

# Egy dugómodell

Fiatalkorú oktatók napja

Balázs Márton

MTA-BME Sztochasztika Kutatócsoport

Budapest, 2008. június 3.

## Dugók

A dugó kezdete

A dugó vége

## Az örökifjúság

A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

Stacionárius eloszlás

A végtelen modell

## Nagy léptékben

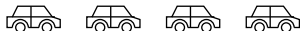
A dugó kezdete

A dugó vége

# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



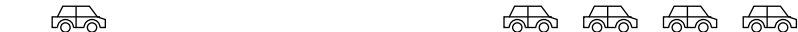
# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete





# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete





# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete





# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete





# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete





# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



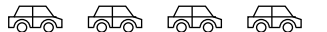
# A dugó kezdete



# A dugó kezdete

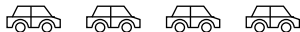


# A dugó kezdete

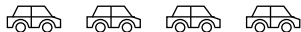




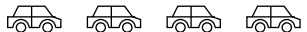
# A dugó kezdete



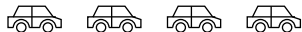
# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



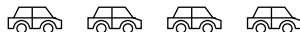
# A dugó kezdete



# A dugó kezdete



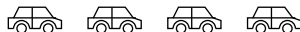
# A dugó kezdete



Meglátjuk az álló autókat  $\rightsquigarrow$  intenzív fékezés.

A dugó kezdete éles.

# A dugó kezdete

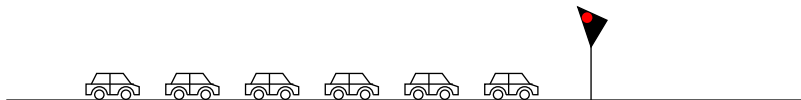


Meglátjuk az álló autókat  $\rightsquigarrow$  intenzív fékezés.

A dugó kezdete éles.

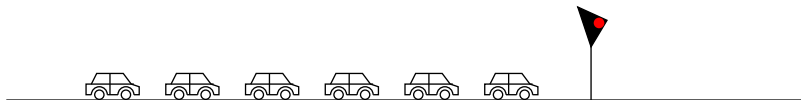
Többek közt ezért veszélyes hely az autópálya.

# A dugó vége

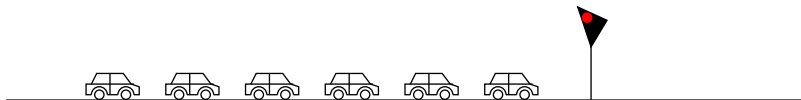




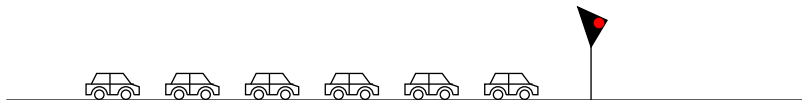
# A dugó vége



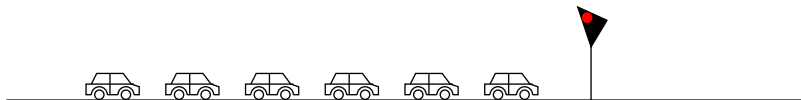
# A dugó vége



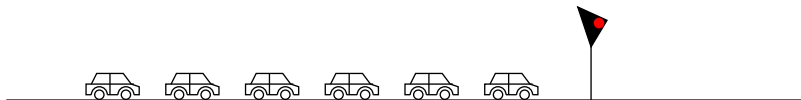
# A dugó vége



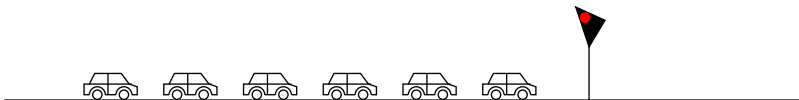
# A dugó vége



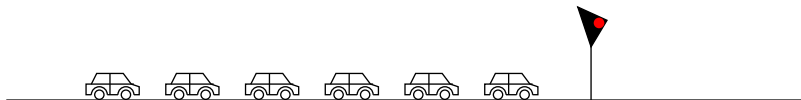
# A dugó vége



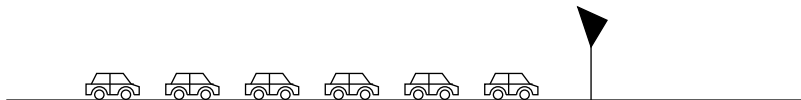
# A dugó vége



# A dugó vége

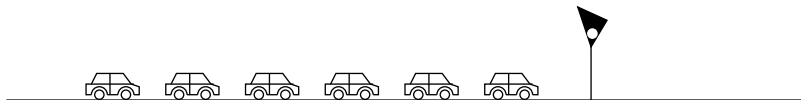


# A dugó vége

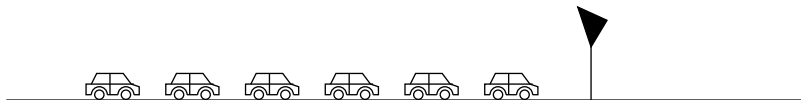




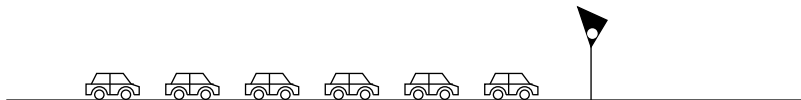
# A dugó vége



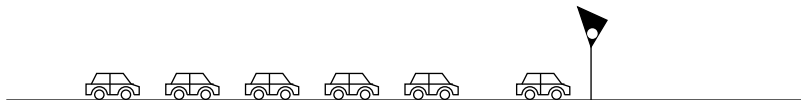
# A dugó vége



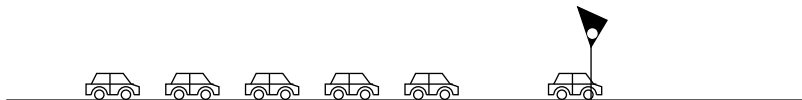
# A dugó vége



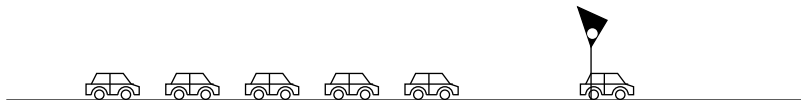
# A dugó vége



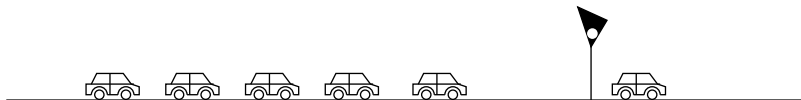
# A dugó vége



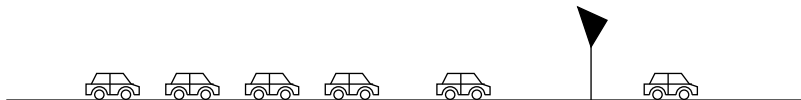
# A dugó vége



# A dugó vége

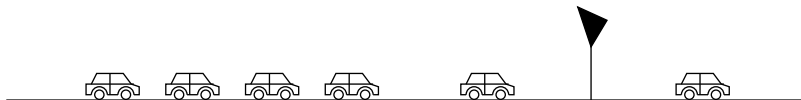


# A dugó vége

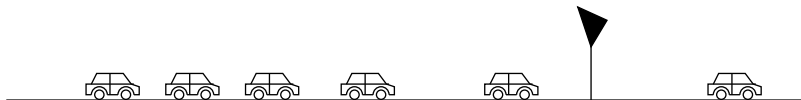




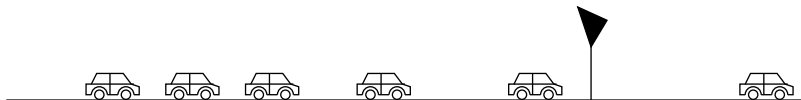
# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





# A dugó vége



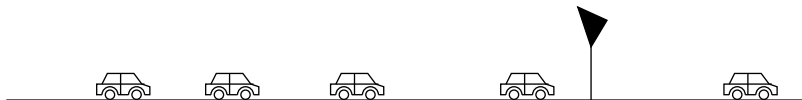
# A dugó vége



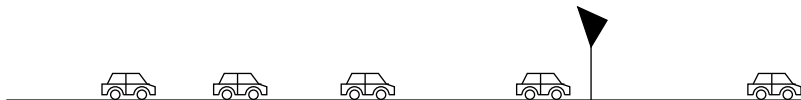
# A dugó vége



# A dugó vége



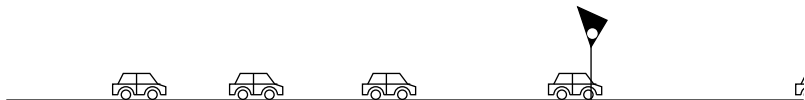
# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





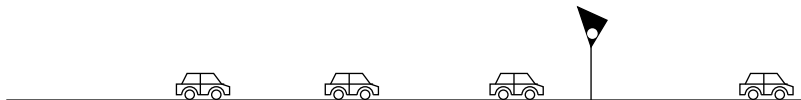
# A dugó vége



# A dugó vége



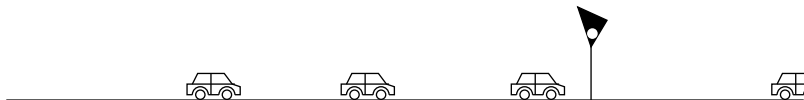
# A dugó vége



# A dugó vége



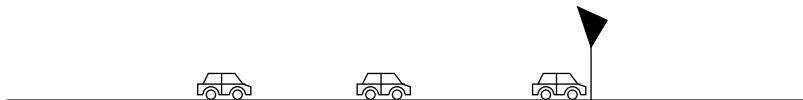
# A dugó vége



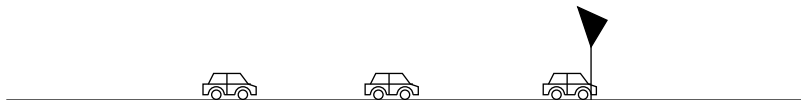
# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



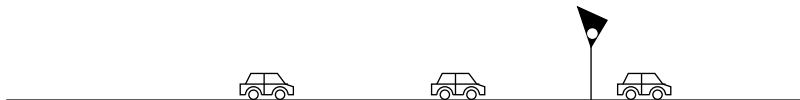
# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



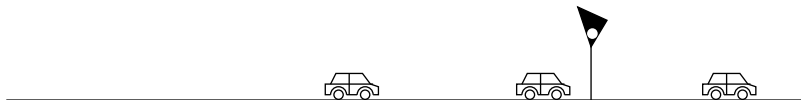
# A dugó vége



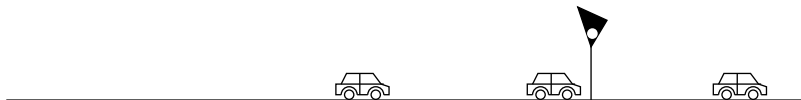
# A dugó vége



# A dugó vége

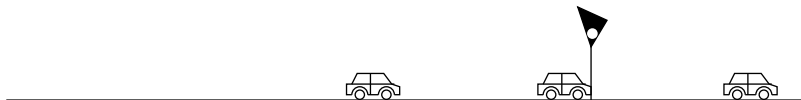


# A dugó vége

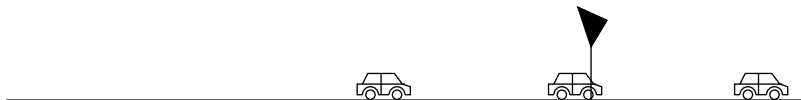




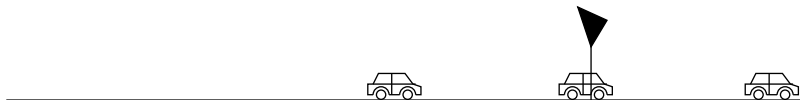
# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



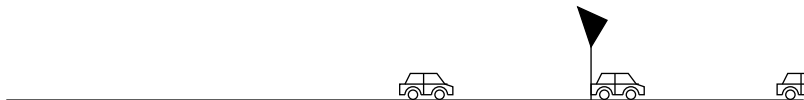
# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége





# A dugó vége



# A dugó vége



# A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzóó gyorsítás

# A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzódo gyorsítás

**A dugó vége elmosódott.**

# A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzódo gyorsítás

**A dugó vége elmosódott.**

Miért van ekkora különbség a dugó kezdete és vége között?

# A dugó vége



A hátsóbbaknak lassú, elhúzódó gyorsítás

**A dugó vége elmosódott.**

Miért van ekkora különbség a dugó kezdete és vége között?

Teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat: **egy magyarázat**

## Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.  
Legyen  $T > 0$  olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

## Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.  
Legyen  $T > 0$  olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő  $t$ -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb  $s$  ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor  $T > t$ , hányadrésztében lesz  $T > t + s$  is igaz?



## Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.  
Legyen  $T > 0$  olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő  $t$ -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb  $s$  ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor  $T > t$ , hányadrésztében lesz  $T > t + s$  is igaz?

Válasz:

$$\frac{\mathbf{P}\{T > t + s\}}{\mathbf{P}\{T > t\}} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-t}} = e^{-s}.$$

## Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.  
Legyen  $T > 0$  olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő  $t$ -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb  $s$  ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor  $T > t$ , hányadrészében lesz  $T > t + s$  is igaz?

Válasz:

$$\frac{\mathbf{P}\{T > t + s\}}{\mathbf{P}\{T > t\}} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-t}} = e^{-s} = \mathbf{P}\{T > s\}.$$

Ugyanaz, mint  $\mathbf{P}\{T > s\}$ ,  $t$ -től függetlenül!

## Az örökifjúság

Kersünk egy véletlen időt, mely nem emlékszik a múltjára.  
Legyen  $T > 0$  olyan véletlen idő, hogy

$$\mathbf{P}\{T > t\} = e^{-t} \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Feltéve, hogy ez az idő  $t$ -kor még nem telt le, mi a valószínűsége, hogy újabb  $s$  ideig sem telik le?

Azaz: azon eseteknek, amikor  $T > t$ , hányadrészében lesz  $T > t + s$  is igaz?

Válasz:

$$\frac{\mathbf{P}\{T > t + s\}}{\mathbf{P}\{T > t\}} = \frac{e^{-(t+s)}}{e^{-t}} = e^{-s} = \mathbf{P}\{T > s\}.$$

Ugyanaz, mint  $\mathbf{P}\{T > s\}$ ,  $t$ -től függetlenül!

Megtaláltuk az örökifjúság titkát.

# Az örökifjúság

 ← ő lesz a  $T$  idő után megszólaló örökifjú vekker

# Az örökifjúság

 ← ő lesz a  $T$  idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici  $t$  időn belül megszólal?

## Az örökifjúság

 ← ő lesz a  $T$  idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici  $t$  időn belül megszólal?



$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$

# Az örökifjúság

 ← ő lesz a  $T$  idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici  $t$  időn belül megszólal?

$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$



↪ Mi a valószínűsége, hogy két független   pici  $t$  időn belül megszólal?

# Az örökifjúság

 ← ő lesz a  $T$  idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici  $t$  időn belül megszólal?

$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$

↪ Mi a valószínűsége, hogy két független   pici  $t$  időn belül megszólal?

$$\mathbf{P}\{T \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{T \leq t\} \simeq t^2 + \text{hiba} = \text{hiba}.$$





## Az örökifjúság

 ← ő lesz a  $T$  idő után megszólaló örökifjú vekker

↪ Mi a valószínűsége, hogy egy  pici  $t$  időn belül megszólal?


$$\mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{T > t\} = 1 - e^{-t} \simeq 1 - (1 - t) + \text{hiba} = t + \text{hiba}.$$

↪ Mi a valószínűsége, hogy két független   pici  $t$  időn belül megszólal?


$$\mathbf{P}\{T \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{T \leq t\} \simeq t^2 + \text{hiba} = \text{hiba}.$$

→ Több vekker, még kisebb valószínűség.

# Az örökifjúság

↪ Mi a valószínűsége, hogy  $k$  független  közül kicsi  $t$  időn belül *egyik sem* szólal meg?

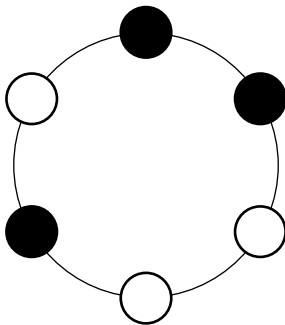
## Az örökifjúság

↪ Mi a valószínűsége, hogy  $k$  független  közül kicsi  $t$  időn belül *egyik sem* szólal meg?

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\text{egyik sem szólal meg}\} &= \mathbf{P}\{T > t\}^k \\ &= e^{-kt} \\ &\simeq (1 - kt) + \text{hiba.}\end{aligned}$$

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

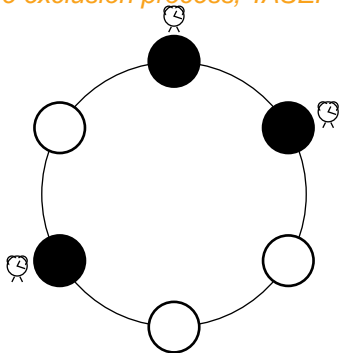
*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*




$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

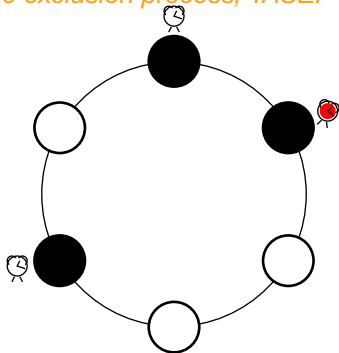


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

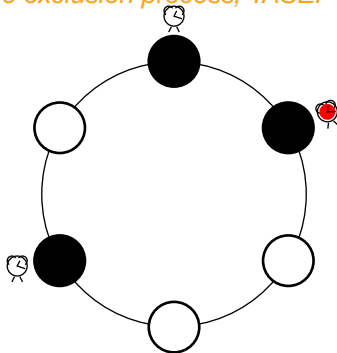


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

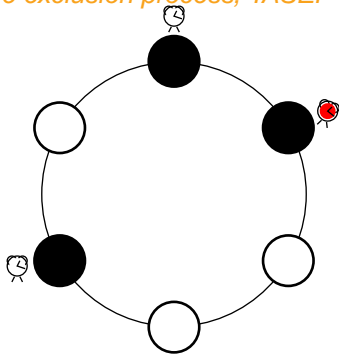


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*



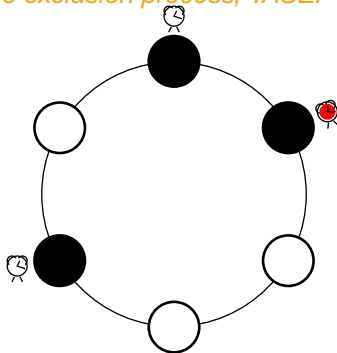
$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.




# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

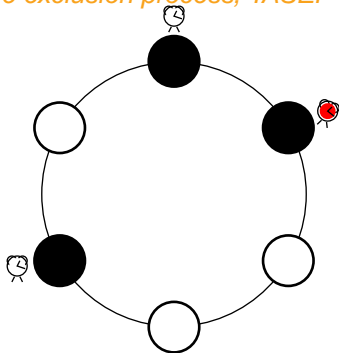


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

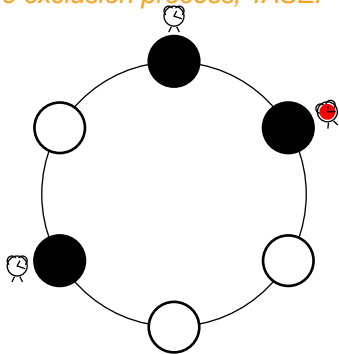


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

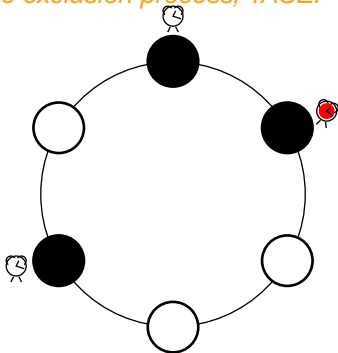


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

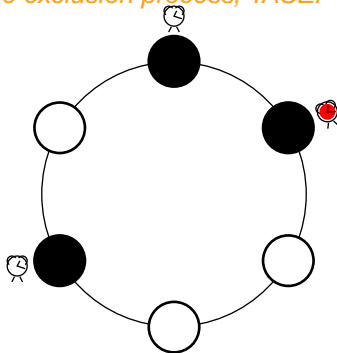


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

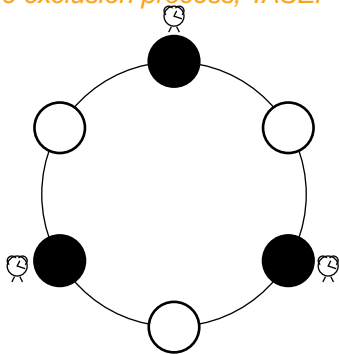


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

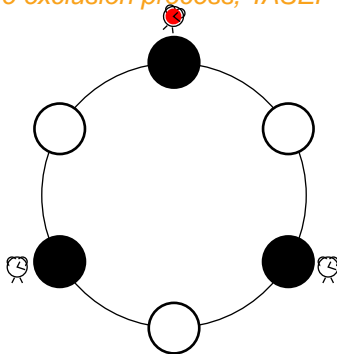


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

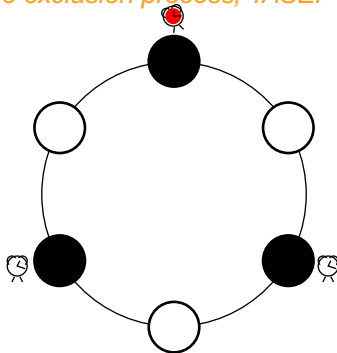


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*



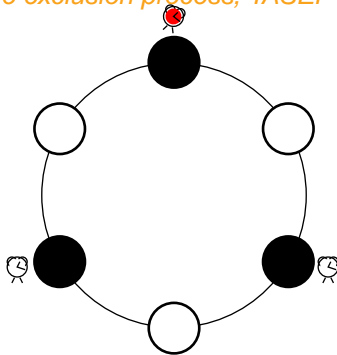
$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.




# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

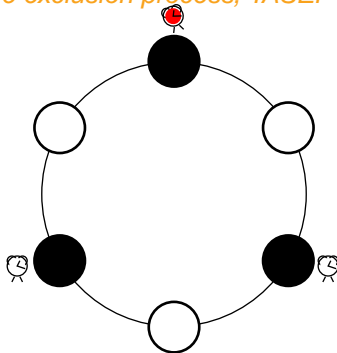


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

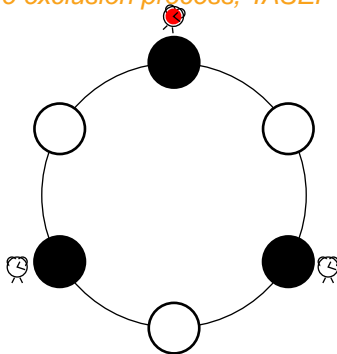


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

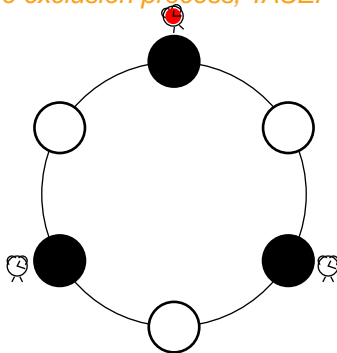


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

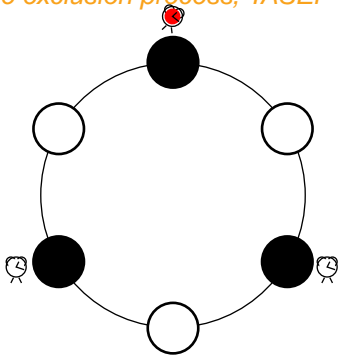


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

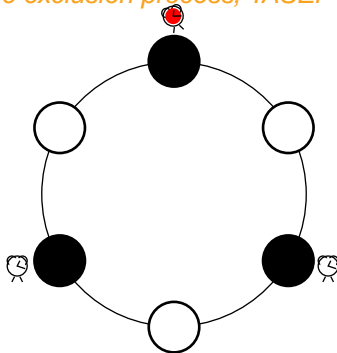


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

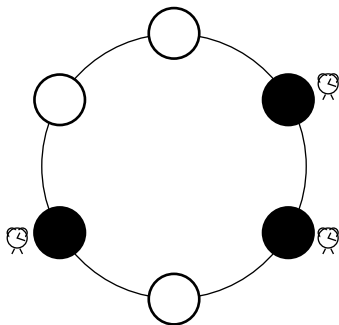


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

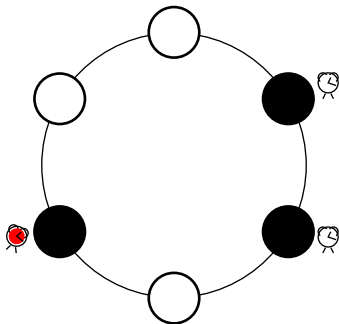


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*



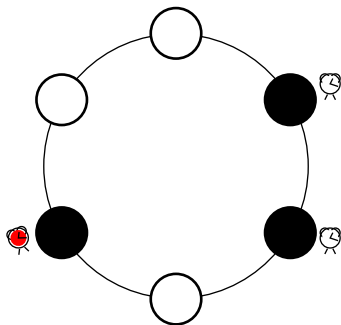
$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.




# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

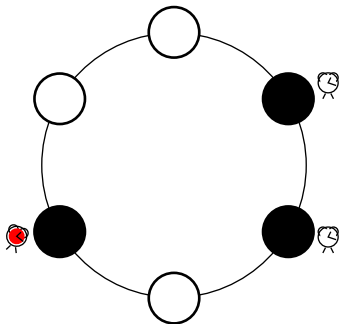


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

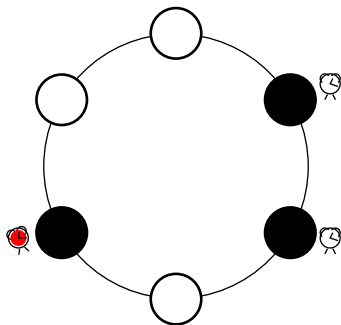


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

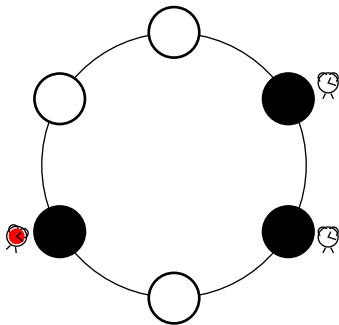


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

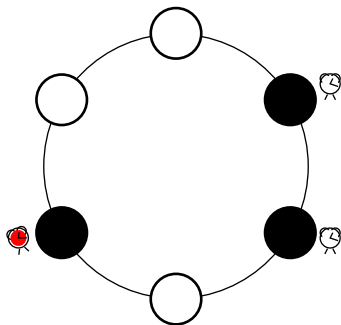


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

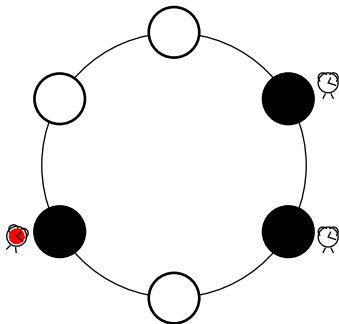


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

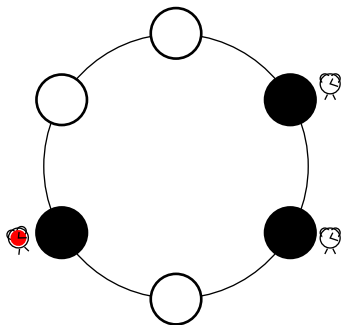


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

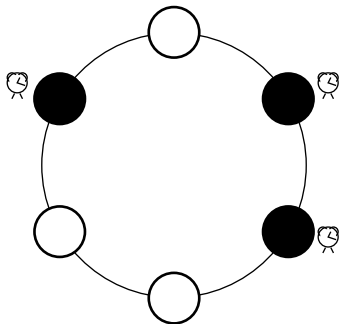


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*



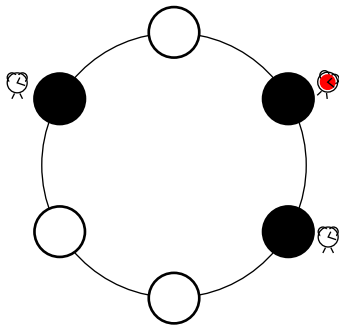
$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.




# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

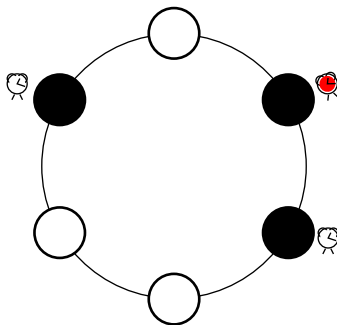


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

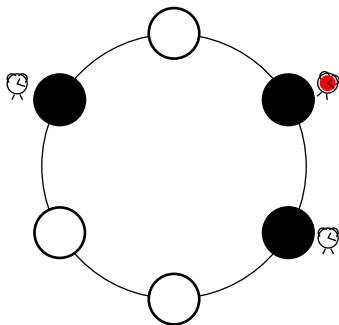


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

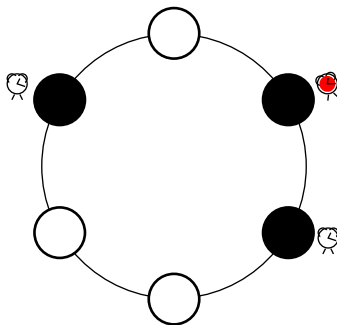


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

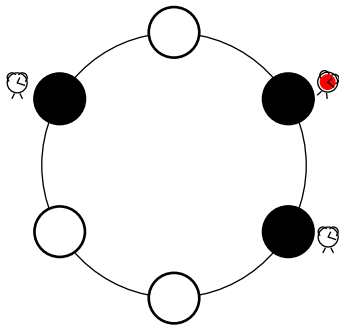


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

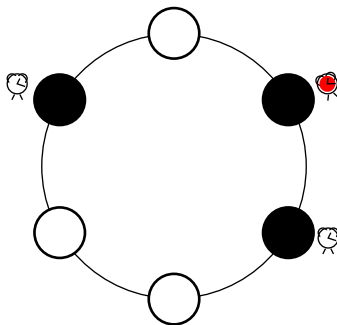


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

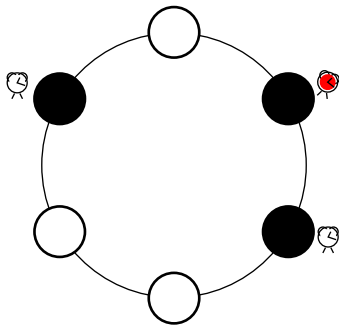


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

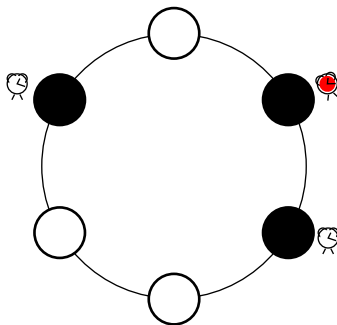


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.


Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.

# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*



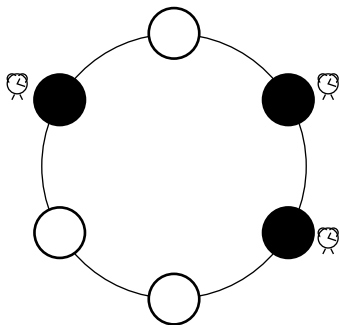
$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra.



# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*

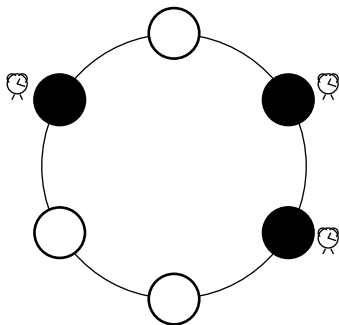


$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra. **De néha a golyó blokkolva van.**


# A teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat

*Totally asymmetric simple exclusion process, TASEP*



$N$  lehetséges helyen  $m$  golyó.

Mindegyik a saját -ére hallgat, amikor az csörög, ugrani próbál egyet jobbra. De néha a golyó blokkolva van.

Örökifjú, független -k  $\Rightarrow$  ha ismerem a jelent, nem kell tudnom a múltat. *Markov-tulajdonság, könnyen kezelhető.*

# Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat  $\rightsquigarrow$  *eloszlásokról* van értelme beszélni.

# Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat  $\rightsquigarrow$  *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

# Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat  $\rightsquigarrow$  *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

## Tétel

Rögzített  $N$  és  $m$  mellett az az eloszlás, amely szerint minden konfiguráció (**persze  $N$  helyen elosztott  $m$  golyó!**) egyenlő valószínű, stacionárius.

# Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat  $\rightsquigarrow$  *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

## Tétel

Rögzített  $N$  és  $m$  mellett az az eloszlás, amely szerint minden konfiguráció (**persze  $N$  helyen elosztott  $m$  golyó!**) egyenlő valószínű, stacionárius.

## 1. Megjegyzés

Ekkor minden  $m$  golyós konfiguráció valószínűsége  $1 / \binom{N}{m}$ .

# Stacionárius eloszlás

Véletlen folyamat  $\rightsquigarrow$  *eloszlásokról* van értelme beszélni.

Mi lehet a stacionárius **azaz időben nem változó** eloszlás?

## Tétel

Rögzített  $N$  és  $m$  mellett az az eloszlás, amely szerint minden konfiguráció (**persze  $N$  helyen elosztott  $m$  golyó!**) egyenlő valószínű, stacionárius.

### 1. Megjegyzés

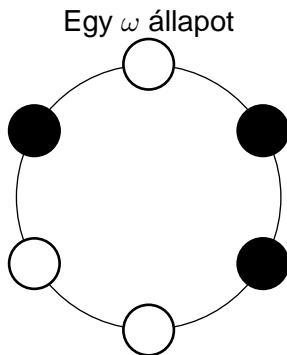
Ekkor minden  $m$  golyós konfiguráció valószínűsége  $1 / \binom{N}{m}$ .

### 2. Megjegyzés

Nincs is más stacionárius eloszlás adott  $N$ ,  $m$ -mellett.

# Stacionárius eloszlás

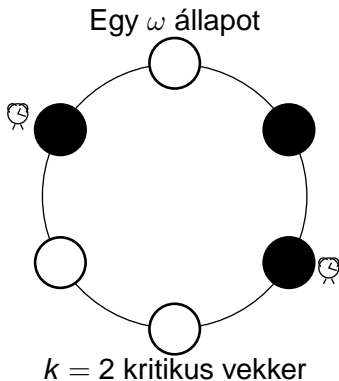
## Majdnem-bizonyítás





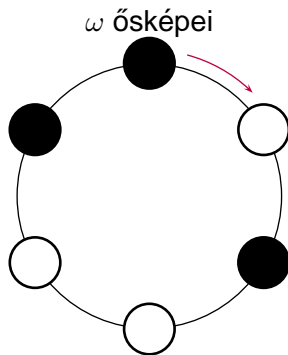
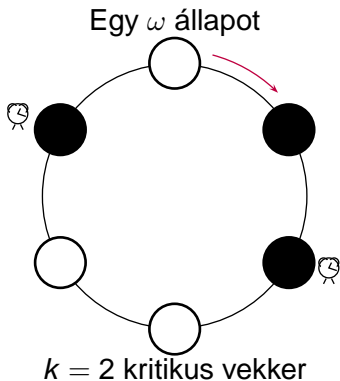
# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás



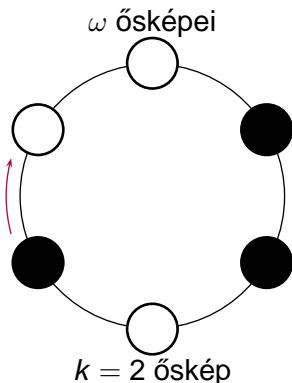
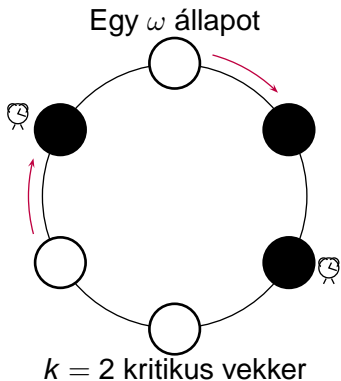
# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás



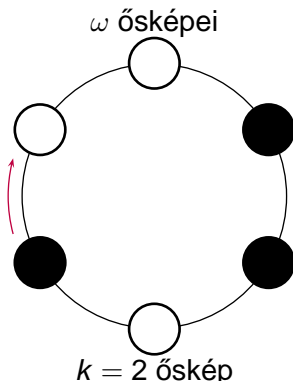
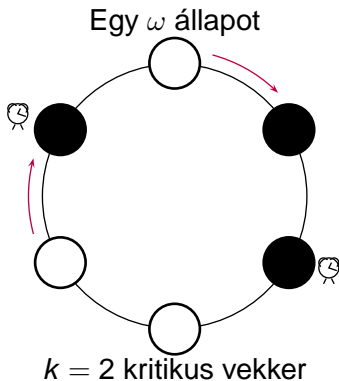
# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás



# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás



$\omega$  kritikus vekkereinek száma =  $\omega$  ősképeinek száma =  $k$

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy  $s$ -kor minden ( $m$  golyós) állapot valószínűsége  $p$ . Mi az  $\omega$  állapot valószínűsége kicsi  $t$  idő múlva?

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy  $s$ -kor minden ( $m$  golyós) állapot valószínűsége  $p$ . Mi az  $\omega$  állapot valószínűsége kicsi  $t$  idő múlva?

$$\mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\}$$

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy  $s$ -kor minden ( $m$  golyós) állapot valószínűsége  $p$ . Mi az  $\omega$  állapot valószínűsége kicsi  $t$  idő múlva?

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\ = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és } t \text{ ideig nem lép}\} \\ & + \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ egy ősképe volt, és } \omega\text{-ba lépett}\} \\ & + \text{hiba (legalább 2 lépés történt a kicsi } t \text{ idő alatt)} \end{aligned}$$

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

Tegyük fel, hogy  $s$ -kor minden ( $m$  golyós) állapot valószínűsége  $p$ . Mi az  $\omega$  állapot valószínűsége kicsi  $t$  idő múlva?

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és } t \text{ ideig nem lép}\} \\
 & + \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ egy ősképe volt, és } \omega\text{-ba lépett}\} \\
 & + \text{hiba (legalább 2 lépés történt a kicsi } t \text{ idő alatt)} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{R} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{R} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba}
 \end{aligned}$$



# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{R} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{R} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba}
 \end{aligned}$$

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba}
 \end{aligned}$$

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + k \cdot p \cdot t + \text{hiba}
 \end{aligned}$$

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 &= \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 &+ \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 &+ \text{hiba} \\
 &= p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba} \\
 &= p \cdot (1 - kt) + k \cdot p \cdot t + \text{hiba} = p + \text{hiba}.
 \end{aligned}$$

# Stacionárius eloszlás

## Majdnem-bizonyítás

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\{s + t\text{-kor } \omega\} \\
 = & \mathbf{P}\{s\text{-kor } \omega \text{ és a } k \text{ db. kritikus } \textcircled{?} \text{ egyike sem szól}\} \\
 & + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} \mathbf{P}\{s\text{-kor } \eta \text{ és pont a megfelelő kritikus } \textcircled{?} \text{ szól}\} \\
 & + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + \sum_{\eta \text{ az } \omega \text{ ősképe}} p \cdot t + \text{hiba} \\
 = & p \cdot (1 - kt) + k \cdot p \cdot t + \text{hiba} = p + \text{hiba}.
 \end{aligned}$$

Itt hiba  $\simeq t^2$ , ezért egyre több és egyre kisebb  $t$  hosszú intervallumra összeadogatva is még kicsi marad. □

# A végtelen modell

Legyen most  $N$  (a helyek száma) és  $m$  (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy  $m/N \simeq \varrho$ .

# A végtelen modell

Legyen most  $N$  (a helyek száma) és  $m$  (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy  $m/N \simeq \varrho$ .

$\varrho$  a részecskesűrűség, annak valószínűsége, hogy egy adott helyen van golyó.

## A végtelen modell

Legyen most  $N$  (a helyek száma) és  $m$  (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy  $m/N \simeq \rho$ .

$\rho$  a részecskesűrűség, annak valószínűsége, hogy egy adott helyen van golyó.

Az, hogy egy helyen van-e golyó és a szomszéd helye(ke)n van-e golyó egyre kevésbé függenek egymástól.



## A végtelen modell

Legyen most  $N$  (a helyek száma) és  $m$  (a golyók száma) egyre nagyobb úgy, hogy  $m/N \simeq \varrho$ .

$\varrho$  a részecskesűrűség, annak valószínűsége, hogy egy adott helyen van golyó.

Az, hogy egy helyen van-e golyó és a szomszéd helye(ke)n van-e golyó egyre kevésbé függenek egymástól.

Határértékben a  $\mathbb{Z}$ -n kapunk egy modellt, melynek stacionárius eloszlása az, hogy minden helyen van golyó  $\varrho$ , nincs golyó  $1 - \varrho$  valószínűséggel, különböző helyekre függetlenül.

## Nagy léptékben

Nézzük a végtelen modellt messziről, és hagyjuk sokáig fejlődni. Ha a  $\rho$  kezdeti sűrűséget lassan, azaz nagy távolság-léptékben ( $X$ ) változtatjuk, akkor a modell eloszlása nem lesz stacionárius, hanem a részecskék sűrűsége lassan, azaz nagy idő-léptékben ( $T$ ) változni fog.

# Nagy léptékben

Nézzük a végtelen modellt messziről, és hagyjuk sokáig fejlődni. Ha a  $\varrho$  kezdeti sűrűséget lassan, azaz nagy távolság-léptékben ( $X$ ) változtatjuk, akkor a modell eloszlása nem lesz stacionárius, hanem a részecskék sűrűsége lassan, azaz nagy idő-léptékben ( $T$ ) változni fog.

## Tétel

Az így kapott nagyléptékű  $\varrho(T, X)$  sűrűség kielégíti a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial T} + \frac{\partial \varrho(1 - \varrho)}{\partial X} = 0$$

differenciálegyenletet (*Burgers egyenlet*).

# Nagy léptékben

Nézzük a végtelen modellt messziről, és hagyjuk sokáig fejlődni. Ha a  $\rho$  kezdeti sűrűséget lassan, azaz nagy távolság-léptékben ( $X$ ) változtatjuk, akkor a modell eloszlása nem lesz stacionárius, hanem a részecskék sűrűsége lassan, azaz nagy idő-léptékben ( $T$ ) változni fog.

## Tétel

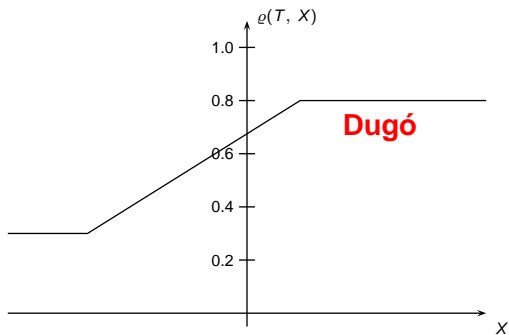
Az így kapott nagyléptékű  $\rho(T, X)$  sűrűség kielégíti a

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial \rho(1 - \rho)}{\partial X} = 0$$

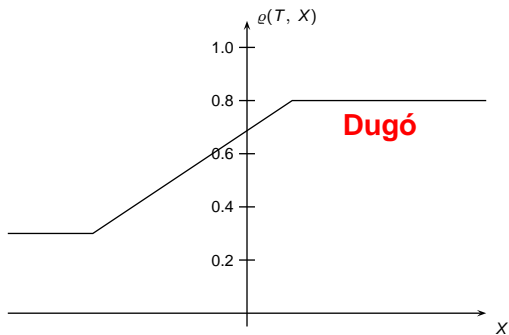
differenciálegyenletet (*Burgers egyenlet*).

Ennek bizonyos megoldásai a következők:

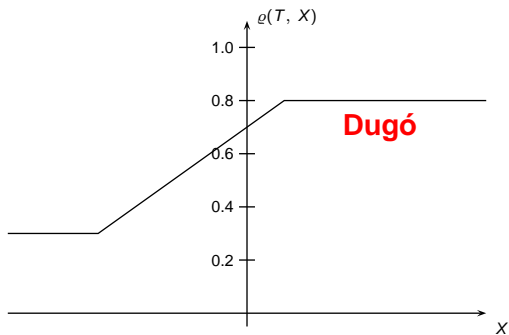
# Nagy léptékben



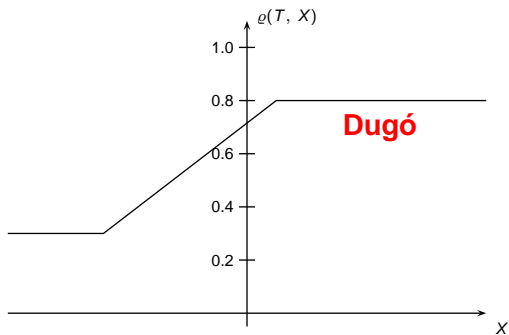
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

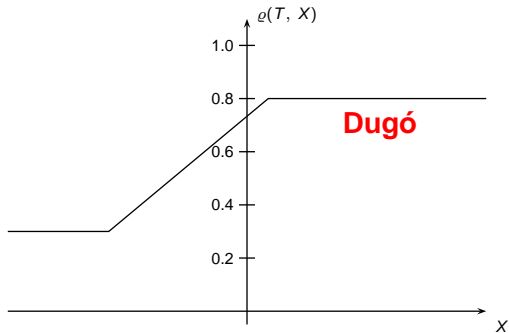


# Nagy léptékben

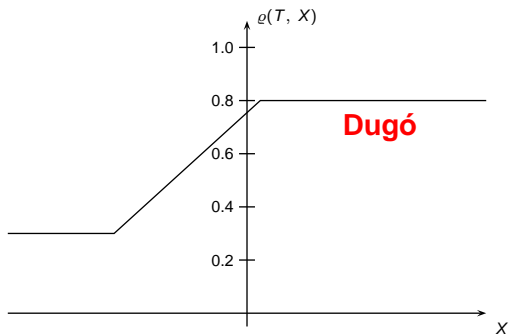




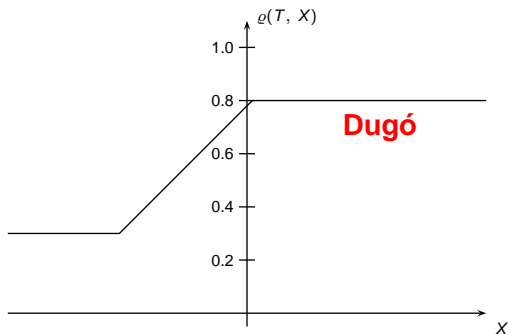
# Nagy léptékben



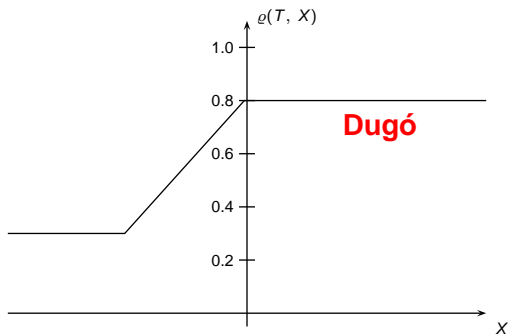
# Nagy léptékben



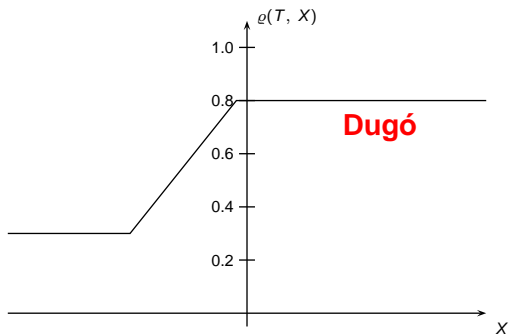
# Nagy léptékben



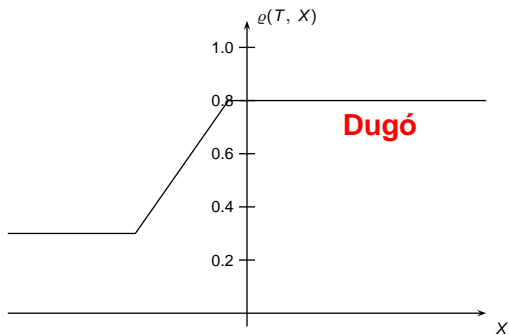
# Nagy léptékben



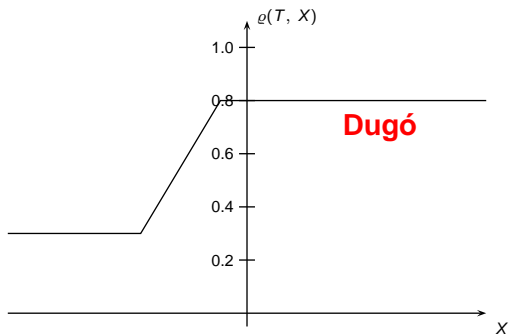
# Nagy léptékben



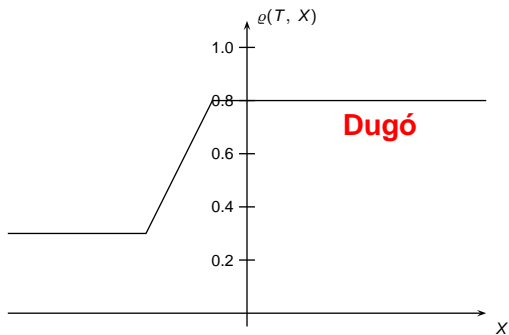
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

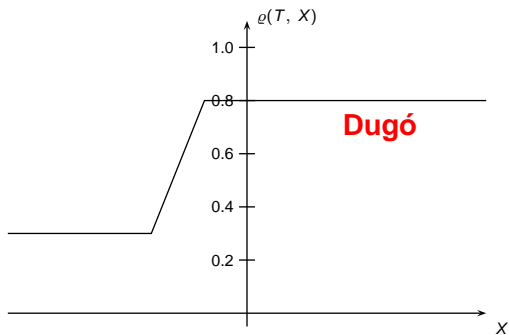


# Nagy léptékben

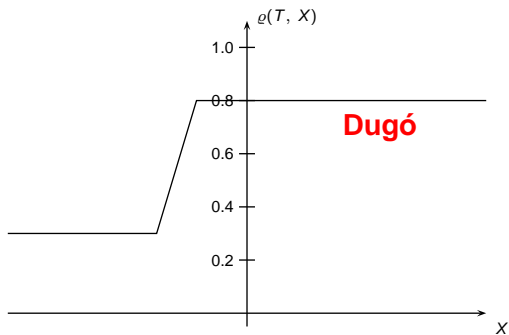




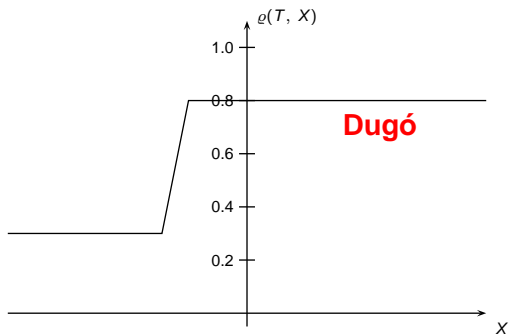
# Nagy léptékben



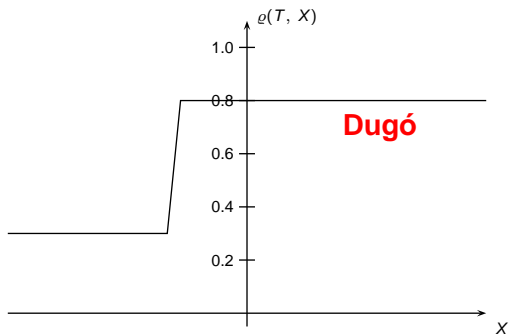
# Nagy léptékben



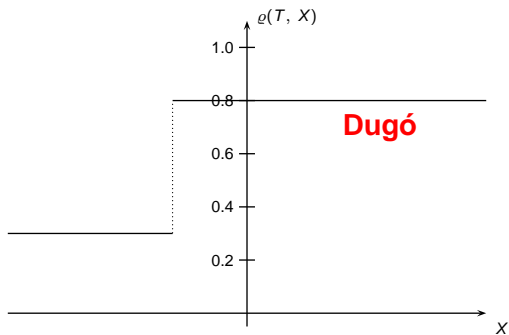
# Nagy léptékben



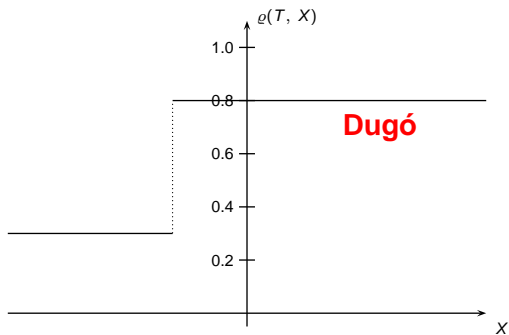
# Nagy léptékben



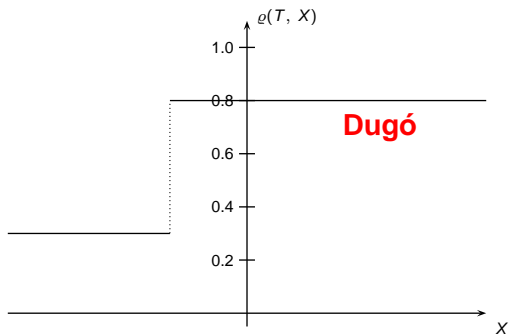
# Nagy léptékben



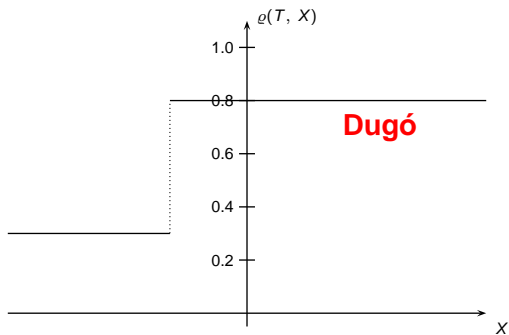
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

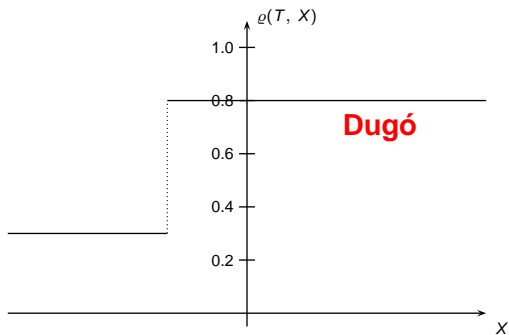


# Nagy léptékben

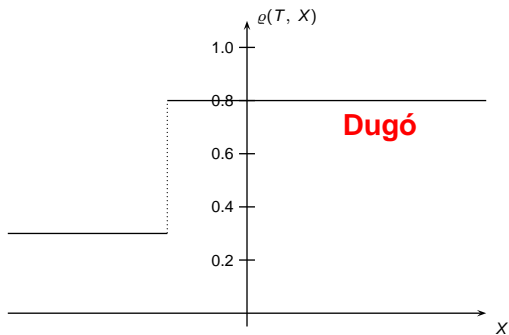




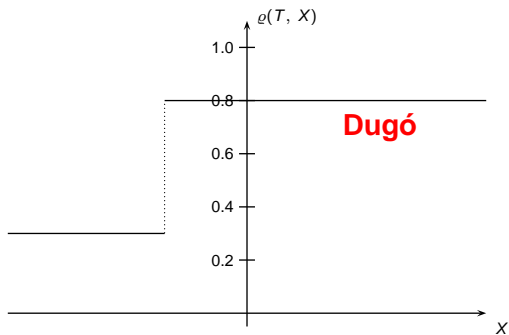
# Nagy léptékben



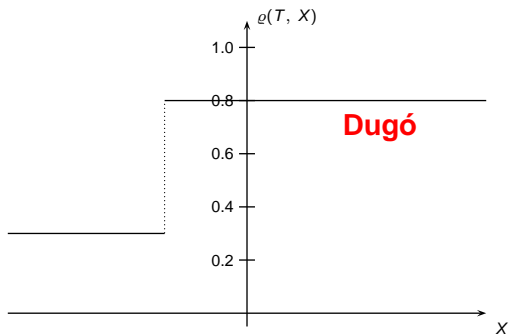
# Nagy léptékben



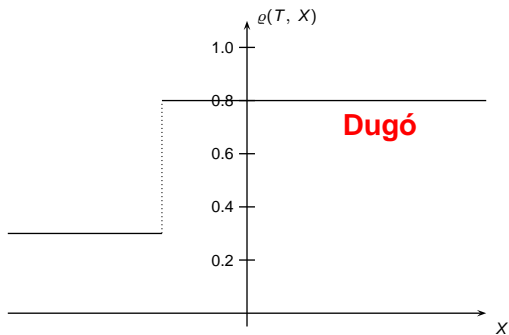
# Nagy léptékben



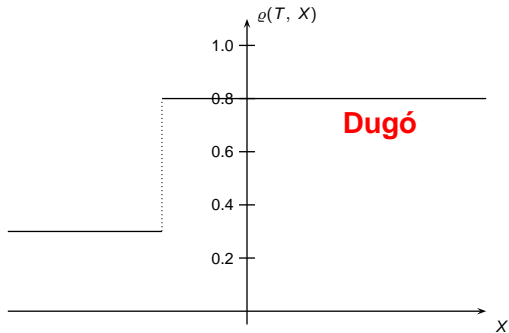
# Nagy léptékben



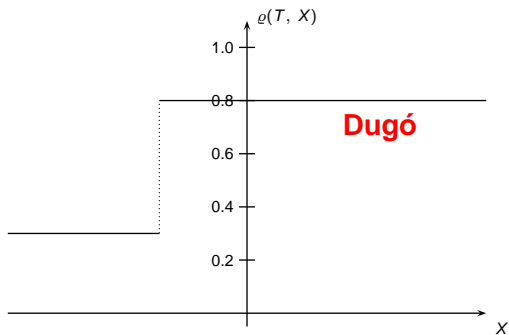
# Nagy léptékben



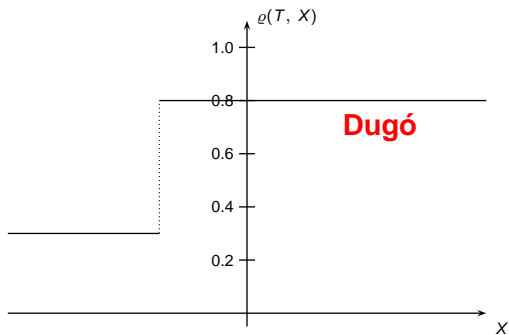
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

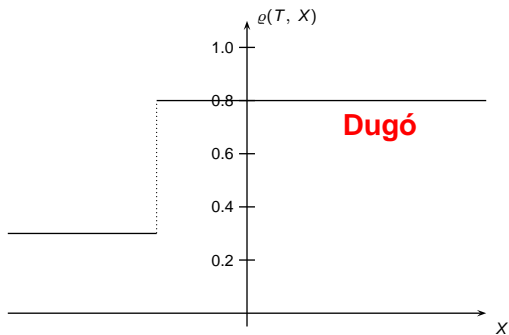


# Nagy léptékben

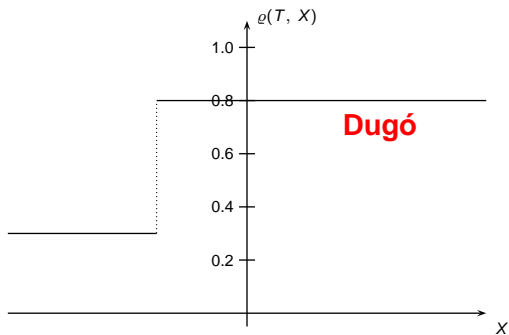




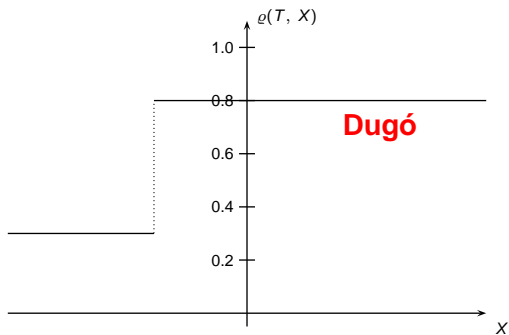
# Nagy léptékben



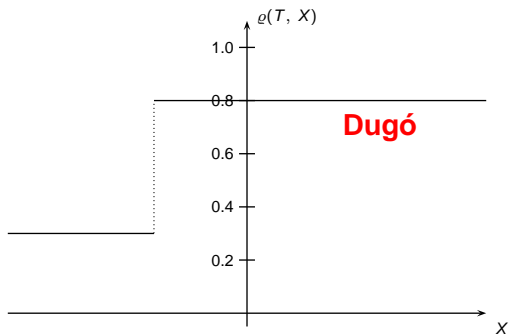
# Nagy léptékben



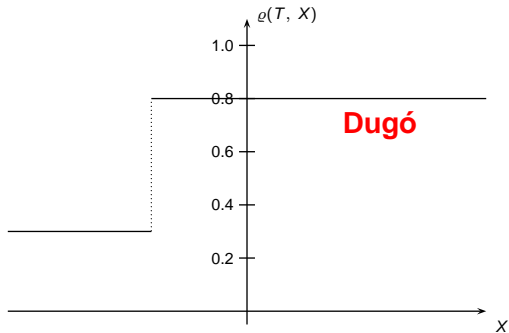
# Nagy léptékben



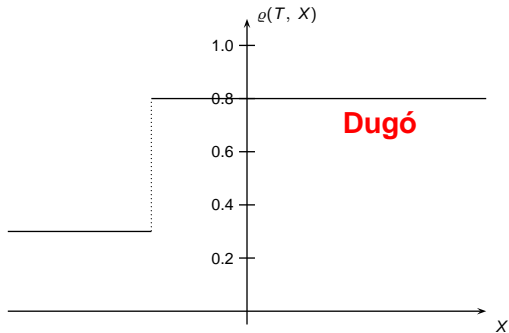
# Nagy léptékben



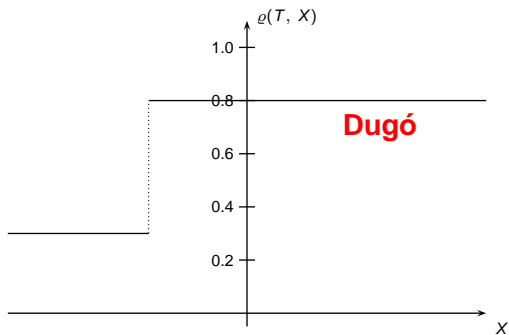
# Nagy léptékben



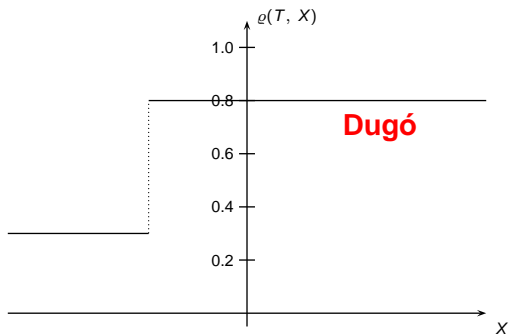
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

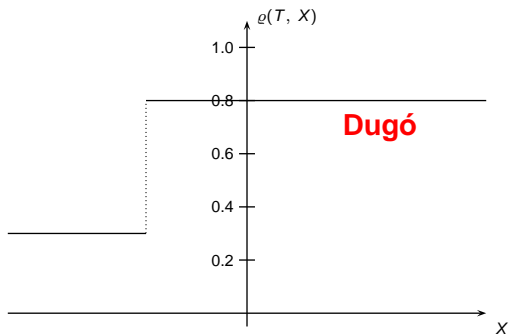


# Nagy léptékben

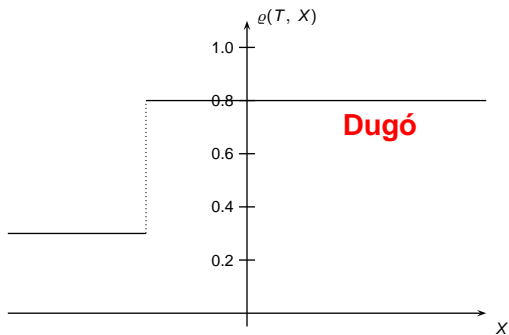




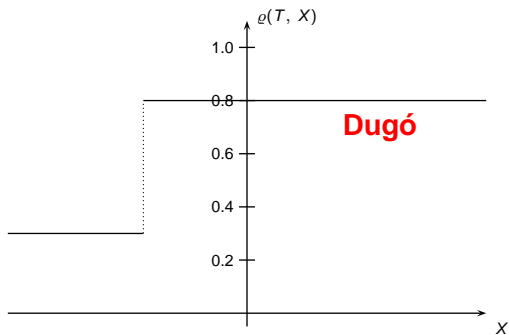
# Nagy léptékben



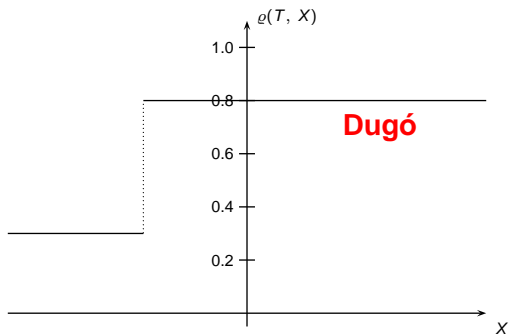
# Nagy léptékben



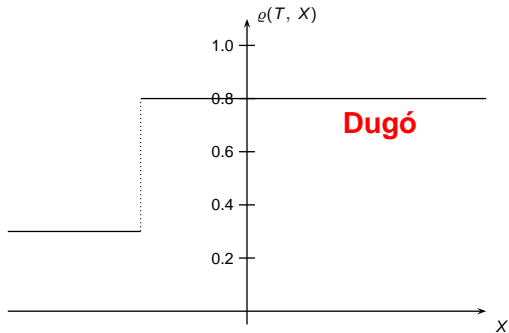
# Nagy léptékben



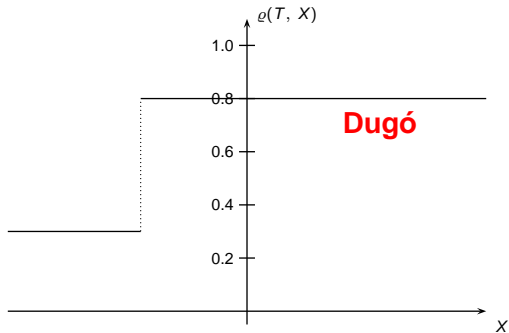
# Nagy léptékben



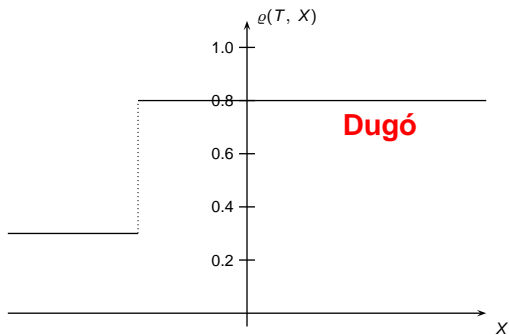
# Nagy léptékben



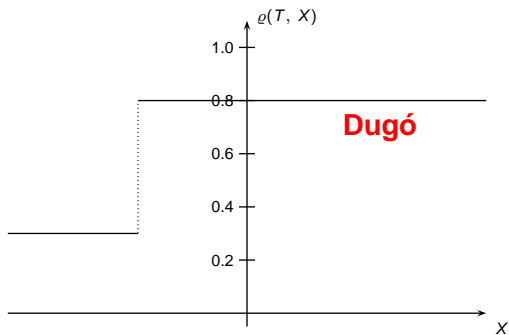
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

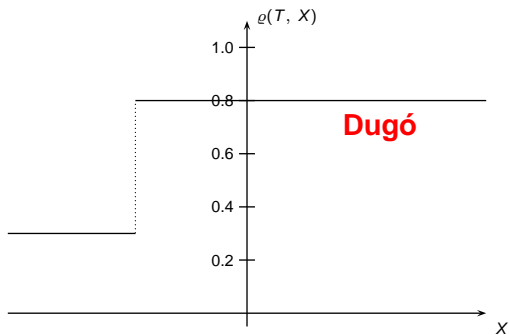


# Nagy léptékben

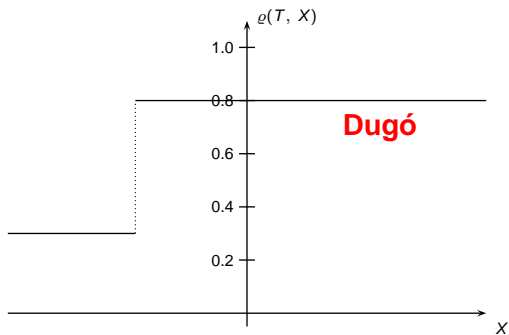




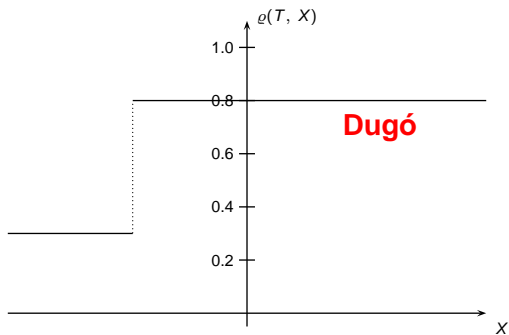
# Nagy léptékben



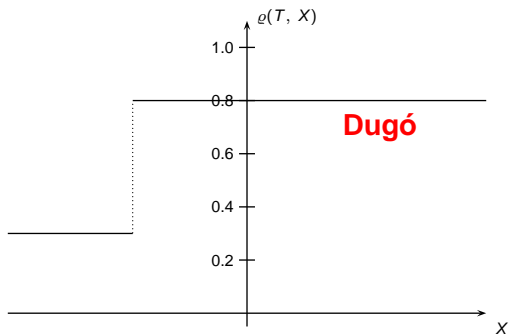
# Nagy léptékben



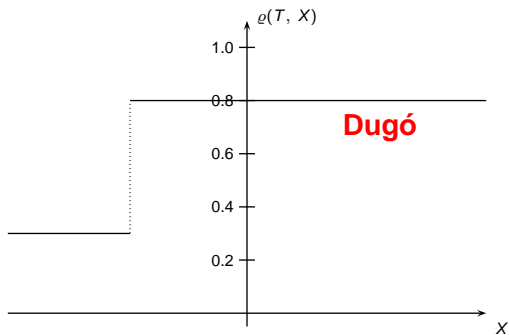
# Nagy léptékben



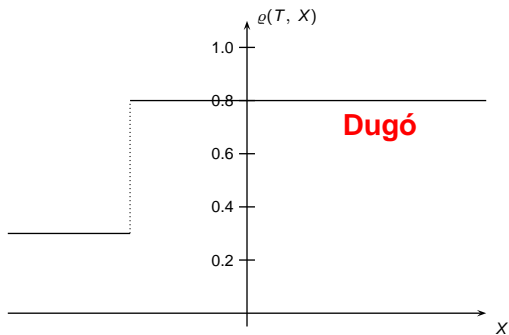
# Nagy léptékben



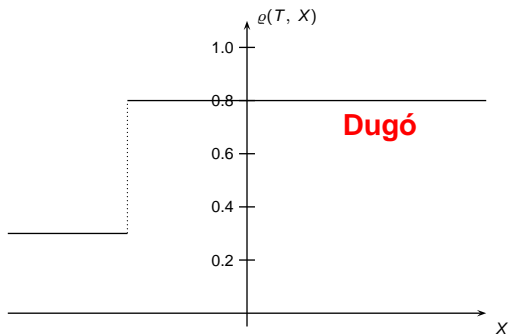
# Nagy léptékben



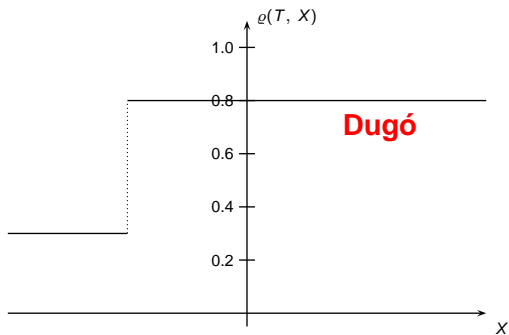
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

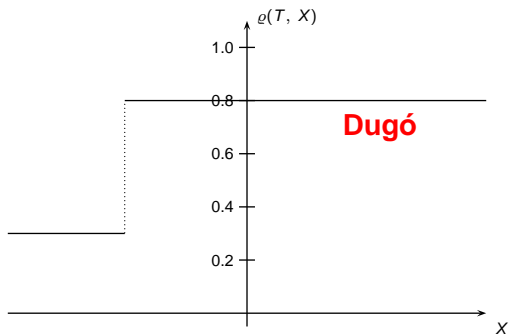


# Nagy léptékben

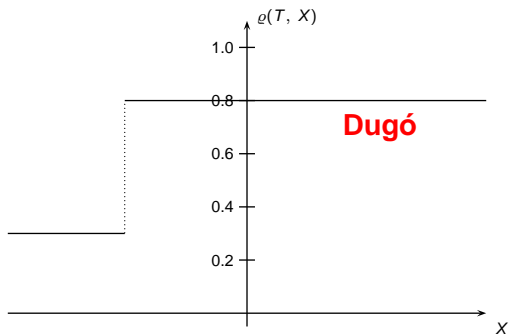




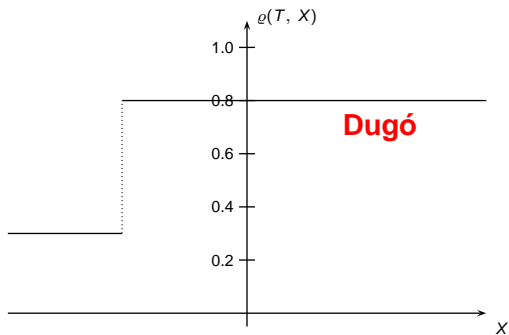
# Nagy léptékben



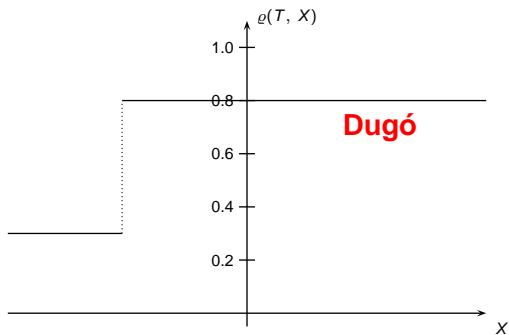
# Nagy léptékben



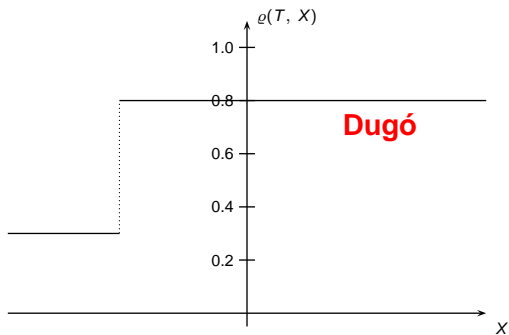
# Nagy léptékben



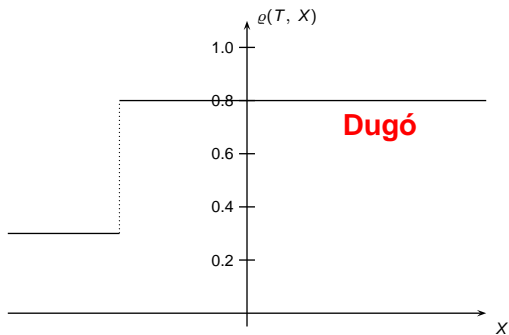
# Nagy léptékben



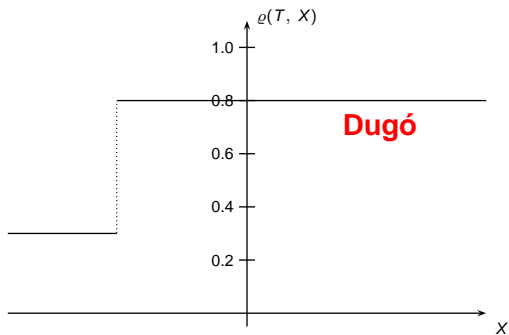
# Nagy léptékben



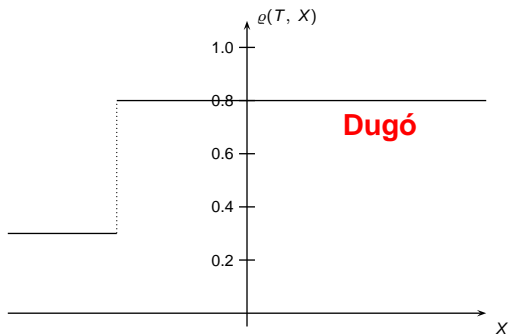
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

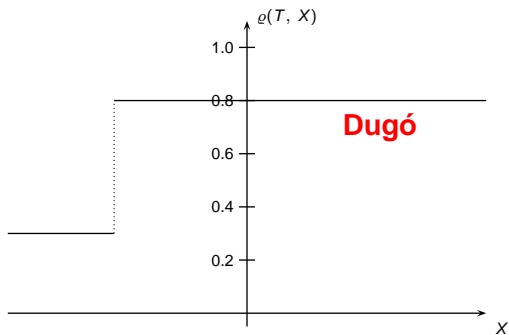


# Nagy léptékben

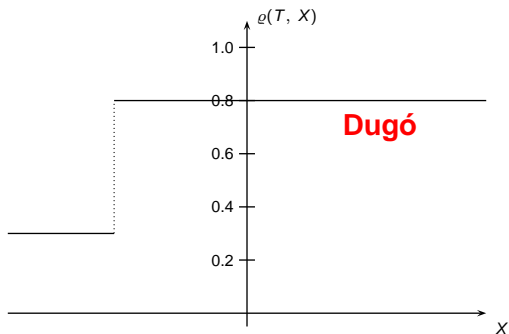




# Nagy léptékben

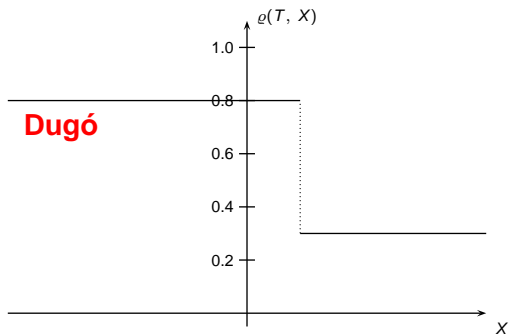


# Nagy léptékben

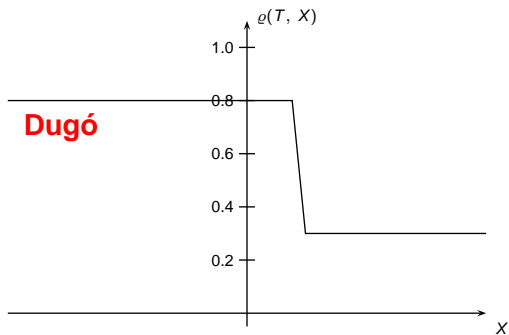


A dugó kezdete: **kiélesedik.**

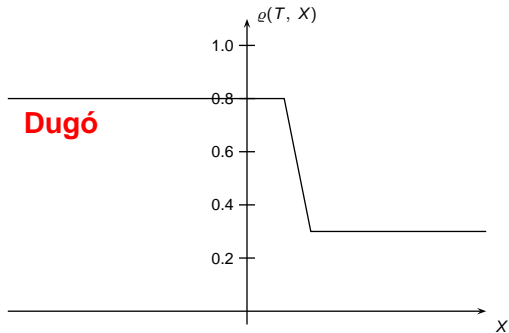
# Nagy léptékben



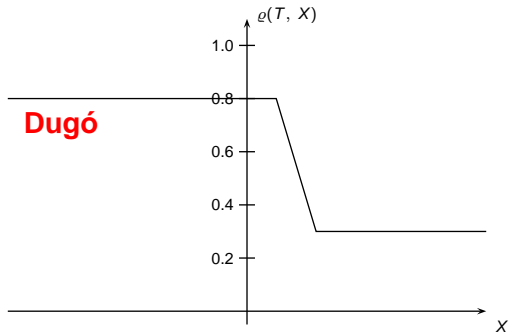
# Nagy léptékben



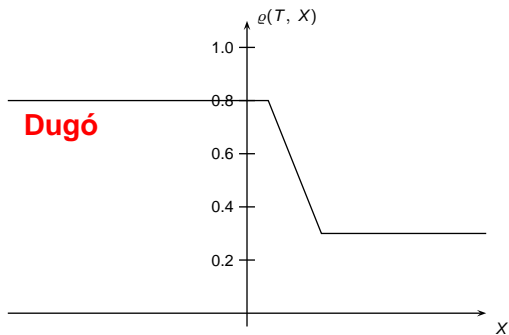
# Nagy léptékben



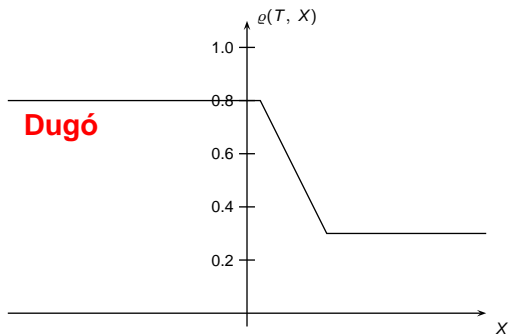
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

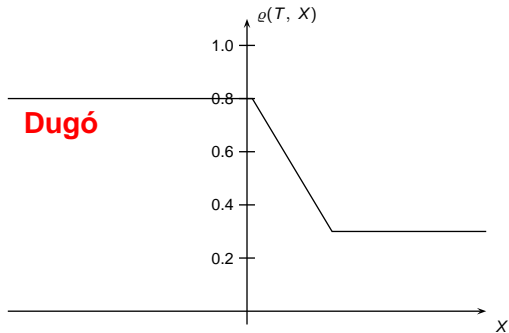


# Nagy léptékben

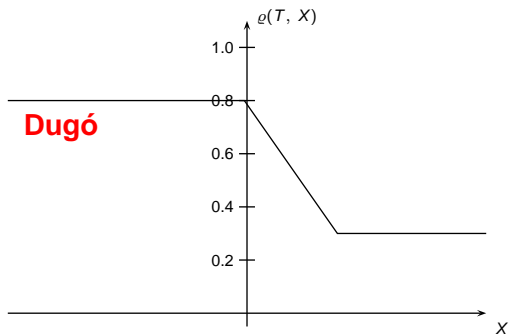




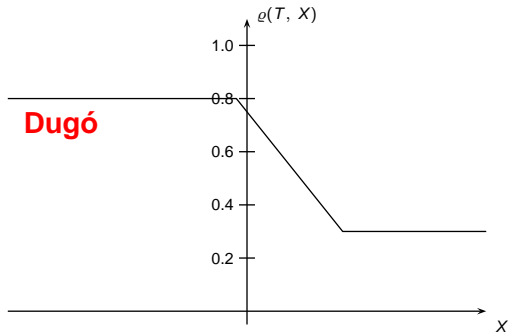
# Nagy léptékben



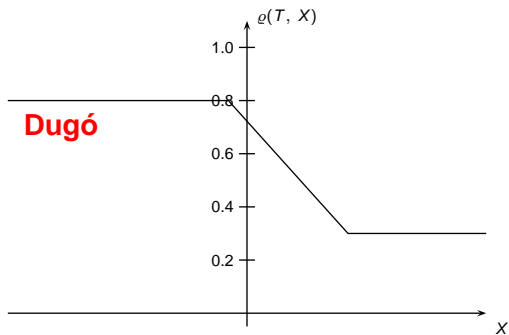
# Nagy léptékben



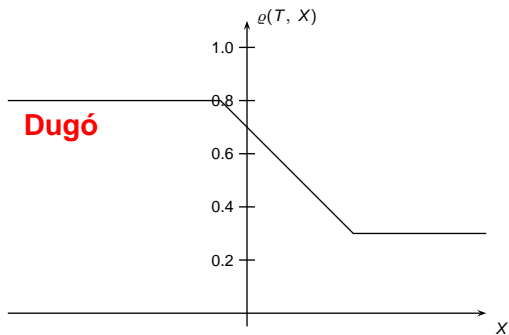
# Nagy léptékben



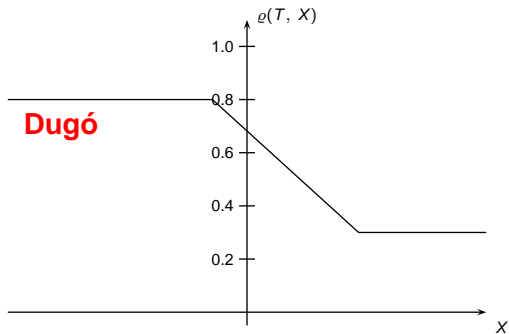
# Nagy léptékben



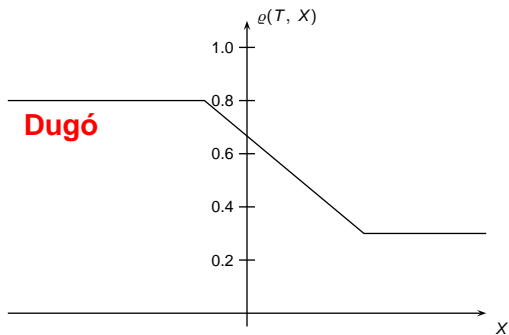
# Nagy léptékben



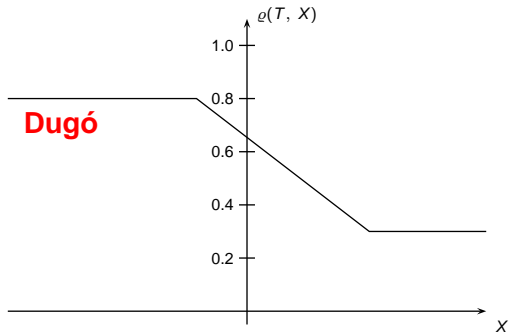
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

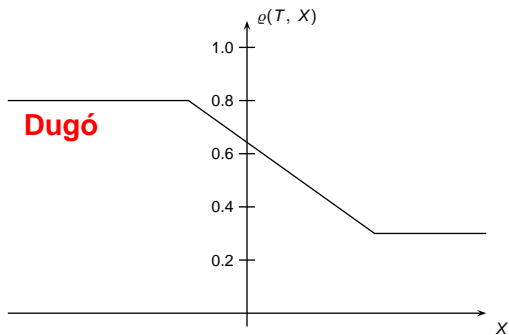


# Nagy léptékben

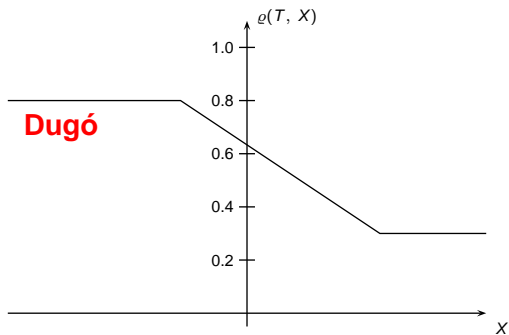




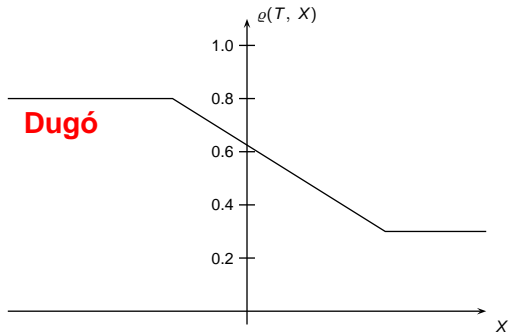
# Nagy léptékben



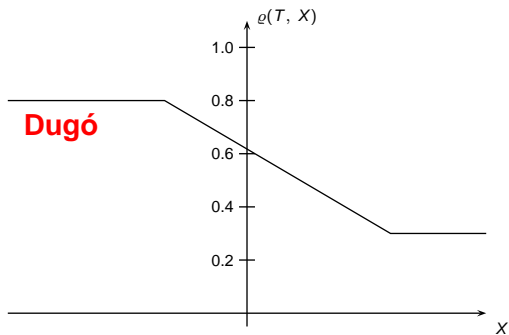
# Nagy léptékben



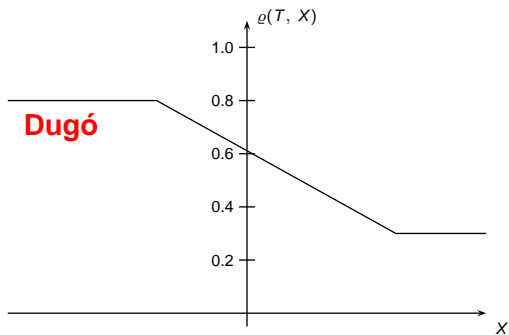
# Nagy léptékben



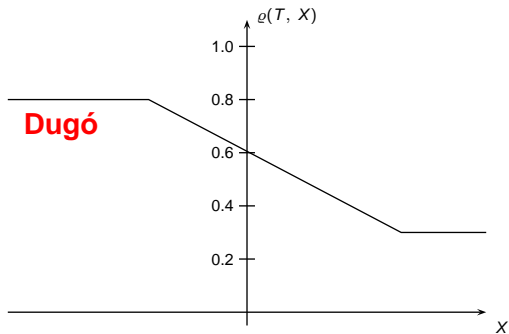
# Nagy léptékben



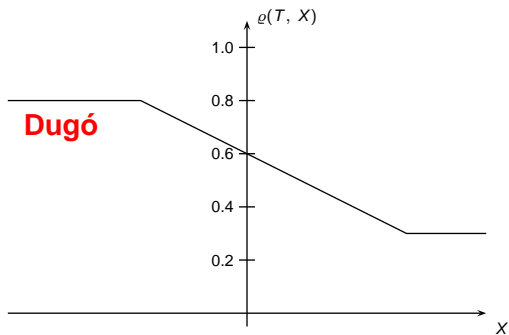
# Nagy léptékben



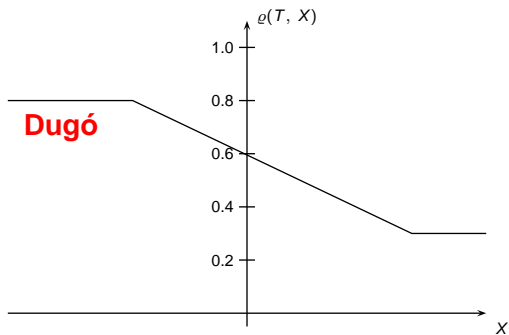
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

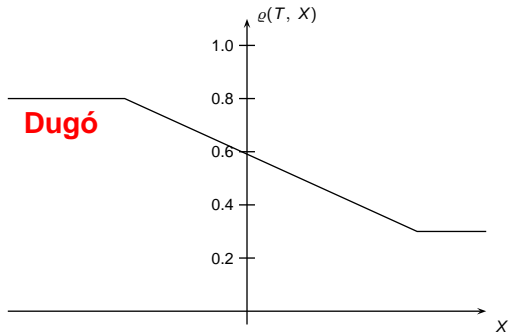


# Nagy léptékben

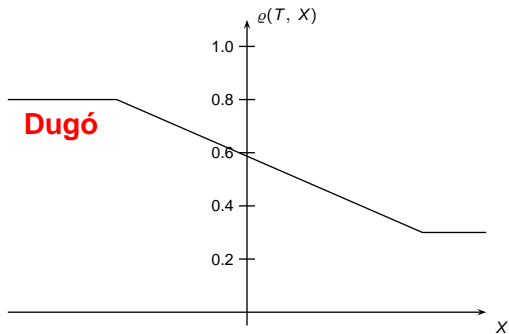




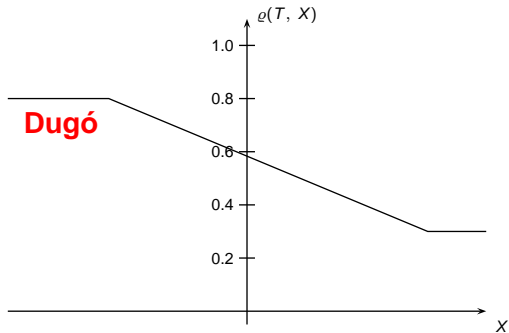
# Nagy léptékben



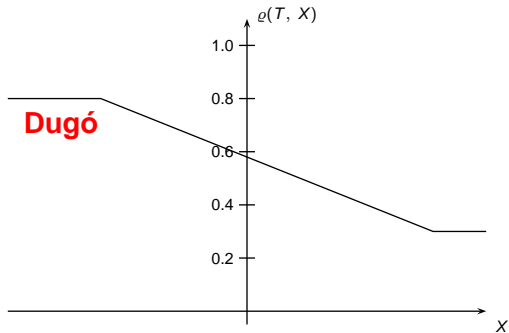
# Nagy léptékben



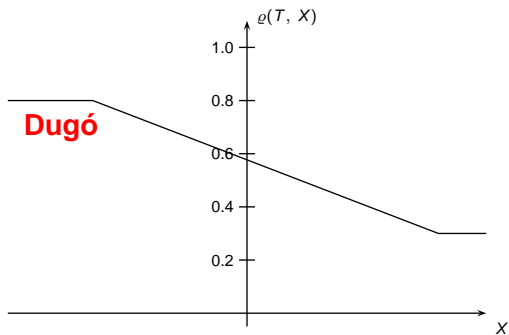
# Nagy léptékben



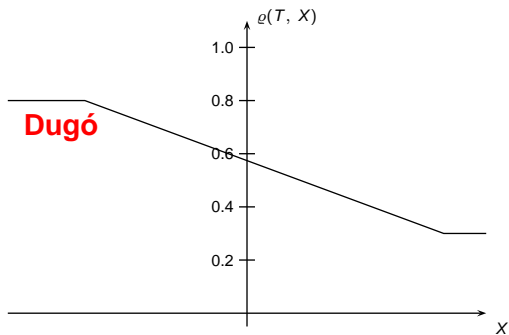
# Nagy léptékben



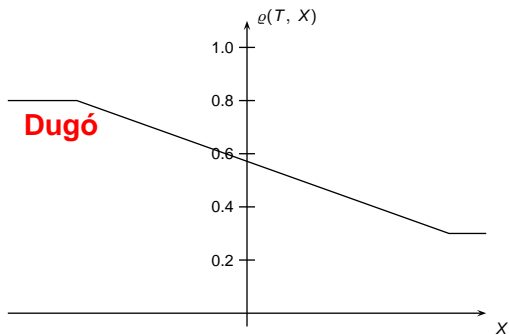
# Nagy léptékben



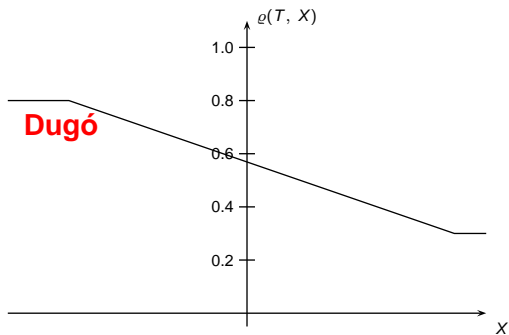
# Nagy léptékben



# Nagy léptékben

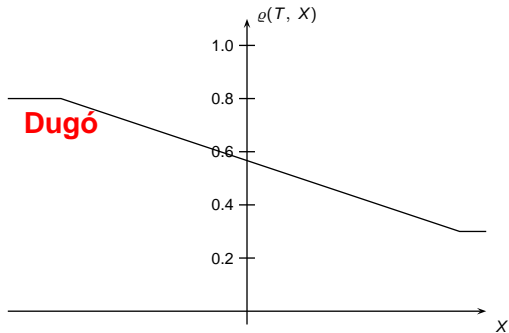


# Nagy léptékben

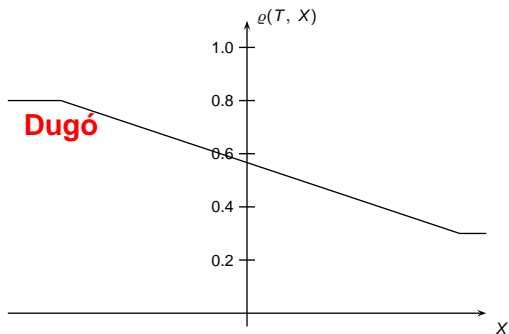




# Nagy léptékben



# Nagy léptékben



A dugó vége: **kisimul.**

# Megjegyzés

- ▶ Ennél sokkal kifinomultabb sztochasztikus modellek vannak a dugók modellezésére, melyeket nagyvárosokban is használnak

# Megjegyzés

- ▶ Ennél sokkal kifinomultabb sztochasztikus modellek vannak a dugók modellezésére, melyeket nagyvárosokban is használnak
- ▶ Már a **TASEP** is rendkívül érdekes matematikailag, sok szép megválaszolt kérdéssel, és nehéz nyitott kérdésekkel.

# Megjegyzés

- ▶ Ennél sokkal kifinomultabb sztochasztikus modellek vannak a dugók modellezésére, melyeket nagyvárosokban is használnak
- ▶ Már a **TASEP** is rendkívül érdekes matematikailag, sok szép megválaszolt kérdéssel, és nehéz nyitott kérdésekkel.

Köszönöm a figyelmet.