk meg, hogy

$$\int\limits_0^1 \int\limits_1^\infty f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \; > \; 0 \; > \; \int\limits_1^\infty \int\limits_0^1 f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Mi a helyzet a Fubini tétellel?

(b) •• Legyen $f(x, y)$ az $\mathbb{R}^2$ diagonáljának indikátorfüggvénye: $= 1$, ha $x = y$, és $= 0$ különben. Legyen μ a Lebesgue mérték $\mathbb{R}$-en, ν pedig a számlálómérték: $\nu(A) = |A|$ ha $A \subset \mathbb{R}$ véges, és $= \infty$ különben. (A ν esetén lehet a σ-algebra akár $2^{\mathbb{R}}$, azaz minden részhalmaz mérhető.) Mennyi

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\nu(y) \quad \text{illetve} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(x) \, \mathrm{d}\mu(y) \, ?$$

Megjegyzés: Ez a példa azt mutatja, hogy a Fubini-tétel általános mértékekre $f \geq 0$ esetén sem feltétlenül igaz. Kell, hogy mindkét mérték σ-véges legyen, ami azt jelenti, hogy az egész tér lefedhető legyen megszámlálható sok véges mértékű részhalmazzal. Ez ν-re nyilván nem teljesül.

HF 1.3 *A karakterisztikus függvény differenciálhatósága.* Legyen μ egy *valószínűségi mérték* $\mathbb{R}$-en; föltesszük, hogy minden nyílt intervallum mérhető, így az ezek által generált legkisebb σ-algebra minden eleme (amit Borel-halmazoknak hívnak) is az. A μ *n-edik abszolút momentuma* ($n \in \mathbb{N}$-re) az

$$M_n := \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^n \, \mathrm{d}\mu(x)$$

integrál, *karakterisztikus függvénye* pedig a

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \psi(t) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \, \mathrm{d}\mu(x)$$

függvény, ahol i a komplex egységgyök ($i^2 = -1$).

Megjegyzés: Ha μ egy X valószínűségi változó eloszlása, ami annyit tesz, hogy minden B Borel-halmazra $\mu(B) := \mathbb{P}(X \in B)$, akkor $I_n = \mathbb{E}(|X|^n)$ és $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

Bizonyítsuk be a következő tételeket:

(a) •••

1. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága). *A fenti jelölésekkel, ha $I_1 < \infty$, akkor ψ folytonosan differenciálható és*

$$\psi'(0) = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mu(x).$$

(b) ••

2. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága II). *A fenti jelölésekkel, ha $I_n < \infty$, akkor ψ n-szer folytonosan differenciálható és*

$$\psi^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^k \, \mathrm{d}\mu(x), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

HF 1.4 Vegyük a korlátos folytonos valós függvények $\big(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ metrikus terét.

(a) • A remélhetőleg jólismert tétel segítségével, miszerint folytonos függvények uniform limesze is folytonos (pl. `http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_limit_theorem`), igazoljuk, hogy ez a metrikus tér teljes.

(b) •• Igazoljuk, hogy ez a metrikus tér nem szeparábilis, azaz nincsen benne megszámlálható mindenütt sűrű részhalmaz.

2. HF: (Beadási határidő: 2013. szept. 27.)

Emlékeztető: Tetszőleges (X, d) metrikus térben $U \subseteq X$ **nyílt**, ha minden $x \in U$-ra $\exists\, \delta > 0$, hogy a $B_\delta(x) := \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$ gömb benne van teljesen U-ban. $Z \subseteq X$ pedig **zárt**, ha $Z^c = X \setminus Z$ nyílt. Így pld. X maga az mindig zárt és nyílt is! A nyíltság következik rögvest a definícióból, a zártsághoz meg az kell, hogy $\emptyset$ nyílt legyen X-ben, mely állítás meg üresen teljesül. Tehát, pld. $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ a megszorított Euklideszi metrikával se nem nyílt, se nem zárt $\mathbb{R}$-ben, de nyílt is és zárt is önmagában.

$K \subseteq X$ pedig **kompakt**, ha *minden* $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ lefedésből, ahol mindegyik U_i nyílt, kiválasztható egy véges lefedés: $\exists\, F \subset I$, $|F| < \infty$, hogy $K \subseteq \bigcup_{i \in F} U_i$ is teljesül.

HF 2.1 A szokásos *triadikus Cantor-halmaz* konstrukcióját módosítsuk a következőképpen:

- Nulladik lépésben tekintsük a $[0, 1]$ zárt intervallumot: $D_0 := [0, 1]$.
- Első lépésben vágjuk ki ennek a középső nyílt 1/4-ét — így marad 2 darab 3/8 hosszúságú zárt intervallum: $D_1 = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$.
- Második lépésben vágjuk ki mindkettőnek a középső nyílt 1/9-ét, így marad 4 darab $(\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9})$ hosszúságú zárt intervallum — D_2 jelölje ezek unióját.
- És így tovább: az $n - 1$-edik lépésben marad 2^n darab zárt intervallum, melyek mindegyikének az n-edik lépésben kivágjuk a középső nyílt $1/(n + 1)^2$ hányadát, így D_n már 2^{n+1} darab zárt intervallum uniója.

Végül $D := \cap_{n=0}^{\infty} D_n$.

(a) •• Igazoljuk, hogy D kontinuum számosságú, zárt, Borel-mérhető halmaz (definíciót lásd HF 1.3-ban), ami nem tartalmaz intervallumot.

(b) •• Mennyi a D Lebesgue-mértéke? (Főképpen: nulla-e?)

HF 2.2 Egy könnyű, de nagyon hasznos következménye a kompaktságnak:

(a) •• Legyen $\{K_i : i \in I\}$ kompakt halmazok egy családja valamely X metrikus térben úgy, hogy bármely véges sok metszete nem üres. Bizonyítsuk be, hogy az összes metszete sem üres!

(b) • Adjunk rá példát, hogy kompakt helyett $\mathbb{R}^d$ zárt részhalmazaval ez már nem igaz.

Definíció: Következő órán kimondjuk, és bizonyítjuk is félig, hogy tetszőleges (X, d) metrikus térben egy K részhalmaz pontosan akkor kompakt, ha **szekvenciálisan kompakt**: minden végtelen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ sorozatból kiválasztható konvergens $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ részsorozat, azaz $d(x_{n_k}, x) \to 0$ valamely $x \in K$-ra.

HF 2.3 (a) •• Bizonyítsuk be, hogy ha X egy metrikus tér, és $K \subseteq X$ szekvenciálisan kompakt, akkor K zárt és korlátos is.

(b) • Adjunk példát egy X metrikus térre és $B \subset X$ korlátos és zártra, hogy B ne legyen kompakt (szekvenciálisan vagy simán, nekem mindegy, ahogy neked könnyebb bizonyítani). (Tipp: legyen X az $\mathbb{R}$ egy nem zárt részhalmaza, a megszorított metrikával.)

(c) •• Igazoljuk, hogy egy szekvenciálisan kompakt metrikus tér teljes is.

HF 2.4 (Bónusz) ••• Bizonyítsuk be, hogy minden X metrikus térhez létezik egy teljes metrikus tér $\hat{X}$, amiben X sűrű! (Pontosabban, létezik $\hat{X}$-ben egy sűrű Y, ami izometrikus X-szel.)

Segítség: legyenek $\hat{X}$ pontjai az X-beli $\{x_n\}$ Cauchy sorozatok ekvivalencia-osztályai, ahol $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ ekvivalens, ha $d(x_n, y_n) \to 0$. Definiáljunk egy nagyon természetes metrikát ezen a téren, igazoljuk, hogy ezzel $\hat{X}$ teljes, majd definiáljuk X egy izometrikus beágyazását $\hat{X}$-be.

3. HF: (Beadási határidő: 2013. okt. 4.)

Bocsánat, ez már tényleg az utolsó topológia feladatsor.

HF 3.1 • Emlékeztető: egy metrikus térből metrikus térbe való $\Phi : (M, d_M) \to (N, d_N)$ leképezés folytonosságának két lehetséges definíciója:

Definíció A: $\forall x \in M$ pontra, és $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ (ez függhet ε-tól és x-től is), hogy $y \in M$, $d_M(x, y) < \delta$ esetén $d_N(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$.

Definíció B: Minden M-beli nyílt hamaz őesképe nyílt halmaz N-ben.

Mutassuk meg, hogy ha Φ Definíció B értelmében folytonos, akkor Definíció A értelmében is az. (Megj: ez még könnyebb, mint az órán bizonyított másik irány.)

HF 3.2 ••• Igazoljuk, hogy a kompakt (X, d_X) metrikus terek szekvenciálisan is kompaktak. (Segítség: az $\{x_n : n = 1, 2 \dots\} \subset X$ sorozatból szeretnénk kiválasztani egy konvergens részsorozatot. Legyen Y a legkisebb zárt részhalmaza X-nek, ami tartalmazza a sorozatot. Legyen $\varepsilon_n \to 0$ tetszőleges sorozat, és nézzük a $\bigcup_{n \geq 1} B_n$ fedését Y-nak, ahol $B_n := B_{\varepsilon_n}(x_n)$ nyílt gömb. Csináljunk egy $\{n_k : k = 1, 2, \dots\}$ sorozatot, hogy $B_{n_{k+1}} \subset B_{n_k}$ legyen minden k-ra, és használjuk HF 2.2-őt.)

HF 3.3 Legyen $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ a szorzattopológiával, azaz a pontonkénti konvergencia topológiájával. Az X-en hat a T eltolás: $(Tx)_n = x_{n+1}$, minden $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$-re.

(a) •• Adjunk meg egy metrikát X-en, ami a szorzattopológiát generálja.

(b) •• Bizonyítsuk be, hogy egy ilyen jó metrika nem lehet eltolásinvariáns (azaz, hogy $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ lenne minden $x, y \in X$-re).

(c) •• Legyen $Y = [0,1]^{[0,1]}$ a szorzattopológiával, és nézzük a következő $\phi_n \in Y$ elemeket: $\phi_n(x) :=$ az n-edik jegy az x bináris felírásában. Bizonyítsuk be, hogy ebből a sorozatból nem választható ki Y-ban konvergens részsorozat.
Megjegyzés: Az előadáson kimondott Tyihonov tétel miatt Y kompakt. A fenti feladat szerint viszont nem szekvenvenciálisan kompakt. Ez is mutatja, hogy nem metrizálható, amit szintén láttunk már.

HF 3.4 •• Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^2$ nem homeomorfak egymással! (Segítség: ez sokkal könnyebb, mint ha $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ lenne, szóval nem kell pld. definiálni a dimenzió fogalmát topologikusan.)

4. HF: (Beadási határidő: 2013. okt. 11.) Figyelem! A 4.2 (c)-t használni fogjuk órán, tehát az óra utáni beadásáért nem jár pont.

HF 4.1 •••• **Tört-lineáris leképezések.** Tört-lineáris leképezésnek nevezzük a

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

alakú leképezéseket, ahol a, b, c, d komplex számok és a tört nem egyszerűsíthető — vagyis $ad \neq bc$. Egy ilyen leképezés értelmezési tartománya a komplex számsík, kivéve az egyetlen $P = -\frac{d}{c}$ pontot. Ezen a tartományon a leképezés természetesen holomorf, és könnyen ellenőrizhetően konformis is.

Cél: Igazolni akarjuk, hogy a tört-lineáris leképezések a sík minden egyenesét és minden körét egyenesbe vagy körbe viszik át.

(a) Lássuk be, hogy a valós síkon minden kör és egyenes egyenlete

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

alakba írható. Fordítva, minden ilyen egyenlet egyenest vagy kört ír le, amennyiben $B^2 + C^2 > 4AD$.

(b) Írjuk fel a $z = x+iy \mapsto 1/z$ leképezés valós és képzetes részét. Ennek segítségével igazoljuk a $z \mapsto 1/z$ speciális esetre a célt.

(c) Igazoljuk a célt a komplex affin transzformációkra is: $z \mapsto pz+q$; $p, q \in \mathbb{C}$, $p \neq 0$.

(d) Állítsunk elő minden törtlineáris leképezést $z \mapsto 1/z$ és $z \mapsto pz+q$ leképezések komponálásaként, és ezzel érjük el a végcélt.

HF 4.2 Néhány példa a **Riemann leképezés tételre**: Adjunk meg egy konform-leképezést

(a) • $\mathbb{R} \times (0, \pi i)$-ről a $\mathbb{H}$ nyílt felső félsíkra (tipp: $\log z$ kapcsán csináltunk hasonlót);

(b) • az egységkörlapról $\mathbb{H}$-ra (használjuk az előző feladatot; mitől függ, hogy kör vagy egyenes a kép?).

(c) •• Mit tesz az egységkörrel, annak belsejével és külsejével a $z \mapsto \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ leképezés? Vázold föl annak a körvonalnak a képét, aminek a középpontja $-\varepsilon + i\delta$, pici $\varepsilon, \delta > 0$ számokkal, mondjuk kb. $\delta = 0.05$, és $(1+\varepsilon)^2 + \delta^2 = (1+\delta)^2$. Mire emlékeztet a kapott görbe?

HF 4.3 Dirichlet-feladatot fogunk megoldani a $\mathbb{H}$ felső félsíkon: adott a $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$ határon egy nem feltétlen folytonos valós f függvény, és keresünk $\mathbb{H}$ belsejében olyan harmonikus u függvényeket, melyek a határhoz közelítve f-hez tartanak.

(a) • Legyen f *azonosan nulla.* Ennek természetesen megoldása a $u(x,y) \equiv 0$ azonosan nulla függvény. Mutassuk meg, hogy az $u(x,y) = xy$ is megoldás.

(b) • Emlékezzünk az előadásra: azt, hogy $u(x,y) = xy$ harmonikus, tudtuk anélkül, hogy lederiváltuk volna. Honnan is? Ennek mintájára keressünk még nagyon sok megoldását a fenti Dirichlet-feladatnak. Ezután keressünk még ennél is több megoldást.

(c) Ha ezt a Dirichlet-problémát úgy nézzük, mint egy hővezetési feladatot egy fémlemezen, miért az $u(x, y) \equiv 0$ az egyetlen „fizikai” megoldás? Mi a baj a többivel?

(d) •• Adjuk meg egy megoldását az

$$f(x) = \begin{cases} 100^{\circ}\mathrm{C}, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 0^{\circ}\mathrm{C}, & \text{egyébként}, \end{cases}$$

Dirichlet-problémának. (Segítség: olyasmit már megoldottunk, hogy $f(x) = 100^{\circ}\mathrm{C}$, ha x negatív, és $0^{\circ}\mathrm{C}$, ha x nemnegatív. Ezután használjuk a Laplace operátor linearitását.) Mik a megoldás izotermái? Végül, a linearitás és az előző rész segítségével adjuk meg nagyon sok megoldását ennek a feladatnak.

5. HF: (Beadási határidő: 2013. okt. 25.)

Kalkulus alapok (A) Gauss-Green, avagy Newton-Leibniz többdimenzióban:

$$\int_U u_{x_i}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial U} u\nu^i\, \mathrm{d}S\,,$$

ahol u_{x_i} parciális deriválás, ν^i pedig a ∂U-ben kifelé mutató normálvektor i-edik koordinátája.

(B) u helyett uv-re alkalmazva az előzőt:

$$\int_U u_{x_i} v\, \mathrm{d}x = -\int_U u v_{x_i}\, \mathrm{d}x + \int_{\partial U} uv\nu^i\, \mathrm{d}S\,,$$

a parciális integrálás formulája.

(C) uv helyett $u_{x_i}v$-re alkalmazva az előzőt, majd i-re szummázva:

$$\int_U (\Delta u) v\, \mathrm{d}x = -\int_U \langle \nabla u, \nabla v \rangle\, \mathrm{d}x + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, \mathrm{d}S\,,$$

ahol $\langle x, y \rangle$ a skalárszorzat.

(D) Egy $V = (V_1, \ldots, V_d)$ vektormező koordinátáira alkalmazva a Gauss-Greent, majd szummázva:

$$\int_U \operatorname{div} V\, \mathrm{d}x := \int_U \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial V_i}{p x_i}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial U} \langle V, \nu \rangle\, \mathrm{d}S =: \mathrm{flux}_{\partial U} V\,,$$

ami Gauss divergencia-tétele.

HF 5.1 •• Vegyük azt a D 45°-os szögtartományt $\mathbb{C}$-ben, melyet az $e = \mathbb{R}_{\geq 0}$ és $f = e^{\pi i/4}\mathbb{R}_{\geq 0}$ félegyenesek határolnak. Keressünk olyan $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sima vektormezőt, mely

- a határon $V\big|_e = (1, 0)$ és $V\big|_f = (-1, -1)/\sqrt{2}$,
- örvénylésmentes (azaz rotációmentes, ami pontosan akkor, ha $V = \nabla\phi$ valamilyen $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre), és
- összenyomhatatlan (ami a fenti (D) szerint ugyanaz, mint $\operatorname{div} V = 0$ mindenütt).

Segítség: előadáson megállapítottuk, hogy $0 = \operatorname{div} V = \operatorname{div} \nabla\phi = \Delta\phi$, tehát először is egy harmonikus fgv-t keresünk, és azt biztos könnyebb lenne a $\mathbb{H}$ 180°-os szögtartományban megtenni, majd konforminvarianciát használni.

HF 5.2 **Harmonikus függvények középérték-tulajdonsága.** Jelölje $|\partial B(x,r)|$ az x körüli r sugarú gömbfelületet felszínét. Bizonyítsuk be az előadáson említett két **középérték-tulajdonság** közül az erősebbet, kétféleképpen:

3. Tétel. *Ha u harmonikus az $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon és $B(x,r) \subset U$, akkor*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u \,\mathrm{d}S,$$

vagyis a függvényérték a gömb középpontjában éppen a felületen felvett értékek átlaga.

(a) •• Kalkulussal:

i. Rögzített x mellett tekintsük a

$$\phi(r) := \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u \,\mathrm{d}S$$

függvényt.

ii. $\phi(r)$ képletében végezzünk el egy integrál-helyettesítést úgy, hogy utána az integrálási tartomány már ne függjön r-től (legyen mondjuk $\partial B(0,1)$).

iii. Most már számolhatjuk $\phi'(r)$-t az integrál alá bederiválva.

iv. Alkalmazzuk a fenti (C) vagy (D) formulát.

(b) ••• Konceptuálisan:

i. Mutassuk meg (egyszerűen, kézzel kiszámolva), hogy a Laplace egyenlet forgásinvariáns $\mathbb{R}^n$-ben: ha $\triangle u = 0$ és O egy $n \times n$ ortogonális mátrix, akkor $v(x) := u(O\,x)$ is megoldja a Laplace egyenletet.

ii. Ez alapján igazoljuk, hogy az x-ből nézett harmonikus mérték a $\partial B(x,r)$ gömbfelületen az egyenletes valószínűségi mérték. (Figyelem! Előadáson nem mondtuk: miért 1 az össztömeg?)

iii. HF 4.3.(d)-ben megkaptuk $z \in \mathbb{H}$-ból nézve a $\nu_{\mathbb{H},z}$ harmonikus mértéket $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$-en. Ellenőrizzük, hogy ha a $(\mathbb{H}, z)$ párt elvissszük egy konform leképezéssel $(B(0,1), 0)$-ba, akkor a $\nu_{\mathbb{H},z}$ mérték képe valóban az egyenletes mérték.

HF 5.3 •• Legyen az $u(x)$ skalármennyiség az $x \in \mathbb{R}^n$ függvénye, és $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Mutassuk meg, hogy ha u radiális, azaz x-től csak r-en keresztül függ, akkor a $v(r) = u(x)$ függvény segítségével

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \qquad \text{és} \qquad \triangle u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot v'(r).$$

Ebből vezessük le, hogy ha u harmonikus $\forall\, x \neq 0$-ban, akkor $v(r) = b\log r + c$, ha $n = 2$, illetve $v(r) = b/r^{n-2} + c$, ha $n \geq 3$.

HF 5.4 ••• **Egydimenziós hőegyenlet.** Legyen $u(x,\,t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

pontosan akkor, ha

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \qquad (z > 0). \tag{1}$$

(b) Mutassuk meg, hogy (1) általános megoldása

$$v(z) = a \int_0^z \mathrm{e}^{-s/4} s^{-1/2}\, \mathrm{d}s + b\,.$$

(Lásd `http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_differential_equation`, ha közönséges diffegyenletekből segítség kell.)

(c) Lássuk be, hogy ha u egy megoldás, akkor $\partial_x u$ is megoldja az egydimenziós hőegyenletet.

(d) Tehát: differenciáljuk az előbb kapott $u(x,\, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ -t x szerint, majd válasszuk meg megfelelően a a konstanst, hogy pont az egydimenziós fundamentális megoldást kapjuk:

$$u(x,\, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

Megjegyzés: Azért választottuk így az a-t, mert ennek a megoldásnak a hely szerinti integrálja minden t-re 1. Honnan is tudjuk ezt?

HF 5.5 •• (Egy könnyű apróság bónuszként)

(a) Igazoljuk, hogy ha D egy korlátos tartomány sima határral, amin u harmonikus, akkor $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} u \;\mathrm{d}S \geq 0$.

(b) A fenti egyenlőtlenség nem meglepő, hisz Δ egy átlagolóoperátor, így természetes, hogy nagyértékű határpontok (mondjuk $u > 0$) lokális maximumok szeretnek lenni, így ott általában $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0$ várható, a kisértékűek (mondjuk $u < 0$) pedig lokális minimumok szeretnek lenni, így ott általában $\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0$ várható. Igaz-e az átlag helyett majdnem minden határpontban is, hogy $\frac{\partial u}{\partial \nu} u \geq 0$?

6. HF: (Beadási határidő: 2013. nov. 8.)

HF 6.1 •• Keressük meg azt az $u = u(t, x, y)$ valós-értékű differenciálható függvényt, ami eleget tesz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + x^2 + y^2$$

parciális differenciálegyenletnek és a

$$u(0, x, y) = \frac{x^2}{1 + y^2}$$

peremfeltételnek.

HF 6.2 •••• **Ekvipartíciós tétel.** Legyen u a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R} \times (0,\, \infty) \text{ -n}, \\ u = g, \partial_t u = h & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \text{ -n} \end{cases}$$

hullámegyenlet + kezdetiérték-feladat megoldása. Tegyük fel, hogy g és h kompakt tartójú. A *kinetikus* és *potenciális energiák*:

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u(x,\, t))^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{illetve} \qquad p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u(x,\, t))^2 \,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítandó, hogy

(a) $k(t) + p(t)$ konstans az időben;

(b) $k(t) = p(t)$ minden elég nagy t-re.

HF 6.3 •••• **Tényleg megmaradási törvény és tényleg áram.**

(a) Tegyük fel, hogy $F(0) = 0$, és u egy olyan folytonos integrál-megoldása a

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 & \mathbb{R} \times (0, \infty)\text{-n,} \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n} \end{cases}$$

megmaradási törvénynek, hogy $u(\cdot, t)$ minden $t \geq 0$-ra kompakt tartójú. Mutassuk meg, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{minden } t\text{-re,}$$

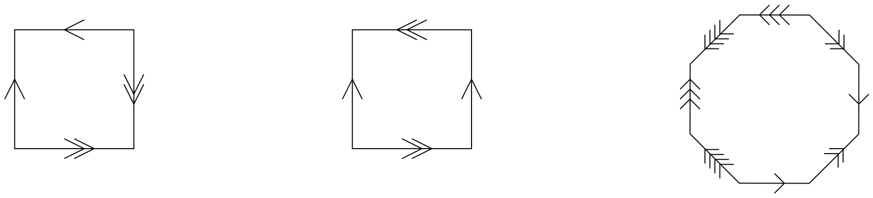
azaz a teljes anyagmennyiség megmarad.

(b) F pedig tényleg áram: mutassuk meg, hogy az $[a, b]$ intevallumban levő teljes anyagmennyiség t-kor

$$\int_a^b u(x, t)\, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^t F(u(a, s))\, \mathrm{d}s - \int_0^t F(u(b, s))\, \mathrm{d}s.$$

Ha nem megy az integrálmegoldás kezelése, fölteheted (egy ponttal kevesebbért), hogy a megoldás sima.

HF 6.4 •• Milyen kétdimenziós topológikus sokaságokat kapunk a három esetben, ha a megfelelő oldalakat összeragasztjuk?



Miért nincs olyan a feladatok között, ahol háromszor is előfordulna ugyanaz az éljelzés?

7. HF: (Beadási határidő: 2013. nov. 15.)

HF 7.1 Az órán definiáltuk az $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ (egység)gömb térképezését két térképpel, a $\varphi : S^2 \setminus \{\acute{E}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és $\psi : S^2 \setminus \{D\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sztereografikus projekciókkal, az $\acute{E} = (0, 0, 1)$ északi, illetve $D = (0, 0, -1)$ déli sarokpontból, a szemközti póluson átmenő vízszintes síkra.

(a) • Mutassuk meg, hogy $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ végtelen sokszor differenciálható leképezés, így ez a két térkép tényleg egy atlaszt alkot. (Útmutatás: használjunk polárkoordinátákat.)

(b) •• Mutassuk meg, hogy az egyenlettel megadás és az implicitfüggvény-tétel ad természetes módon egy 2-dimenziós differenciálható struktúrát S^2-n, amivel az $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ identikus beleképezés differenciálható lesz. (Segítség: hat darab térkép lesz az atlaszban.)

(c) • Mutassuk meg, hogy az (a) és (b) részekben kapott két differenciálható sokaság (ugyazon a topologikus sokaságon két különböző atlasz) egymással diffeomorf.

HF 7.2 (Bónusz) **Egy mátrixcsoport mint diffható sokaság.**

(a) •• Vegyük az $S^3 = \{(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 1\}$ egységgömböt. Az implicitfüggvény-tétel segítségével ez megint természetes módon egy 3-dimenziós differenciálható sokaság, és az $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ identikus beleképezés differenciálható. Hasonlóképpen, az

$$SU(2) := \left\{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \overline{A}^T A = I \text{ és } \det A = 1\right\}$$

mátrixcsoport, mint $\mathbb{C}^4$-nek, vagy inkább $\mathbb{R}^8$-nak, öt darab egyenlettel definiált részhalmaza, természetes módon egy 3-dimenziós diffható sokaság. Igazoljuk, hogy az előző S^3-mal diffeomorf!

(b) •• Természetes módon $SU(2) \times SU(2)$ egy 6-dimenziós diffható sokaság, és az $SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SU(2)$, $(A, B) \mapsto AB$ mátrixszorzás, illetve az $A \mapsto A^{-1}$ invertálás differenciálható leképezések. Azaz $SU(2)$ egy **Lie-csoport**. Ezeket egyszerű de unalmas bizonyítani, nem ez a feladat. Hanem, hogy ezek szerint S^3-on és $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$-n van Lie-csoport struktúra, ellenben bizonyítsuk a sündisznó-fésülési tétel segítségével, hogy S^2-n viszont nem létezhet Lie-csoport struktúra!

Összefoglaló: Ha M egy diffható d-dimenziós sokaság, $p \in M$, akkor T_pM-mel jelöltük a p-beli **érintővektorok** d-dimenziós vektorterét, ahol úgy definiáltunk egy X_p érintővektort, mint a p ponton a $t = 0$ pillanatban átmenő γ görbék szerinti $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\big|_{t=0}$ deriválásoknak egy ekvivalenciaosztályát, azaz azon görbék halmazát, akik minden f-re ugyanazt a deriváltat adják, így jogosan hívjuk őket egy irányba menőeknek. És így a közös eredmény, amit X_pf-fel vagy $X_p(f)$-fel jelölünk, hívható az X_p iránymenti deriváltnak.

Namármost, egy X sima vektormező alatt egy olyan $p \mapsto X_p \in T_pM$ hozzárendelést értünk minden $p \in M$-re, ami azt tudja, hogy tetszőleges $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvényre a $p \mapsto X_p(f)$ derivált, mint $p \in M$ függvénye, megint egy sima függvény. Ezt a deriváltfüggvényt jelöljük Xf-fel. Pld.: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$-re a $\frac{\partial}{\partial x} f$ parciális derivált.

HF 7.3 Ha X és Y sima vektormezők M-n, akkor M minden p pontjában értelmezhetjük az alábbi lineáris operátorokat, melyek a (p kis környezetében értelmezett) f sima függvényeken hatnak: (i) $(XY)_p(f) = X_p(Y(f))$; (ii) $(YX)_p(f) = Y_p(X(f))$, (iii) $[X, Y]_p = (XY)_p - (YX)_p$. Mutassuk meg, hogy

(a) • $(XY)_p$ ugyan lineáris operátor (ellenőrizzük ezt is), de mégsem lehet egy V_p érintővektor, mert nem feltétlen teljesíti a Leibniz-féle $V_p(fg) = V_p(f)\, g + f\, V_p(g)$ szorzat-szabályt. (Segítség: ellenpélda már abban az esetben is van, amikor $M = \mathbb{R}^2$, X és Y parciális deriválások, f és g pedig koordináta-függvények.)

(b) • $[X, Y]_p$-ra már teljesül a Leibniz-szabály. (Ebből következik, hogy az M-en kapunk egy $[X, Y]$ sima vektormezőt. Ezt az X és Y vektormezők kommutátorának vagy **Lie-zárójel**ének is szokták nevezni.)

(c) •• Adjunk meg valamely $\mathbb{R}^n$-ben X és Y vektormezőket, melyekre $[X, Y] \neq 0$.

HF 7.4 • A $\mathbb{T}^2$ tóruszon két fajta Riemann-metrikát is könnyen el tudunk képzelni. Az első a lapos tórusz: a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ faktorizálással az $\mathbb{R}^2$-beli Euklideszi metrikát örökli. A második, hogy veszünk egy $\mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ úszógumi-beágyazást, ez beágyazza a $T_x\mathbb{T}^2$ érintősíkok mindegyikét is $\mathbb{R}^3$-ba, és megszorítjuk a háromdimenziós Riemann-metrikát ezekre az érintősíkokra. Magyarul, két $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$-beli pont távolsága az őket a tóruszon összekötő görbék $\mathbb{R}^3$-beli hosszának infimuma. Igazoljuk, hogy egy lapos tórusz egyetlen úszógumi-tórusszal sem izometrikus. (Segítség: nézzük meg, mennyire kevés pontot ér ez a feladat.)

HF 7.5 Szemléltessük az alábbi vektormezőket és az általuk generált egyparaméteres csoporthatásokat (folyamokat).

(a) •• Tekintsük $\mathbb{R}^3$-n a

$$\Theta(t,\underline{x}) = \begin{pmatrix} \cos at & 0 & \sin at \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin at & 0 & \cos at \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

egyparaméteres csoporthatást, ahol $a > 0$ tetszőleges pareméter. Igazoljuk, hogy tényleg csoporthatás, azaz $\Theta(t+s,\underline{x}) = \Theta(s,\Theta(t,\underline{x}))$. Milyen vektormező generálja $\Theta(t,\underline{x})$-t? (Azaz, micsoda $V_{\underline{x}} := \frac{d}{dt}\Theta(t,\underline{x})|_{t=0}$?) Mutassuk meg, hogy ez a csoporthatás természetes módon megszorítható S^2-re: $\underline{x} \in S^2$ (azaz $|\underline{x}| = 1$) esetén $\Theta(t,\underline{x}) \in S^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Szemléltessük a vektormezőt és a csoporthatást is S^2-n.

(b) • Tekintsünk $\mathbb{T}^2$-re úgy, mint a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzetre, melynek a szemközti oldalait azonosítjuk. Így az (azonosított) négyzetoldalaktól eltekintve az $(x_1,\, x_2)$, $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ koordináták egy térképezését adják $\mathbb{T}^2$-nek. Legyenek az X és az Y vektormezők ezen a térképen $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2}$, illetve $Y = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$ (ezek a teljes $\mathbb{T}^2$-re folytonos módon kiterjeszthetők). Milyenek lesznek a generált egyparaméteres csoporthatások pályái? (Hasonlítsuk össze X és Y pályáit.)

8. HF: (Beadási határidő: 2013. nov. 29.)

HF 8.1 •• Legyen $(X,\mathcal{F},T,\mu)$ egy valszínmértéktartó dinamikai rendszer. A Birkhoff ergodtétel segítségével igazoljuk, hogy a rendszer pontosan akkor ergodikus, ha minden A, B pozitív mértékű halmazra igaz a Cesàro keverés:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Vonjuk le következményként, hogy a rendes keverésből következik az ergodikusság.

HF 8.2 Vegyük az $(X,\mathcal{F},T,\mu)$ valszínmértéktartó dinamikai rendszert, ahol $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathcal{F}$ a Lebesgue-mérhető halmazok, μ a Lebesgue mérték, és $Tx = 2x \pmod 1$. Másrészt legyen $(Y,\mathcal{G},S,\pi)$ az a rendszer, hogy $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{G}$ a szorzat σ-algebra, π a Bernoulli(1/2) szorzatmérték (azaz $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ minden bitje $1/2$ valszínnel 0 illetve 1, a többiektől függetlenül), S pedig a shift operátor: $(Sx)_i = x_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$.

(a) • Igazoljuk, hogy ez a két rendszer *ugyanaz*: létezik mértéktartó $\phi : (X,\mathcal{F},\mu) \longrightarrow (Y,\mathcal{G},\pi)$, mértéktartó inverzzel, amire $\phi \circ T = S \circ \phi$.

(b) •• Igazoljuk, hogy mindkét rendszer keverő. (Tipp: mérhető halmazokat lehet cilindereseményekkel közelíteni.)

(c) •• Ha $(X,\mathcal{F},T,\mu)$ egy valszínmértéktartó dinamikai rendszer, és $\mu(A) > 0$, akkor a Poincaré rekurrencia tételnek köszönhetően definiálható a $T_A : A \longrightarrow A$ indukált leképezés: $x \in A$-ra

$$T_A x = T^{r_A(x)} x, \quad \text{ahol} \quad r_A(x) = \min\{k \geq 1 \,|\, T^k x \in A\}.$$

Legyen $(X,\mathcal{F},T,\mu)$ a fenti kétszerezés, $A = (1/2,\, 1]$. Mi a $T_A x$ leképezés? Határozzuk meg az $r_A(x)$ első visszatérési idő eloszlását (ahol x a Lebesgue mérték szerint véletlen).

HF 8.3 Láttuk órán, hogy az $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ körön a λ Lebesgue mértékkel a $T : x \mapsto x + \alpha$ (mod 1) leképezés, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ irracionális, ergodikus. Tehát a Birkhoff ergodtétel szerint, ha $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) = \int_X f(x)\, \mathrm{d}\lambda(x)$$

teljesül *Lebesgue-majdnem minden* $x \in X$-re.

(a) • Mennyi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2(x+k)$ értéke tipikus x-re?

(b) • Mennyi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2(k)$? *(Tipp: ez az előzőnek könnyű következménye: lehet analízissel, azaz limeszekkel, vagy algebrai identitásokkal is támadni.)*

HF 8.4 **Gauss leképezés és lánctörtek.** Tekintsük a $T : (0,1] \to (0,1]$, $Tx := \frac{1}{x}$ (mod 1) leképezést. (Vagyis Tx legyen az $\frac{1}{x}$ törtrésze, hacsaknem ez 0 lenne, mert akkor Tx legyen 1.) Legyen továbbá $A(x) := \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Vegyük észre, hogy az $a_n(x) := A(T^n x)$ sorozat pont az x lánctört-kifejtését adja:

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}} \to x\,.$$

(a) • Bizonyítsuk, hogy $p_n/q_n \longrightarrow x$ valóban teljesül.

(b) • Találjuk meg az $x = (\sqrt{5}-1)/2$ aranymetszés lánctörtkifejtését: az a_n, p_n, q_n számokat. Mi az $y = \sqrt{2} - 1$ számhoz tartozó $a_n(y)$ sorozat?

(c) • Mutassuk meg, hogy a T leképezésre invariáns az a valószínűségi mérték $(0,1]$-en, aminek a sűrűségfüggvénye (a Lebesgue-re nézve) $\frac{const}{1+x}$. (Mennyi a konstans?)

HF 8.5 (Bónusz) **Fürstenberg multi-rekurrencia tételének legegyszerűbb esete.** Legyen $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ körvonal, λ Lebesgue mérték, $T_\alpha x := x + \alpha$ (mod 1) pedig a forgatás $2\pi\alpha$ szöggel. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subset X$-re és $k \in \mathbb{Z}_+$-ra létezik n, hogy

$$\lambda\big(A \cap T_\alpha^{-n} A \cap \cdots \cap T_\alpha^{-kn} A\big) > 0\,,$$

(a) •• ahol A tetszőleges nyílt halmaz;

(b) • ahol A tetszőleges pozitív mértékű halmaz. Ehhez használjuk az előző részt és a **Lebesgue sűrűségi tételt**, ami első ránézésre kicsit hihetetlen, de igaz, és már volt is róla szó: λ-majdnem minden $x \in A$ pontra,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda\big([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap A\big)}{2\varepsilon} = 1\,,$$

azaz A majdnem minden pontja közelében a pontok túlnyomó többsége A-ban van.

Megjegyzés: Akárcsak a Poincaré rekurrencia tétel, a Fürstenberg is igaz minden valszínmértéktartó dinamikai rendszerre. És amiatt izgalmas, hogy ekvivalens az Abel-díjas **Szemerédi Endre híres tételével**: ha $A \subset \mathbb{Z}$ pozitív fölső sűrűségű, azaz $\limsup_{n\to\infty} \frac{|A\cap\{-n,n\}|}{2n+1} > 0$, akkor minden k-ra található benne k hosszú számtani sorozat: $\{a, a+d, \ldots, a+(k-1)d\} \subset A$.

(c) •• A Lebesgue sűrűségi tétel segítségével bizonyítsuk a Szemerédi tétel egy folytonos változatát: ha $A \subseteq \mathbb{R}$ mérhető halmazra $\lambda(A) > 0$, és $S \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges véges halmaz, akkor létezik $a, t \in \mathbb{R}$, hogy $a + tS \subset A$, azaz S egy homotetikus példánya ott ül A-ban.

9. HF: (Beadási határidő: 2013. dec. 6.)

HF 9.1 •• Magyarországon az átlag 10 percenként járó buszok Poisson pontfolyamat szerint követik egymást. Németországban viszont pontosan 10 percenként (pld minden egyes megállóban megvárják a menetrendszerinti továbbindulási időt). Egy véletlenszerűen egy megállóba érkező utas átlag mennyit vár Mo-on és mennyit No-ban a buszra?

HF 9.2 ••• A ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_t = -1)$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:

(a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$;

(b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_t$;

(c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1,-1) = 1$, $\Phi(-1,1) = 2$, $\Phi(1,-1) = 3$, $\Phi(1,1) = 4$.

A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.

HF 9.3 •••• Alább három Markov lánc szóban, és három eloszlás. Válassz a háromból kettőt, és írd föl a láncok állapottereit, átmenetvalószínűségeit, és igazold, hogy a megfelelő eloszlások stacionáriusak.

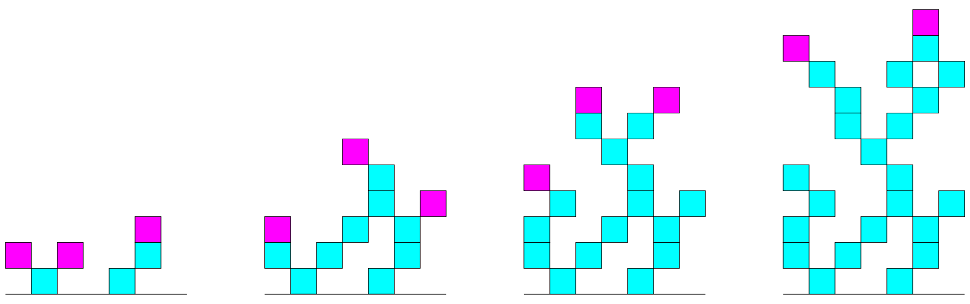
(a) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük, amennyiben az üres. Ha nem üres, akkor nem csinálunk semmit. **Fermi-Dirac eloszlás:** k golyót véletlenszerűen elosztunk $n \geq k$ urnába úgy, hogy mindegyik urnába legfeljebb egy kerülhet.

(b) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Maxwell-Boltzmann eloszlás:** k megkülönböztethető golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.

(c) n, körben elhelyezett urna közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és egy abban levő golyót – ha van – az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Bose-Einstein eloszlás:** k megkülönböztethetetlen golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.

HF 9.4 ••• Egy szabályos érmét dobálok. Várhatóan hányszor kell feldobnom az érmét, hogy FFF-et lássak? És hogy FIF-et lássak? (*Útmutatás*: érdemes egy nyolc állapotú állapotteret felrajzolni, ami az utolsó három dobás eredményét mutatja. Persze ekkor a harmadik érmedobás után van csak értelme állapotokról beszélni.)

HF 9.5 (Bónusz) ••• A Tetris játék egy egyszerű változata: a $[0, K]$ intervallum (mod K), azaz egy kör, egyenletesen választott véletlen $[i, i+1]$ szakaszaira ($i = 0, 1, \ldots, K-1$) egységnégyzetek esnek, amiknek ragacsos a sarka. Legyen R_t a tető mérete t darab négyzet leesése után: azon négyzetek, amik eshettek volna utoljára. Igazoljuk, hogy $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E} R_t = K/3$.



Bocs, ezen az ábrán az intervallumon, nem pedig a körön történik a folyamat.

HF 9.6 (Bónusz) ••• Adjunk példát egy korlátos fokú végtelen $G(V, E)$ gráfra (akár fa is lehet), ami „nagy” abban az értelemben, hogy exponenciális térfogatnövekedésű, azaz létezik $c > 0$ és $q > 1$, hogy minden $x \in V$ csúcsára és minden n-re az x-ből legfeljebb n hosszú úttal elérhető csúcsok száma legalább $c\,q^n$, viszont bolyongás szempontjából kicsi: rekurrens.

Megjegyzés: Tétel, hogy minden tranzitív (homogénnek is szokták hívni: minden pontjából ugyanúgy néz ki) gráf, melynek térfogatnövekedése négyzetesnél nagyobb, az tranziens. Azaz most nagyon ne tranzitív példát keressünk.