Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat (BMETE95MF00)

2014 ősz

Ütemterv és napló

Ami már volt, az napló, ami még nem volt, az még csak terv, tehát változhat. A javasolt irodalmak bővülhetnek, ahogy a tervből napló lesz.

1. **Mérték- és integrálelmélet (szept. 12.):**

   Szigma-algebra, mérték és integrál, Lebesgue-mérték és -integrál, dominált és monoton konvergencia tételek, Fatou lemma, Fubini tétel. Fontos mértékelméleti érdekességek: egy Lebesgue-nemmérhető halmaz, illetve a Banach-Tarski paradoxon. Mértékek Lebesgue dekompozíciója átcsúszott a következő órára.

   - R. B. Ash: *Measure, integration, and functional analysis*
   - W. Rudin: *Real and complex analysis*
   - Jók az angol Wikipedia szócikkek, pld. Measure (mathematics), Lebesgue integration, meg a fentebb linkeltek.

2. **Metrikus terek (szept. 19.):**

   Mértékekről maradt a Lebesgue dekompozíció, lásd fenn, és a Cantor halmazzal konstruált szinguláris mérték.

   Metrikus terek: definíció, faktor-tér, teljesség. Geometriai és függvényteres példák. Topológia kezdetei: nyíltság és folytonosság.

   - A linkelt Wikipedia szócikkek.
   - W. Rudin: *Real and complex analysis*

3. **Topológia (szept. 26.):**

   Homeomorfizmus definíciója, példákkal és nem-példákkal. Topologikus terek. Kompaktság és szekvenciális kompaktság definíciója, néhány példa és nem-példa, mint a megszámlálhatóan végtelen dimenziós Hilbert-tér zárt egységgömbje.

   - A linkelt Wikipedia szócikkek.
   - J. Munkres: *Topology*

   A kompaktság alkalmazásai (okt. 3.): véges metszet tulajdonság, Tyihonov-tétel, Erdős de Bruijn téte Arzelà-Ascoli tétel, Banach-Alaoglu tétel, mértékek gyenge konvergenciájának definíciója és egy-két példa.

4. **Ergodelmélet és dinamikai rendszerek (okt. 3. és 10.)**

   Diszkrét és folytonos idejű topologikus és mértéktartó dinamikai rendszerek definíciója. Racionális és irracionális forgatás illetve billiárd közötti alapvető különbség: periodikusság versus sűrűség. Uniform eloszlás kimondása.

   Bernoulli(p) szorzatmérték definíciója, eltolás ergodikusságának bizonyítása. Perkolációelméleti alkalmazás: $\mathbb{Z}^d$ rácson $\mathbb{P}_p[\exists\ \infty \text{ fürt}] \in \{0,1\}$, és ∞ fürtök száma determinisztikus.

   Birkhoff ergodtétel kimondása, két példával: irracionális forgatás egyenletes eloszlása, illetve Nagy Számok Erős Törvénye.

   - M. Brin, G. Stuck: Introduction to dynamical systems
   - Perkoláció bevezető: G. Pete: Probability and geometry on groups, Section 12.1

5. **Komplex függvénytan (okt 17):**

   Konform leképzések, Cauchy-Riemann egyenletek, harmonikus függvények, Laplace-egyenlet.

   - L. Ahlfors: *Complex analysis*
   - W. Rudin: *Real and complex analysis*

6. **Lineáris parcdiffek (okt 18):**

   Laplace egyenlet Dirichlet határ-problémájának megoldása Brown mozgással, pontosabban diszkrét közelítéssel és bolyongással. Harmonikus mérték definíciója.

   Transzport egyenlet. 1-dimenziós hullámegyenlet.

   - L. Ahlfors: *Complex analysis*
   - Diszkrét harmonikussághoz G. Pete: Probability and geometry on groups, Section 6.1 első három oldala.
   - L. C. Evans: *Partial differential equations*

7. **Lineáris és nemlineáris parcdiffek (okt 31)**

   Többváltozós kalkulus ismétlés. Összenyomhatatlan örvénylésmentes folyadékok. A Green-függvénnyel való konvolúció mint a Laplace operátor inverze: a $\Delta u = f$ megoldása $\mathbb{R}^n$-ben. Burgers egyenlet megoldása karakterisztikákkal, sokk kialakulása.

   - L. C. Evans: *Partial differential equations*

8. **Első beszámoló, utána topologikus sokaságok (nov 7)**.

   n-dimenziós topologikus sokaság definíciója, peremmel és perem nélkül, irányíthatóak és sem. 2-dimenziós kompakt peremenélküliek klasszifikációja. Poincaré sejtés.

9. **Második beszámoló, utána differenciálgeometria alapfogalmai (nov 14)**

   n-dimenziós differenciálható sokaságok. Érintővektorok mint görbék ekvivalenciaosztályai az irány szerinti deriválás szempontjából. Sündisznótétel.

   - W. M. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry
   - V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei

10. **Harmadik beszámoló, utána Riemann sokaságok, görbület. Markov láncok, bolyongások. (nov 28)**

11. **Bolyongások folytatása. Perkoláció és Ising modell (dec 5)**

    Utolsó beszámolós nap (dec 12)

Összetettebb feladatok a beszámolókra:

Ez a lista még bővülhet. A megadott linkek csak kedvcsinálók; adok forrást, amikor kéritek. Magyar nyelvű forrást egyik témához se próbáltam találni, de elképzelhető, hogy valamelyikhez létezik; próbálok segíteni, ha valaki igényli. Értelemszerűen inkább a lista elején vannak olyan témák, amiket már az első beszámolón megérthetnek az előadók és a hallgatók.

1. Kompaktsági tételek: Arzelà-Ascoli és/vagy Banach-Alaoglu (topológia és funkanal)
2. Baire kategória tétel (topológia és funkanal). A Wikipedia szócikk elég borzalmas, viszont jó a W. Rudin: *Functional analysis*, McGraw-Hill 1973, könyv.
3. Hausdorff dimenzió, önhasonló halmazok, fraktálok (mértékelmélet)
4. Julia halmazok, Mandelbrot halmaz (komplex függvénytan, dinamikai rendszerek) *Csengeri Béla, Sánta Botond, nov 7*
5. Entrópia a dinamikai rendszerekben és/vagy statisztikus fizikában. A Wikipedia gyűjtő-oldal.
6. Fürstenberg ergodelméleti megközelítése Szemerédi tételének
7. KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) elmélet. A Wikipedia csak pár szót ír, de vannak további linkek, a Scholarpedia már jóval többet.
8. Gauss leképezés és lánctörtek.
9. Loewner evolúció (a kétdim statfizben fontos SLE egyik alapja; komplex függvénytan)
10. Burgers egyenlet, esetleg mint forgalmi dugók hidrodinamikai limesze. *Csóré András, Fekete Balázs András, Marinovszki Árpád, dec 12*
11. Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet, optimális kontroll, dinamikus programozás, játékelmélet *Kleizer Gábor és ??, nov 7 vagy dec 12?*
12. Az L^∞-Laplace egyenlet és esetleg véletlen kötélhúzás
13. Morse elmélet és/vagy két következménye: Poincaré-Hopf index-tétel és Gauss-Bonnet tétel (differenciálgeometria)
14. Hopf fibráció (differenciálgeometria, Lie-csoportok)
15. Brown-mozgás konstrukciói, alkalmazásai. Egy jegyzet, amit szeretek, itt meg könyv. *Batki Bálint, Pántya Annamária, Varju Tamás, nov 7.* Esetleg Gauss-féle szabad mező.
16. Bolyongások és elektromos hálózatok: Doyle-Snell, Lyons-Peres, PGG Sections 6.1-2
17. Martingálok: legjobb jóslat, harmonikusság stb. Egy híres példa. Ld még PGG Section 6.3.
18. Folytonos spinmodellek a síkban: XY-modell, Mermin-Wagner tétel, Vicsek-féle madárvonulás *Bodó Kinga Sára, Farkas Dániel Gergely, Palotás Julianna, dec 12*
19. Galton-Watson folyamatok. Lsd. pld. PGG Section 12.1 végefelé, de nem tudom még, hogy mi lesz ebből órán.
20. Valami Markov-láncos. Itt egy nagy bevezető könyv. Órán persze lesz róluk szó. *Klausz Milán, Nguyen Tuan Máté, Tatai-Szabó Dóri, dec 12*
21. Orvosi képalkotási eljárások matematikai alapjai *négy orvosi fizikus, nov 7*
22. Bessel-függvények és nukleáris alkalmazásaik *Aracki Csaba, Boros Csanád Örs, Kátai András, dec 12*

Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2014 ősz

Minden héten 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. A piros • pontok bónusz feladatokat jelölnek.

1. HF: (Beadási határidő: 2014. szept. 19.)

HF 1.1 *A Fatou lemma két alkalmazása*

(a) ••• Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mértéktér, $A_n \in \mathcal{F}$ pedig események, melyekre $\mathbb{P}(A_n) > \varepsilon > 0$ minden n-re. Legyen $A = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$, avagy szavakkal: az az esemény, hogy végtelen sok A_n teljesül. Igazold, hogy $\mathbb{P}(A) \geq \varepsilon$.

(b) •• Bizonyítsd a Dominált Konvergencia Tételt: ha egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktéren az f, g és $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényekre $f_n(x) \to f(x)$ majdnem minden $x \in \Omega$-ra, és $|f_n| \leq g$ teljesül, ahol $\int_\Omega g(x)\, \mathrm{d}\mu(x) < \infty$, akkor

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\, \mathrm{d}\mu(x) \to 0, \text{ és így } \int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

(Tipp: alkalmazzuk Fatout a $2g - |f - f_n|$ sorozatra.)

HF 1.2 *A karakterisztikus függvény differenciálhatósága.* Legyen μ egy *valószínűségi mérték* $\mathbb{R}$-en; föltesszük, hogy minden nyílt intervallum mérhető, így az ezek által generált legkisebb σ-algebra minden eleme (amit Borel-halmazoknak hívnak) is az. A μ *n-edik abszolút momentuma* ($n \in \mathbb{N}$-re) az

$$M_n := \int_{\mathbb{R}} |x|^n\, \mathrm{d}\mu(x)$$

integrál, *karakterisztikus függvénye* pedig a

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \psi(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mathrm{d}\mu(x)$$

függvény, ahol i a komplex egységgyök ($i^2 = -1$).

Megjegyzés: Ha μ egy X valószínűségi változó eloszlása, ami annyit tesz, hogy minden B Borel-halmazra $\mu(B) := \mathbb{P}(X \in B)$, akkor $I_n = \mathbb{E}(|X|^n)$ és $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.

Bizonyítsuk be a következő tételeket a Dominált Konvergencia Tétel segítségével:

(a) •••

1. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága). *A fenti jelölésekkel, ha $I_1 < \infty$, akkor ψ folytonosan differenciálható és*

$$\psi'(0) = i \int_{\mathbb{R}} x\, \mathrm{d}\mu(x).$$

(b) •• (bónusz)

2. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága II). *A fenti jelölésekkel, ha $I_n < \infty$, akkor ψ n-szer folytonosan differenciálható és*

$$\psi^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k\, \mathrm{d}\mu(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

HF 1.3 *Integrálok felcserélhetősége.*

(a) •• Legyen $f(x,y) = e^{-xy} - 3e^{-3xy}$. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^1 \int_1^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \;>\; 0 \;>\; \int_1^\infty \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Mi a helyzet a Fubini tétellel?

(b) •• Legyen $f(x,y)$ az $\mathbb{R}^2$ diagonáljának indikátorfüggvénye: $=1$, ha $x=y$, és $=0$ különben. Legyen μ a Lebesgue mérték $\mathbb{R}$-en, ν pedig a számlálómérték: $\nu(A) = |A|$ ha $A \subset \mathbb{R}$ véges, és $=\infty$ különben. (A ν esetén lehet a σ-algebra akár $2^{\mathbb{R}}$, azaz minden részhalmaz mérhető.) Mennyi

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \quad \text{illetve} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\,?$$

Megjegyzés: Ez a példa azt mutatja, hogy a Fubini-tétel általános mértékekre $f \geq 0$ esetén sem feltétlenül igaz. Kell, hogy mindkét mérték σ-véges legyen, ami azt jelenti, hogy az egész tér lefedhető legyen megszámlálható sok véges mértékű részhalmazzal. Ez ν-re nyilván nem teljesül.

2. HF: (Beadási határidő: 2014. szept. 26.)

HF 2.1 A szokásos *triadikus Cantor-halmaz* konstrukcióját módosítsuk a következőképpen:

– Nulladik lépésben tekintsük a $[0,1]$ zárt intervallumot: $D_0 := [0,1]$.
– Első lépésben vágjuk ki ennek a középső nyílt 1/4-ét — így marad 2 darab 3/8 hosszúságú zárt intervallum: $D_1 = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$.
– Második lépésben vágjuk ki mindkettőnek a középső nyílt 1/9-ét, így marad 4 darab $(\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9})$ hosszúságú zárt intervallum — D_2 jelölje ezek unióját.
– És így tovább: az $n-1$-edik lépésben marad 2^n darab zárt intervallum, melyek mindegyikének az n-edik lépésben kivágjuk a középső nyílt $1/(n+1)^2$ hányadát, így D_n már 2^{n+1} darab zárt intervallum uniója.

Végül $D := \cap_{n=0}^{\infty} D_n$.

(a) •• Igazoljuk, hogy D kontinuum számosságú, zárt (azaz a komplementere nyílt), Borel-mérhető halmaz (definíciót lásd HF 1.2-ban), ami nem tartalmaz intervallumot.

(b) •• Mennyi a D Lebesgue-mértéke? (Főképpen: nulla-e?)

(c) •• Vagy egy hasonló Cantor-konstrukció komplementerét véve, vagy teljesen máshogy (pld a racionális számok egészen kis fölhízlalásával), tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz konstruáljunk a $[0,1]$-nek nyílt részhalmazát, mely mindenütt sűrű (azaz minden nyílt intervallumba belemetsz), de a Lebesgue-mértéke kisebb ε-nál.

Emlékeztető: Tetszőleges (X,d) metrikus térben $U \subseteq X$ **nyílt**, ha minden $x \in U$-ra $\exists\,\delta > 0$, hogy a $B_\delta(x) := \{y \in X : d(x,y) < \delta\}$ gömb benne van teljesen U-ban. Egy metrikus térből metrikus térbe való $\Phi : (M, d_M) \longrightarrow (N, d_N)$ leképezés folytonosságának két lehetséges definíciója:

Definíció A: $\forall x \in M$ pontra, és $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ (ez függhet ε-tól és x-től is), hogy $y \in M$, $d_M(x,y) < \delta$ esetén $d_N(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$.

Definíció B: Minden M-beli nyílt U halmaz $\Phi^{-1}(U)$ ősképe nyílt halmaz N-ben.

HF 2.2 •• Mutassuk meg, hogy ha Φ a Definíció B értelmében folytonos, akkor a Definíció A értelmében is az. (Megj: ez még könnyebb, mint az órán bizonyított másik irány.)

HF 2.3 Vegyük az $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ korlátos folytonos függvények $\big(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ metrikus terét, ahol ugye $d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup\big\{|f(x)-g(x)| : x \in \mathbb{R}\big\}$.

(a) •• A remélhetőleg jólismert tétel segítségével, miszerint folytonos függvények uniform limesze is folytonos (pl. http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_limit_theorem), igazoljuk, hogy ez a metrikus tér teljes.

(b) •• Adjunk meg ebben a térben kontinuum sok páronként diszjunkt nyílt részhalmazt. (Ebből következik, hogy ez a metrikus tér nem szeparábilis, azaz nincsen benne megszámlálható mindenütt sűrű részhalmaz, azaz ami minden nyílt halmazba belemetszene.)

HF 2.4 (Bónusz) ••• Bizonyítsuk be, hogy minden X metrikus térhez létezik egy teljes metrikus tér $\hat{X}$, amiben X sűrű! (Pontosabban, létezik $\hat{X}$-ben egy sűrű Y, ami izometrikus X-szel.)

Segítség: legyenek $\hat{X}$ pontjai az X-beli $\{x_n\}$ Cauchy sorozatok ekvivalencia-osztályai, ahol $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ ekvivalens, ha $d(x_n, y_n) \to 0$. Definiáljunk egy nagyon természetes metrikát ezen a téren, igazoljuk, hogy ezzel $\hat{X}$ teljes, majd definiáljuk X egy izometrikus beágyazását $\hat{X}$-be.

3. HF: (Beadási határidő: 2014. okt. 10.)

HF 3.1 Néhány nagyon könnyű állítás a kompaktságról:

(a) • Igazoljuk, hogy kompakt halmaz tetszőleges zárt részhalmaza is kompakt.

(b) •• Bizonyítsuk be, hogy ha X egy metrikus tér, és $K \subseteq X$ kompakt (szekvenciálisan vagy simán, nekem mindegy, ahogy neked könnyebb bizonyítani), akkor K zárt és korlátos is.

(c) • Igazoljuk, hogy egy szekvenciálisan kompakt metrikus tér teljes is.

Definíció: Legyen $\{X_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ topologikus terek egy családja. A **szorzattopológia** a $\prod_{i\in I} X_i$ szorzathalmazon az a legkisebb topológia, amiben az összes olyan $\prod_{i\in I} A_i$ halmaz benne van, ahol $A_i \in \mathcal{T}_i$ minden $i \in I$-re, és csak *véges sok* olyan i van, amire $A_i \neq X_i$. (Ezeket az általánosított téglatesteket, amikben csak véges sok koordinátáról mondunk valamit, a többi koordináta bármi lehet, hívjuk cilinderhalmazoknak.)

HF 3.2 •• Igazoljuk, hogy tetszőleges I halmazra és X topologikus térre, az összes $I \longrightarrow X$ függvények X^I halmazán a **pontonkénti konvergencia** topológiája pontosan a szorzattopológia. Azaz $f_n(i) \to f(i)$ minden $i \in I$-re akkor és csak akkor, ha az X^I szorzattopológiában minden $U \ni f$ nyílt halmazhoz létezik $N \in \mathbb{Z}$, hogy $f_n \in U$ minden $n \geq N$-re.

HF 3.3 ••• Legyen $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ a szorzattopológiával, azaz a pontonkénti konvergencia topológiájával. Az X-en hat a T eltolás: $(Tx)_n = x_{n+1}$, minden $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$-re.

(a) Adjunk meg egy metrikát X-en, ami a szorzattopológiát generálja.

(b) Bizonyítsuk be, hogy egy ilyen jó metrika nem lehet eltolásinvariáns (azaz, hogy $d(Tx, Ty) = d(x,y)$ lenne minden $x, y \in X$-re).

HF 3.4 (Bónusz) ••• Legyen $Y = [0,1]^{[0,1]}$ a szorzattopológiával.

(a) Nézzük a következő $\phi_n \in Y$ elemeket: $\phi_n(x) :=$ az n-edik jegy az x bináris felírásában. Bizonyítsuk be, hogy ebből a sorozatból nem választható ki Y-ban konvergens részsorozat. Tehát Y nem szekvenciálisan kompakt.

(b) Bizonyítsuk be, hogy Y-ban van kontinuum sok páronként diszjunkt nemüres nyílt halmaz.

HF 3.5 •••

(a) Legyen X egy ívszerűen összefüggő topológikus tér, azaz minden $x_0, x_1 \in X$ pontokhoz létezik folytonos görbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, melyre $\gamma(i) = x_i$, $i = 0,1$. Legyen Y egy X-szel homeomorf topológikus tér. Igazoljuk, hogy Y is ívszerűen összefüggő.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^2$ nem homeomorfak egymással! (Segítség: ez sokkal könnyebb, mint ha $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ lenne, szóval nem kell pld. definiálni a dimenzió fogalmát topologikusan. Hanem mondjuk lehetne az előző részt használni.)

4. HF: (Beadási határidő: 2014. okt. 17.)

HF 4.1 • Vegyük az $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tóruszon a $T_t(x,y) := \big(x + t\cos\alpha \pmod 1,\ y + t\sin\alpha \pmod 1\big)$ folytonos idejű topologikus dinamikai rendszert, ami nagyon hasonlít az órán vizsgált biliárdra, csak nem kell tükrözgetni. Igazoljuk, hogy $\tan\alpha \notin \mathbb{Q}$ esetén tetszőleges (x,y) kezdőpontra a $\{T_t(x,y) : t \geq 0\}$ pálya mindenütt sűrű X-ben.

Definíciók: Egy $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ valszínmértéktartó dinamikai rendszer **ergodikus**, ha nincsen nemtriviális T-invariáns részhalmaza, azaz ha $A \in \mathcal{F}$, és $T^{-1}(A) \subset A$, akkor következik, hogy $\mu(A)$ az vagy 0 vagy 1. Informálisan, nem lehet fölbontani a rendszert két nemtriviális részrendszerre, X-ről megszorítva A-ra illetve A^c-re.

Továbbá, a rendszer **keverő**, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{F}$ részhalmazpárra

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)\,.$$

Ez amolyan aszimptotikus függetlenedés: az, hogy eredetileg benne voltam-e A-ban, nem nagyon árul el semmit se arról, hogy n lépés múlva benne vagyok-e B-ben.

HF 4.2 Vegyük az órán látott $(X, \mathcal{F}, \lambda, T)$ valszínmértéktartó diszkrét dinamikai rendszert, ahol $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ az egységhosszú körvonal, $\mathcal{F}$ a Lebesgue-mérhető halmazok, λ a Lebesgue mérték, és $T : x \mapsto x + \alpha \pmod 1$ az $\frac{\alpha}{2\pi}$ szögű forgatás.

Az első két rész az órai észrevételek egyszerű átfordítása:

(a) • Igazoljuk, hogy ha $\alpha \in \mathbb{Q}$, akkor a rendszer nem ergodikus.

(b) • Igazoljuk, hogy ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, és $A \in \mathcal{F}$ egy T-invariáns halmaz, mely tartalmaz valamilyen $(a,b) \subset X$ intervallumot, akkor $A = X$.

(c) •• (Bónusz) Igazoljuk, hogy ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor a rendszer ergodikus. Ehhez használjunk az előző részhez hasonló érvelést, és a **Lebesgue sűrűségi tételt**, ami első ránézésre kicsit hihetetlen, de igaz: tetszőleges $\lambda(A) > 0$ mérhető halmazra, λ-majdnem minden $x \in A$ pontra,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda\big([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap A\big)}{2\varepsilon} = 1\,,$$

azaz A majdnem minden pontja közelében a pontok túlnyomó többsége A-ban van.

(d) • Igazoljuk, hogy teszőleges α esetén a rendszer nem keverő.

HF 4.3 Vegyük az $(X, \mathcal{F}, \lambda, T)$ valszínmértéktartó dinamikai rendszert, ahol $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathcal{F}$ a Lebesgue-mérhető halmazok, λ a Lebesgue mérték, és $Tx = 2x \pmod 1$. Másrészt legyen $(Y, \mathcal{G}, \mu, S)$ az a rendszer, hogy $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{G}$ a szorzat σ-algebra, μ a Bernoulli(1/2) szorzatmérték (azaz $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ minden bitje 1/2 valszínnel 0 illetve 1, a többiektől függetlenül), S pedig a shift operátor: $(Sx)_i = x_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$.

(a) • Igazoljuk, hogy ez a két rendszer *ugyanaz*: létezik mértéktartó $\phi : (X, \mathcal{F}, \lambda) \longrightarrow (Y, \mathcal{G}, \mu)$, mértéktartó inverzzel, amire $\phi \circ T = S \circ \phi$.

(b) • Igazoljuk, hogy az ilyesfajta „ugyanazság” maga után vonja, hogy ha az egyik rendszer ergodikus illetve keverő, akkor a másik rendszer is az.

HF 4.4 A **Poincaré rekurrencia tétel** szerint, ha $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ egy valszínmértéktartó dinamikai rendszer, és $A \in \mathcal{F}$ egy $\mu(A) > 0$ halmaz, akkor létezik $n > 0$, amire $\mu\big(A \cap T^{-n}(A)\big) \neq 0$. Sőt, azon A-beli x pontok halmaza, amikre nincs $n > 0$, hogy $T^n(x) \in A$ lenne (azaz soha nem térnek vissza), az nulla μ-mértékű. Intuitíven: előbb-utóbb minden megismétlődik.

(a) • Bizonyítsuk ezt a tételt. (Tipp: a skatulya-elvből ez nagyon könnyű, könnyebb, mint a netről megkeresni a bizonyítást, elolvasni, megérteni.)

(b) •• A Poincaré rekurrencia tételnek köszönhetően minden $\mu(A) > 0$ halmazhoz definiálható a $T_A : A \longrightarrow A$ indukált leképezés: $x \in A$-ra

$$T_A x = T^{r_A(x)} x, \quad \text{ahol} \quad r_A(x) = \min\{k \geq 1 \,|\, T^k x \in A\}.$$

Legyen $(X, \mathcal{F}, \lambda, T)$ a fenti $Tx = 2x \pmod 1$ kétszerezés, és $A = (1/2, 1]$. Mi a $T_A x$ leképezés? Határozzuk meg az $r_A(x)$ első visszatérési idő eloszlását (ahol x a Lebesgue mérték szerint véletlen).

HF 4.5 **Gauss leképezés és lánctörtek.** Tekintsük a $T : (0,1] \to (0,1]$, $Tx := \frac{1}{x} \pmod 1$ leképezést. (Vagyis Tx legyen az $\frac{1}{x}$ törtrésze, hacsaknem ez 0 lenne, mert akkor Tx legyen 1.) Legyen továbbá $A(x) := \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Vegyük észre, hogy az $a_n(x) := A(T^n x)$ sorozat pont az x lánctört-kifejtését adja:

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n}}} \to x\,.$$

(a) • Bizonyítsuk, hogy $p_n/q_n \to x$ valóban teljesül.

(b) • Találjuk meg az $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ aranymetszés lánctörtkifejtését: az a_n, p_n, q_n számokat. Mi az $y = \sqrt{2} - 1$ számhoz tartozó $a_n(y)$ sorozat?

(c) • Mutassuk meg, hogy a T leképezésre invariáns az a valószínűségi mérték $(0,1]$-en, aminek a sűrűségfüggvénye (a Lebesgue-re nézve) $\frac{const}{1+x}$. (Mennyi a konstans?)

5. HF: (Beadási határidő: 2014. okt. 17.)

Most csak 8 pontnyi kötelező HF van. A múlt hetivel együtt ez is bőven elég.

HF 5.1 Legyen $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ egy valszínmértéktartó dinamikai rendszer, $n \geq 2$ egy egész.

(a) • Mutassuk meg, hogy ha T^n ergodikus (μ-re nézve), akkor T is ergodikus.

(b) • Mutassuk meg, hogy ennek megfordítása általában nem igaz. (Tipp: röhejesen egyszerű dinamikai rendszerre is gondolhatunk.)

HF 5.2 Mondtuk órán, és Bónusz HF volt, hogy az $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ körön a λ Lebesgue mértékkel a $T : x \mapsto x + \alpha \pmod 1$ leképezés, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ irracionális, ergodikus. Tehát a Birkhoff ergodtétel szerint, ha $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) = \int_X f(x)\, \mathrm{d}\lambda(x)$$

teljesül *Lebesgue-majdnem minden* $x \in X$-re.

(a) • Mennyi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin(x + k)$ értéke tipikus x-re?

(b) • Mennyi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin(k)$? *(Tipp: ez az előzőnek könnyű következménye: lehet analízissel, azaz $x \to 0$ limesszel, vagy algebrai identitásokkal is támadni.)*

HF 5.3 Vegyük az $(X, \mathcal{F}, \lambda, T)$ valszínmértéktartó dinamikai rendszert, ahol $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathcal{F}$ a Lebesgue-mérhető halmazok, λ a Lebesgue mérték, és $Tx = 2x \pmod 1$.

(a) • Igazoljuk, hogy ez a rendszer keverő! (Tipp: HF 4.3 szerint lehet $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-et is nézni a balratolással, aminek az ergodikusságát cilinderhalmazokkal nem volt nehéz bizonyítani; hátha a keverés is megy.)

(b) • Igazoljuk, hogy a keverés kaotikusságot (is) jelent: ha egy tetszőlegesen kicsi, rögzített $I \subset X$ intervallumból egyenletes eloszlás szerint veszünk egy x pontot, akkor elég nagy n-re a $T^n x$ eloszlása közel egyenletes az egész X-ben.
(Így pld, ha x helyett egy hozzá közeli y pontnak nézem a pályáját, akkor $T^n y$ tipikusan akárhol lehet, nem pedig valahol közel $T^n x$-hez. Tehát egy kis kezdeti számítási vagy kerekítési hiba gyorsan ellehetetleníti a dinamika követését.)

(c) •• Legyen $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ kicsi, és minden $n \geq 0$-ra x_{n+1} egy X-beli pont legfeljebb ε távolságra Tx_n-től. (Magyarul minden lépésben ε számítási hibát véthetünk.) A **Shadowing Lemma** azt mondja, hogy habár igaz, hogy egy keverő rendszerben x_n-nek már semmi köze sincs $T^n x_0$-hoz, de azért minden N-hez és $\delta > 0$-hoz, ha az $\varepsilon > 0$ pontosság elég kicsi, akkor létezik egy y_0 pont, hogy az $y_n = T^n y_0$ pont minden $n = 0, 1, \ldots, N$ indexre δ-közel van x_n-hez.
(Tehát az $\{x_n\}_{n=0}^N$ ponthalmaz, bár az x_0 pályájáról általában nem ad jó képet, valamilyen pontnak a pályájáról, a dinamikai rendszer egy lehetséges lefutásáról, azért információt szolgáltat, és így a kaotikus rendszerekről is meg lehet érteni egy-két dolgot.)
A feladat: igazoljuk a Shadowing Lemmát a $Tx = 2x \pmod 1$ rendszerre. (Tipp: legyen $y_N := x_N$, és szerkesszük meg az $\{y_n\}_{n=0}^N$ pályát visszafelé: n-re vonatkozó visszafele indukcióval igazoljuk, hogy a $T^{-1}(y_n)$ két pontja közül az egyik mindig legfeljebb ε távolságra van x_{n-1}-től. Így most $\delta = \varepsilon$ működik.)

HF 5.4 (Bónusz) **Fürstenberg multi-rekurrencia tételének legegyszerűbb esete.** Legyen $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ körvonal, λ Lebesgue mérték, $T_\alpha x := x + \alpha \pmod 1$ pedig a forgatás $2\pi\alpha$ szöggel. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subset X$-re és $k \in \mathbb{Z}_+$-ra létezik n, hogy

$$\lambda\big(A \cap T_\alpha^{-n} A \cap \cdots \cap T_\alpha^{-kn} A\big) > 0\,,$$

(a) •• ahol A tetszőleges nyílt halmaz;

(b) • ahol A tetszőleges pozitív mértékű halmaz. Ehhez használjuk az előző részt és a **Lebesgue sűrűségi tételt**, a HF 4.2-höz hasonlóan.

Megjegyzés: Akárcsak a Poincaré rekurrencia tétel, a Fürstenberg is igaz minden valszínmértéktartó dinamikai rendszerre. És amiatt izgalmas, hogy ekvivalens az Abel-díjas **Szemerédi Endre híres tételével**: ha $A \subset \mathbb{Z}$ pozitív fölső sűrűségű, azaz $\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{-n,n\}|}{2n+1} > 0$, akkor minden k-ra található benne k hosszú számtani sorozat: $\{a, a+d, \ldots, a+(k-1)d\} \subset A$.

(c) •• A Lebesgue sűrűségi tétel segítségével bizonyítsuk a Szemerédi tétel egy folytonos változatát: ha $A \subseteq \mathbb{R}$ mérhető halmazra $\lambda(A) > 0$, és $S \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges véges halmaz, akkor létezik $a, t \in \mathbb{R}$, hogy $a + tS \subset A$, azaz S egy homotetikus példánya ott ül A-ban.

6. HF: (Beadási határidő: 2014. okt. 31.)

Most 14 pontnyi kötelező HF van. Végülis két előadás volt, és kicsit hosszabb az idő.

HF 6.1 ••• **Tört-lineáris leképezések.** Tört-lineáris leképezésnek nevezzük a

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

alakú leképezéseket, ahol a, b, c, d komplex számok és a tört nem egyszerűsíthető — vagyis $ad \neq bc$. Egy ilyen leképezés értelmezési tartománya a komplex számsík, kivéve az egyetlen $P = -\frac{d}{c}$ pontot (amit a végtelenbe visz). Ezen a tartományon a leképezés természetesen holomorf, és könnyen ellenőrizhetően konformis is.

Cél: Igazolni akarjuk, hogy a tört-lineáris leképezések a sík minden egyenesét és minden körét egyenesbe vagy körbe viszik át.

(a) Lássuk be, hogy a valós síkon minden kör és egyenes egyenlete

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

alakba írható. Fordítva, minden ilyen egyenlet egyenest vagy kört ír le, amennyiben $B^2 + C^2 > 4AD$.

(b) Írjuk fel a $z = x + iy \mapsto 1/z$ leképezés valós és képzetes részét. Ennek segítségével igazoljuk a $z \mapsto 1/z$ speciális esetre a célt. Igazoljuk a célt a komplex affin transzformációkra is: $z \mapsto pz + q$; $p, q \in \mathbb{C}$, $p \neq 0$.

(c) Állítsunk elő minden törtlineáris leképezést $z \mapsto 1/z$ és $z \mapsto pz + q$ leképezések komponálásaként, és ezzel érjük el a végcélt.

HF 6.2 Dirichlet-feladatot fogunk megoldani a $\mathbb{H}$ felső félsíkon: adott a $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$ határon egy nem feltétlen folytonos valós f függvény, és keresünk $\mathbb{H}$ belsejében olyan harmonikus u függvényeket, melyek a határhoz közelítve f-hez tartanak.

(a) •• Adjuk meg az egyetlen korlátos $u_{a,b}(z)$ megoldását az

$$f(x) = \begin{cases} 1^{\circ}\mathrm{C}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0^{\circ}\mathrm{C}, & \text{egyébként}, \end{cases}$$

Dirichlet-problémának. (Segítség: olyat már megoldottunk, hogy egy szögtartomány két szárán két különböző konstans volt a határfeltétel. Ezt a 180 fokos szögtartományra is meg tudjuk csinálni. Ezután használjuk a Laplace operátor linearitását.) Mik a megoldás izotermái?

(b) • Számoljuk ki a $\phi_z^{\mathbb{H}}(a) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u_{a,a+\varepsilon}(z)}{\varepsilon}$ deriváltat. Ennek volt órán az a neve, hogy a $\partial\mathbb{H}$ határ z-ből nézett $\nu_z^{\mathbb{H}}$ harmonikus mértékének $\frac{\mathrm{d}\nu_z^{\mathbb{H}}(a)}{\mathrm{d}a}$ sűrűségfüggvénye. (Segítség: Cauchy eloszlást kell kapnunk.)

(c) •• Keressünk egy tört-lineáris g_z leképezést, ami $\mathbb{H}$-t a $\mathbb{D}$ egységkörlapra viszi úgy, hogy a tetszőlegesen rögzített $z \in \mathbb{H}$ pont képe a $0 \in \mathbb{D}$ origó. Számoljuk ki a $\nu_z^{\mathbb{H}}$ harmonikus mérték képét g_z mellett, azaz a

$$\phi_0^{\mathbb{D}}(u) = \phi_z^{\mathbb{H}}(g_z^{-1}(u)) \left| g'(g_z^{-1}(u)) \right|$$

sűrűségfüggvényt. Magyarázzuk meg, hogy a Laplace operátor forgatásinvarianciája miatt világos, hogy ennek kellett kijönnie. (Számolási segítség: tegyük föl az egyszerűség kedvéért, hogy $z = i$. És érdemes $u = \cos\alpha + i \sin\alpha$ után $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$-val kifejezni mindent.)

HF 6.3 (a) •• Mit tesz az egységkörrel, annak belsejével és külsejével a $J : z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ leképezés? Vázold föl annak a körvonalnak a képét, aminek a középpontja $-\varepsilon + i\delta$, pici $\varepsilon, \delta > 0$ számokkal, mondjuk kb. $\delta = 0.05$, és $(1+\varepsilon)^2 + \delta^2 = (1+\delta)^2$, a sugara pedig $1 + \delta$. Mire emlékeztet a kapott görbe?

(b) •• (Bónusz) Hasonlóan a 6.2 (c) feladathoz, adjuk meg az egységkörvonalon vett egyenletes mérték képét a J leképezés mellett. Vegyük észre, hol robban föl a sűrűségfüggvény. Ezért működik a villámhárító.

HF 6.4 •• Keressük meg azt az $u = u(t, x, y)$ valós-értékű differenciálható függvényt, ami eleget tesz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)^2$$

parciális differenciálegyenletnek és a

$$u(0, x, y) = \frac{x^2}{1+2y^2}$$

peremfeltételnek.

HF 6.5 •• Legyen az $u(x)$ skalármennyiség az $x \in \mathbb{R}^n$ függvénye, és $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Tegyük föl, hogy u radiális, azaz x-től csak r-en keresztül függ, $u(x) = v(r)$ alakú. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \qquad \text{és} \qquad \triangle u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot v'(r).$$

Ebből vezessük le, hogy ha u harmonikus $\forall\, x \neq 0$-ban, akkor $v(r) = b \log r + c$, ha $n = 2$, illetve $v(r) = b/r^{n-2} + c$, ha $n \geq 3$. (Amennyiben kellene közdiff segítég: érdemes $\log'(v'(r))$-re gondolni.)

7. HF: (Beadási határidő: 2014. nov. 14.)

Most 13 pontnyi kötelező HF van, 4 pontnyi bónusz, és két hét munkaidő.

Kalkulus alapok (A) Gauss-Green, avagy Newton-Leibniz többdimenzióban:

$$\int_U u_{x_i}\ \mathrm{d}x = \int_{\partial U} u\nu^i\ \mathrm{d}S\,,$$

ahol u_{x_i} parciális deriválás, ν^i pedig a ∂U-ben kifelé mutató normálvektor i-edik koordinátája.

(B) u helyett uv-re alkalmazva az előzőt:

$$\int_U u_{x_i} v\ \mathrm{d}x = -\int_U u v_{x_i}\ \mathrm{d}x + \int_{\partial U} uv\nu^i\ \mathrm{d}S\,,$$

a parciális integrálás formulája.

(C) uv helyett $u_{x_i}v$-re alkalmazva az előzőt, majd i-re szummázva:

$$\int_U (\Delta u)v\ \mathrm{d}x = -\int_U \langle \nabla u, \nabla v\rangle\ \mathrm{d}x + \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\ \mathrm{d}S\,,$$

ahol $\langle x, y\rangle$ a skalárszorzat.

(D) Egy $V = (V_1, \ldots, V_d)$ vektormező koordinátáira alkalmazva a Gauss-Greent, majd szummázva:

$$\int_U \operatorname{div} V\ \mathrm{d}x := \int_U \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\ \mathrm{d}x = \int_{\partial U} \langle V, \nu\rangle\ \mathrm{d}S =: \mathrm{flux}_{\partial U}\, V\,,$$

ami Gauss divergencia-tétele.

HF 7.1 •• (Bónusz) Vegyük a D 45^o-os szögtartományt $\mathbb{C}$-ben, melyet az $e = \mathbb{R}_{\geq 0}$ és $f = e^{\pi i/4}\mathbb{R}_{\geq 0}$ félegyenesek határolnak. Keressünk $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sima vektormezőt, mely

- a határon $V\big|_e = (1, 0)$ és $V\big|_f = (-1, -1)/\sqrt{2}$,
- örvénylésmentes (azaz rotációmentes, ami pontosan akkor, ha $V = \nabla\phi$ valamilyen $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre), és
- összenyomhatatlan (ami a fenti (D) szerint ugyanaz, mint $\operatorname{div} V = 0$ mindenütt).

Segítség: előadáson megállapítottuk, hogy $0 = \operatorname{div} V = \operatorname{div} \nabla\phi = \Delta\phi$, tehát először is egy harmonikus fgv-t keresünk, és azt biztos könnyebb lenne a $\mathbb{H}$ 180^o-os szögtartományban megtenni, majd konforminvarianciát használni.

HF 7.2 ••• Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ egy kompakt tartomány. Igazolandó, hogy a

$$\begin{cases} -\Delta u = f & D\text{-n}, \\ \quad\ u = g & \partial D\text{-n} \end{cases}$$

peremfeltételes Poisson egyenlet egyetlen u megoldására $I(u) = \min\{I(w) : w \in \mathcal{A}\}$, ahol

$$I(w) := \int\limits_D \frac{1}{2}\|\nabla w(x)\|^2 - w(x)f(x)\ \mathrm{d}x$$

energia, és $\mathcal{A} := \{w : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ differenciálható}, \ w\big|_{\partial D} = g\}$.

Segítség: ha u megoldás és $w \in \mathcal{A}$, akkor $0 = \int_D (-\Delta u - f)(u - w)\ \mathrm{d}x$. Erre engedjük rá a fenti (C) formulát, majd használjuk (és igazoljuk!) a $|\langle\nabla u, \nabla w\rangle| \leq \frac{\|\nabla u\|^2+\|\nabla w\|^2}{2}$ egyenlőtlenséget.

Fordítva, ha u minimalizálja az energiát, akkor tetszőleges $w \in \mathcal{A}$ függvényre a $t = 0$ pont minimalizálja az $i(t) := I(u + tw)$ függvényt, így $i'(0) = 0$, minden w-re, ami adni fogja, hogy u megoldás kell, hogy legyen.

HF 7.3 ••• **Egydimenziós hőegyenlet.** Legyen $u(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

pontosan akkor, ha

$$4zv''(z) + (2 + z)v'(z) = 0 \qquad (z > 0). \tag{1}$$

(b) Mutassuk meg, hogy (1) általános megoldása

$$v(z) = a\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-s/4}s^{-1/2}\,\mathrm{d}s + b\,.$$

(Lásd http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_differential_equation, ha közönséges diffegyenletekből segítség kell.)

(c) Lássuk be, hogy ha u egy megoldás, akkor $\partial_x u$ is az.

(d) Tehát: differenciáljuk az előbb kapott $u(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ -t x szerint, majd válasszuk meg megfelelően a a konstanst, hogy pont az egydimenziós fundamentális megoldást kapjuk:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

Megjegyzés: Azért választottuk így az a-t, mert ennek a megoldásnak a hely szerinti integrálja minden t-re 1. Honnan is tudjuk ezt?

HF 7.4 •• (Egy könnyű apróság bónuszként)

(a) Igazoljuk, hogy ha D egy korlátos tartomány sima határral, amin u harmonikus, akkor $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} u \, \mathrm{d}S \geq 0$.

(b) A fenti egyenlőtlenség nem meglepő, hisz a maximum-elv miatt természetes, hogy nagyértékű határpontok (mondjuk $u > 0$) lokális maximumok szeretnek lenni, így ott általában $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0$ várható, a kisértékűek (mondjuk $u < 0$) pedig lokális minimumok szeretnek lenni, így ott általában $\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0$ várható. Igaz-e az átlag helyett majdnem minden határpontban is, hogy $\frac{\partial u}{\partial \nu} u \geq 0$?

HF 7.5 **Integrál-megoldás, megmaradási törvény, áram.**

(a) • Legyenek $F, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények, F diffható, $F(0) = 0$, és tegyük föl, hogy az $u = u(x,t) : \mathbb{R} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mindkét változójában diffható fgv kielégíti a

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty)\text{-n}, \\ u = g & \mathbb{R} \times \{t = 0\}\text{-n} \end{cases}$$

megmaradási törvényt. Legyen $v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ egy sima tesztfüggvény, kompakt tartóval (mindkét változójában). Parciális integrálással igazoljuk, hogy

$$(3) \qquad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u \, \partial_t v + F(u) \, \partial_x v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty g v|_{t=0} \, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Ez azért érdekes, mert most azt mondhatjuk, hogy egy nem feltétlen diffható $u(x,t)$ függvény egy úgynevezett **integrál-megoldása** a (2) egyenletnek, ha minden kompakt tartójú sima v függvényre kielégíti a (3) egyenletet.

(b) •• Ahogy az órai Burgers példában, legyen $F(u) = u^2/2$ és

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ 1 - x & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ha} \quad 1 \leq x\,. \end{cases}$$

A karakterisztikák módszerével láttuk, hogy $0 \leq t \leq 1$-re majdnem mindenütt diffható a megoldás:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \leq t \\ \dfrac{1-x}{1-t} & \text{ha} \quad t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ha} \quad 1 \leq x\,. \end{cases}$$

Legyen most $s(t) = \frac{1+t}{2}$, és $t \geq 1$-re is definiáljuk az $u(x,t)$ függvényt:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x < s(t) \\ 0 & \text{ha} \quad s(t) < x\,. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy az így kapott $u(x,t)$ függvény egy integrál-megoldás!

Segítség: a v tesztfüggvény kompakt tartóját föl lehet három részre vágni, $A \subset \{(x,t) : t \leq 1\}$, $B \subset \{(x,t) : t \geq 1,\ x < s(t)\}$, $C \subset \{(x,t) : t \geq 1,\ s(t) < x\}$, és külön kezelni az integrálokat, a határoknál vigyázva.

(c) •• Miért hívják **megmaradási törvénynek**? Tegyük föl, hogy u egy olyan folytonos integrál-megoldása a (2)-nak, hogy $u(\cdot,\, t)$ minden $t \geq 0$-ra kompakt tartójú. Mutassuk meg, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,\, t)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{minden } t\text{-re},$$

azaz a teljes anyagmennyiség megmarad.

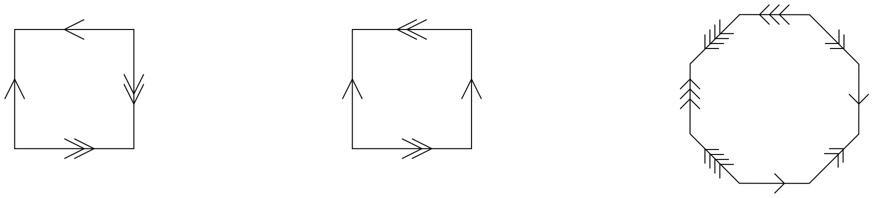
(d) •• F pedig az **anyag-áram**: mutassuk meg, hogy az $[a,\, b]$ intevallumban levő teljes anyagmennyiség t-kor

$$\int_a^b u(x,\, t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^t F(u(a,\, s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t F(u(b,\, s))\,\mathrm{d}s.$$

Segítség: ha (c) és (d)-ben nem megy az integrál-megoldás kezelése, fölteheted (egy ponttal kevesebbért), hogy a megoldás sima.

8. HF: (Beadási határidő: 2014. nov. 28.)

HF 8.1 •• Milyen kétdimenziós topológikus sokaságokat kapunk a három esetben, ha a megfelelő oldalakat összeragasztjuk?



Miért nincs olyan a feladatok között, ahol háromszor is előfordulna ugyanaz az éljelzés?

HF 8.2 Az órán definiáltuk az $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ (egység)gömb térképezését két térképpel, a $\varphi : S^2 \setminus \{\acute{E}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és $\psi : S^2 \setminus \{D\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sztereografikus projekciókkal, az $\acute{E} = (0, 0, 1)$ északi, illetve $D = (0, 0, -1)$ déli sarokpontból, a szemközti póluson átmenő vízszintes síkra.

(a) • Mutassuk meg, hogy $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ végtelen sokszor differenciálható leképezés, így ez a két térkép tényleg egy atlaszt alkot. (Útmutatás: használjunk polárkoordinátákat.)

(b) •• Mutassuk meg, hogy az első sorbeli egyenlettel megadás és az implicitfüggvénytétel ad természetes módon egy 2-dimenziós differenciálható struktúrát S^2-n, amivel az $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ identikus beleképezés differenciálható lesz. (Segítség: órán nem sikerült kimondanom az implicitfgv tételt — itt a wikipedia link. Na most, hány darab térkép legyen az atlaszban? Függvényképekre akarjuk fölvágni a gömbfelszínt, nyílt értelmezési tartományokkal, és hát hány nyílt félgömbbel tudjuk lefedni a teljes gömbfelszínt?)

(c) • (Bónusz) Mutassuk meg, hogy az (a) és (b) részekben kapott két differenciálható sokaság (ugyazon a topologikus sokaságon két különböző atlasz) egymással diffeomorf.

HF 8.3 (Bónusz) **Egy mátrixcsoport mint diffható sokaság.**

(a) •• Vegyük az $S^3 = \{(x,y,z,v) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2+v^2 = 1\}$ egységgömböt. Az implicitfüggvény-tétel segítségével ez megint természetes módon egy 3-dimenziós differenciálható sokaság, és az $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ identikus beleképezés differenciálható. Hasonlóképpen, az

$$SU(2) := \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \overline{A}^T A = I \text{ és } \det A = 1 \right\}$$

mátrixcsoport, mint $\mathbb{C}^4$-nek, vagy inkább $\mathbb{R}^8$-nak, öt darab egyenlettel definiált részhalmaza, természetes módon egy 3-dimenziós diffható sokaság. Igazoljuk, hogy az előző S^3-mal diffeomorf!

(b) •• Természetes módon $SU(2) \times SU(2)$ egy 6-dimenziós diffható sokaság, és az $SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SU(2)$, $(A,B) \mapsto AB$ mátrixszorzás, illetve az $A \mapsto A^{-1}$ invertálás differenciálható leképezések. Azaz $SU(2)$ egy **Lie-csoport**. Ezeket egyszerű de unalmas bizonyítani, nem ez a feladat. Hanem, hogy ezek szerint S^3-on és $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$-n van Lie-csoport struktúra, ellenben bizonyítsuk a sündisznófésülési tétel segítségével, hogy S^2-n viszont nem létezhet Lie-csoport struktúra!

Összefoglaló: Ha M egy diffható d-dimenziós sokaság, $p \in M$, akkor T_pM-mel jelöltük a p-beli **érintővektorok** d-dimenziós vektorterét, ahol úgy definiáltunk egy X_p érintővektort, mint a p ponton a $t = 0$ pillanatban átmenő γ görbék szerinti $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\big|_{t=0}$ deriválásoknak egy ekvivalenciaosztályát, azaz azon görbék halmazát, akik minden f-re ugyanazt a deriváltat adják, így jogosan hívjuk őket egy irányba menőeknek. És így a közös eredmény, amit X_pf-fel vagy $X_p(f)$-fel jelölünk, hívható az X_p iránymenti deriváltnak.

Namármost, egy X sima vektormező alatt egy olyan $p \mapsto X_p \in T_pM$ hozzárendelést értünk minden $p \in M$-re, ami azt tudja, hogy tetszőleges $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvényre a $p \mapsto X_p(f)$ derivált, mint $p \in M$ függvénye, megint egy sima függvény. Ezt a deriváltfüggvényt jelöljük Xf-fel. Pld.: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$-re a $\frac{\partial}{\partial x} f$ parciális derivált.

HF 8.4 Ha X és Y sima vektormezők M-n, akkor M minden p pontjában értelmezhetjük az alábbi lineáris operátorokat, melyek a (p kis környezetében értelmezett) f sima függvényeken hatnak: (i) $(XY)_p(f) = X_p(Y(f))$; (ii) $(YX)_p(f) = Y_p(X(f))$, (iii) $[X,Y]_p = (XY)_p - (YX)_p$. Mutassuk meg, hogy

(a) • $(XY)_p$ ugyan lineáris operátor (ellenőrizzük ezt is), de mégsem lehet egy V_p érintővektor, mert nem feltétlen teljesíti a Leibniz-féle $V_p(fg) = V_p(f)\,g + f\,V_p(g)$ szorzat-szabályt. (Segítség: ellenpélda már abban az esetben is van, amikor $M = \mathbb{R}^2$, X és Y parciális deriválások, f és g pedig koordináta-függvények.)

(b) • $[X,Y]_p$-ra már teljesül a Leibniz-szabály. (Ebből következik, hogy az M-en kapunk egy $[X,Y]$ sima vektormezőt. Ezt az X és Y vektormezők kommutátorának vagy **Lie-zárójel**ének is szokták nevezni.)

(c) •• Adjunk meg valamely $\mathbb{R}^n$-ben X és Y vektormezőket, melyekre $[X,Y] \neq 0$.

HF 8.5 Szemléltessük az alábbi vektormezőket és az általuk generált folyamokat (avagy egyparaméteres csoporthatásokat).

(a) •• Tekintsük $\mathbb{R}^3$-n a

$$\Theta(t,\underline{x}) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at & 0 \\ -\sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad t \in \mathbb{R}$$

egyparaméteres csoporthatást, ahol $a > 0$ tetszőleges paraméter. Igazoljuk, hogy tényleg csoporthatás t-ben, azaz $\Theta(t+s,\underline{x}) = \Theta(s, \Theta(t,\underline{x}))$. Milyen vektormező generálja $\Theta(t, \underline{x})$-t? (Azaz, micsoda $V_{\underline{x}} := \frac{d}{dt}\Theta(t, \underline{x})|_{t=0}$?) Mutassuk meg, hogy ez a csoporthatás természetes módon megszorítható S^2-re: $\underline{x} \in S^2$ (azaz $|\underline{x}| = 1$) esetén $\Theta(t, \underline{x}) \in S^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Szemléltessük a vektormezőt és a csoporthatást is S^2-n.

(b) • Tekintsünk $\mathbb{T}^2$-re úgy, mint a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzetre, melynek a szemközti oldalait azonosítjuk. Így az (azonosított) négyzetoldalaktól eltekintve az $(x_1,\ x_2)$, $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ koordináták egy térképezését adják $\mathbb{T}^2$-nek. Legyenek az X és az Y vektormezők ezen a térképen $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + 5\frac{\partial}{\partial x_2}$, illetve $Y = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{5}\frac{\partial}{\partial x_2}$ (ezek a teljes $\mathbb{T}^2$-re folytonos módon kiterjeszthetők). Milyenek lesznek a generált egyparaméteres csoporthatások pályái? (Hasonlítsuk össze X és Y pályáit.)

9. HF: (Beadási határidő: 2013. dec. 12.)

Összefoglaló: Ha $f : M_1 \longrightarrow M_2$ egy diffható leképezés n_i-dimenziós diffható sokaságok között, akkor a $D_p f : T_p M_i \longrightarrow T_{f(p)} M_2$ **derivált** az az a lineáris leképezés a megfelelő érintőterek között, mely a p ponton átmenő γ görbék egy szokásos egyirányba-menő ekvivalenciaosztályát az $f(\gamma)$ görbék ekvivalenciaosztályába viszi. (Könnyű látni, hogy ekvivalens görbéknek tényleg ekvivalens a képe, és hogy a kapott $D_p f$ leképezés tényleg lineáris.)

Na most, ha $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ egy diffeomorfizmus két Riemann-sokaság között, akkor nem nehéz látni, hogy ő pontosan akkor egy **izometria**, azaz teljesül rá, hogy $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ az indukált

$$d_i(x, y) := \inf \left\{ \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{g_i}\, \mathrm{d}t \ :\ [0, 1] \xrightarrow{\gamma} M_i \text{ diffható}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}$$

metrikákkal, ha a $D_p f$ derivált minden $p \in M_1$ pontban megőrzi a Riemann metrikus bilináris formákat: $g_2\big(D_p f(v),\, D_p f(w)\big) = g_1(v, w)$, minden $v, w \in T_p M_1$ érintővektorpárra.

HF 9.1 (Bónusz; nem nehéz, de kicsit unalmas) •• Igazoljuk az előző ekvivalenciát az izometrikusságról.

HF 9.2 Legyen $\mathbb{D} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ a nyílt egységkörlap, és tekintsük a következő Riemann-metrikát:

$$g(v, w) := \frac{4(v, w)_{\mathsf{Eucl}}}{\big(1 - \|z\|^2_{\mathsf{Eucl}}\big)^2}, \quad \text{ha } v, w \in T_z\mathbb{D}\,.$$

Ez a Bolyai-féle **hiperbolikus sík** Poincaré-féle körmodellje.

(a) •• Idézzük föl az általánosított-kör-tartó Möbius törtlineáris leképezéseket HF 6.1-ből. Igazoljuk, hogy pontosan azok lesznek a $\mathbb{D}$ ön-homeomorfizmusai, melyek

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z + b}{\bar{b}z + 1}$$

alakúak, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{D}$. Igazoljuk azt is, hogy minden $x, y \in \mathbb{D}$ pontpárra létezik ilyen homeomorfizmus, ami x-et az y-ba viszi!

(b) •• Igazoljuk, hogy az (a)-beli Möbiusok hiperbolikus izometriák is.

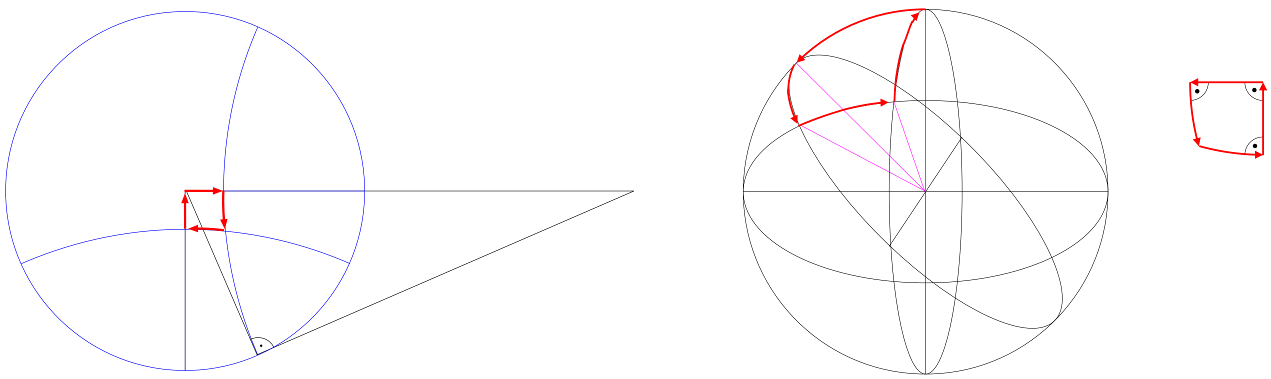
(c) (Bónusz) •••• Igazoljuk, hogy a hiperbolikus geodetikusok pontosan azon általánosított körök, melyek merőlegesen metszik a $\partial\mathbb{D}$ körvonalat. (Ehhez végig kell rágnod magad a geodetikusok variálásának elméletén. Mondjuk az (a,b) részek miatt elég azt igazolni, hogy a $\mathbb{D}$ középpontján átmenő geodetikusok pontosan az euklideszi egyenesek.)

HF 9.3 **(A görbület definíciója.)**

(a) •• $(\mathbb{D}, g)$ továbbra is a hiperbolikus sík körmodellje. Legyen $u, v \in T_0\mathbb{D}$ két merőleges egységvektor, és legyen $\tau_\varepsilon : T_0\mathbb{D} \longrightarrow T_0\mathbb{D}$ az a forgatás, amit úgy kapunk, hogy egy w érintővektort körbetolunk párhuzamosan az u és v irányokba induló ε hosszú geodetikus darabok által feszített geodetikus négyszögön — lásd az ábra bal oldalát. Most legyen

$$K(u, v)w := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tau_\varepsilon w - w}{\varepsilon^2} .$$

Lényegében az $(u, v, w, t) \mapsto \big(K(u, v)w, t\big)_g$ négyváltozós multilineáris formát hívják **görbületi tenzor**nak.



Számoljuk ki a $\big(K(u, v)u, v\big)_g$ értéket! Vegyük észre, hogy ez negatív: a körbetolás a v-vel ellenkező irányba forgatja el u-t.

(b) •• Most számoljuk ki ugyanezt a $\big(K(u, v)u, v\big)_g$ értéket az r sugarú gömb felszínén, S^2_r-n is — lásd az ábra jobb oldalát! Vegyük észre, hogy most pozitív számot kaptunk.
Megjegyzés: eszerint az S^2 nemnulla görbülete az $SO(3)$ forgatáscsoport nemkommutativitása miatt van.

HF 9.4 •• Magyarországon az átlag 10 percenként járó buszok Poisson pontfolyamat szerint követik egymást. Németországban viszont pontosan 10 percenként (pld minden egyes megállóban megvárják a menetrendszerinti továbbindulási időt). Egy véletlenszerűen egy megállóba érkező utas átlag mennyit vár Mo-on és mennyit No-ban a buszra?

HF 9.5 •••• Alább három Markov lánc szóban, és három eloszlás. Válassz a háromból kettőt, és írd föl a láncok állapottereit, átmenetvalószínűségeit, és igazold, hogy a megfelelő eloszlások stacionáriusak.

(a) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük, amennyiben az üres. Ha nem üres, akkor nem csinálunk semmit. **Fermi-Dirac eloszlás:** k golyót véletlenszerűen elosztunk $n \geq k$ urnába úgy, hogy mindegyik urnába legfeljebb egy kerülhet.

(b) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Maxwell-Boltzmann eloszlás:** k megkülönböztethető golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.

(c) n, körben elhelyezett urna közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és egy abban levő golyót – ha van – az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Bose-Einstein eloszlás:** k megkülönböztethetetlen golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.

HF 9.6 A Médiarendőrség a TV-nézéssel kapcsolatban a következő állapotokat figyelte meg: 1 (sosem néz TV-t), 2 (csak közszolgálati műsorokat néz), 3 (gyakran TV-zik), 4 (TV-függő), 5 (agyhalott). Ezen állapotok közti átmeneteket egy Markov lánccal lehet modellezni, melynek átmenetmátrixa

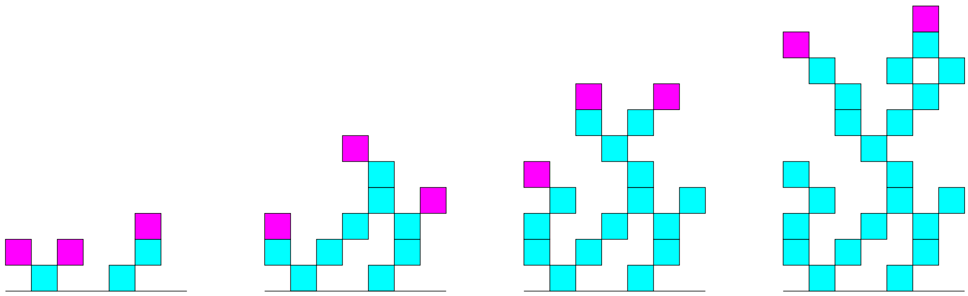
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát pld. közszolgálati-rajongó senki nem lesz csak úgy — arra születni kell.

(a)•• 2-es állapotból indulva, mi a valószínűsége, hogy az 5-ös állapot előbb bekövetkezik, mint a 1-s, azaz, hogy egy közszolgálati műsorokat néző agyhalottként végzi?

(b)•• Várhatóan mennyi ideig tart amíg egy közszolgálati műsorokat néző leszokik a TV-zésről, vagy pedig eléri az agyhalott állapotot?

HF 9.7 (Bónusz) ••• A Tetris játék egy egyszerű változata: a $[0, K]$ intervallum (mod K), azaz egy kör, egyenletesen választott véletlen $[i, i+1]$ szakaszaira ($i = 0, 1, \ldots, K-1$) egységnégyzetek esnek, amiknek ragacsos a sarka. Legyen R_t a tető mérete t darab négyzet leesése után: azon négyzetek, amik eshettek volna utoljára. Igazoljuk, hogy $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}R_t = K/3$.



Bocs, ezen az ábrán az intervallumon, nem pedig a körön történik a folyamat.

HF 9.8 (Bónusz) ••• Adjunk példát egy korlátos fokú végtelen $G(V, E)$ gráfra (akár fa is lehet), ami „nagy” abban az értelemben, hogy exponenciális térfogatnövekedésű, azaz létezik $c > 0$ és $q > 1$, hogy minden $x \in V$ csúcsára és minden n-re az x-ből legfeljebb n hosszú úttal elérhető csúcsok száma legalább $c\,q^n$, viszont bolyongás szempontjából kicsi: rekurrens.

Megjegyzés: Tétel, hogy minden tranzitív (homogénnek is szokták hívni: minden pontjából ugyanúgy néz ki) gráf, melynek térfogatnövekedése négyzetesnél nagyobb, az tranziens. Azaz most nagyon ne tranzitív példát keressünk.